

Предисловие

Выпуклый анализ — это раздел современной математики, изучающий свойства выпуклых объектов: выпуклых множеств, выпуклых функций, выпуклых экстремальных задач и др. Особые свойства выпуклых множеств (как их тогда называли, фигур) были замечены еще в древности. Постепенно такие факты накапливались. На рубеже XIX и XX веков большой вклад в изучение выпуклых множеств был сделан немецкими математиками Г. Минковским и К. Каратеодори. Однако до середины XX века все это направление рассматривалось как довольно специальный раздел геометрии (см. напр. книги [9, 10]). Новый этап в изучении выпуклых объектов начался с 1950-х годов, когда обнаружилась их роль в теории линейного и нелинейного программирования, и особенно с 1960-х годов, после публикации книги Л. С. Понтрягина и его учеников [4], содержащей условие экстремума в новом классе задач — в задачах оптимального управления, которое известно как принцип максимума Понтрягина. Начались интенсивные поиски общих схем получения условий оптимальности в широких классах задач на экстремум, в результате которых выяснилась фундаментальная роль выпуклых структур в теории экстремума. С этого момента выпуклый анализ превратился из узкоспециального раздела геометрии в самостоятельный раздел математики, на котором базируется вся современная теория оптимизации и знакомство с которым требуется широкому кругу не только чистых математиков, но и прикладников. (Сам термин «выпуклый анализ» возник в конце 1960-х годов как отражение тесной связи геометрических свойств выпуклых множеств и аналитических свойств выпуклых функций; см. книгу Рокафеллара [1]).

Вопросы выпуклого анализа в том или ином объеме освещаются во многих книгах и учебниках, связанных с оптимизацией. (В конце пособия приведен некоторый список литературы, в которой содержатся элементы выпуклого анализа и рассматриваются его приложения к теории оптимизации.) Однако последовательного, логически связанного и полного изложения всех основных понятий, конструкций и фактов, доступного для первоначального изучения, пока нет. (Книга [1], являющаяся своего рода энциклопедией для конечномерного случая, вряд ли может служить начальным чтением.) Настоящее пособие имеет целью восполнить этот пробел.

Указанная в заглавии элементарность данного курса состоит, главным образом, в том, что в основном мы здесь ограничиваемся случаем, когда все множества и функции рассматриваются в конечномерном про-

странстве. В этом случае для понимания материала не требуется очень серьезной математической подготовки — достаточно знания основ линейной алгебры и начальных понятий математического анализа. В частности, базовый факт выпуклого анализа — теорема об отделимости — доказывается здесь вполне элементарно. (В бесконечномерном случае изложение значительно усложняется, что связано главным образом с вопросом существования внутренней точки у данного выпуклого множества и требует привлечения глубоких понятий и теорем функционального анализа. По этому поводу см. [2, 3, 6–8, 11, 17, 18, 21, 27, 30, 31] и учебники функционального анализа.)

Кроме того, мы старались не загружать курс изложением всех известных результатов по данному вопросу, ограничиваясь лишь основными понятиями, конструкциями и фактами, связанными с выпуклостью и играющими ту или иную роль в теории оптимизации. Тем не менее, курс нельзя назвать тривиальным: несмотря на техническую простоту почти всех понятий, формул и доказательств, логическая связь между ними требует определенных усилий для усвоения.

По возможности мы даем полные доказательства всех утверждений; исключения сделаны лишь для некоторых теорем, которые сами по себе заслуживают упоминания, но далее в курсе не используются.

Данное пособие написано на основе полугодового курса лекций, который автор читал в течении ряда лет для студентов 3 курса факультета ВМК МГУ. При написании использовались книги [1–3, 20, 23, 25, 26].

Автор признателен В. И. Аркину, М. В. Балашову, С. И. Дудову, И. В. Евстигнееву, В. Л. Левину, Г. Г. Магарил-Ильяеву, М. С. Никольскому, Н. П. Осмоловскому, Е. С. Половинкину и В. М. Тихомирову, с которыми он обсуждал различные вопросы выпуклого анализа.

В подготовке рукописи к печати большую помощь оказала Т. Ю. Горякова и студенты разных лет Б. Копейкин, О. Виноградов, А. Ермаков, Е. Федоров, А. Данилов, К. Шишов, А. Грибков, М. Щербаков, И. Пономарёва. Оригинал-макет пособия подготовил А. И. Смирнов. Всем им автор выражает свою благодарность.

А. В. Дмитрук