На правах рукописи

Паламарчук Екатерина Сергеевна

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛЯМ С ВРЕМЕННЫМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ

Специальность 08.00.13 – «Математические и инструментальные методы экономики»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013 г.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Центральном экономико-математическом институте Российской академии наук (ЦЭМИ РАН)

Научный руководитель:	Белкина Татьяна Андреевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	Кабанов Юрий Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», научный руководитель Международной лаборатории количественных финансов
	Назин Александр Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук (ВЦ РАН)

Защита состоится «16» декабря 2013 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета по защите докторских и кандидатских диссертаций Д 002.013.02 ЦЭМИ РАН по адресу: 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 47, аудитория 520.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН ЦЭМИ РАН по адресу: 117418, Москва, Нахимовский проспект, д. 47, комн. 717.

Автореферат разослан «   » ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических
наук С. В. Борисова

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Линейные управляемые системы широко применяются при моделировании различных явлений и процессов в области экономики. Необходимость оценки качества управляющих воздействий приводит к использованию целевого функционала, который часто имеет интегральный квадратичный вид и учитывает динамическую природу функционирования системы в виде наличия в нем дисконтирующей функции. Линейные системы с таким критерием обычно называет линейно-квадратическим регулятором и его экономическим приложениям посвящены работы таких исследователей, как H. M. Amman, M. Aoki, M. Athans, G. C. Chow, C. C. Holt, D. A. Kendrick, F. Modigliani, R. S. Pindyck, T. J. Sargent, J. K. Sengupta, H. Theil, S. J. Turnovsky.

При анализе поведения управляемых экономических систем на больших интервалах планирования одной из важнейших задач является оценка долгосрочных последствий применения выбранных стратегий управления. Основная трудность здесь связана с тем, что на динамику системы влияют неконтролируемые (случайные) факторы. Поэтому теоретической основой указанного анализа могут являться исследования стохастических динамических систем управления на бесконечных интервалах времени. Тема диссертационного исследования относится к проблематике так называемой стохастической оптимальности, или оптимальности с точки зрения вероятностных критериев в линейных управляемых системах. Стохастическая оптимальность для динамических систем изучалась в работах Т. А. Белкиной, V. S. Borkar, P. Dai Pra, G. B. Di Masi, M. Ghosh, Ю. М. Кабанова, A. Leizarowitz, P. Mandl, А. В. Назина, А. С. Позняка, Э. Л. Пресмана, В. И. Ротаря, M. Taksar, B. Trivellato. Вероятностные критерии, в отличие от традиционно принятых в стохастической оптимизации критериев, основанных на математических ожиданиях (м.о.) целевых функционалов, учитывают поведение управляемого процесса не просто в среднем по всему множеству реализаций, но и поведение на отдельно взятой траектории случайного процесса. Точнее, вероятностные критерии основаны на изучении асимптотического вероятностного поведения целевых функционалов для разных управлений (почти наверное (п.н.), по вероятности и т.д.). Кроме того, при постановке задачи управления экономической системой на большом интервале планирования в условиях неопределенности, в частности, при выборе адекватного критерия оптимальности, может возникать необходимость учета временных предпочтений экономических агентов в структуре критерия, а также степени влияния случайных факторов. Традиционный критерий, применяемый в задачах с бесконечным горизонтом, так называемое долговременное среднее, во многих моделях, рассматриваемых в данной работе, оказывается неэффективным и даже лишенным смысла. В частности, к ним относятся исследуемые задачи управления линейной системой с затухающими (вырождающимися со временем) или, наоборот, бесконечно нарастающими возмущениями, а также задачи с дисконтированием. Дисконтирующая функция в рассматриваемых моделях выражает временные предпочтения экономических агентов. В зависимости от вида временных предпочтений (положительные, отрицательные или нулевые) эта функция может убывать, возрастать или же быть постоянной. Известные результаты по стохастической оптимальности для линейных систем либо оказываются неприменимы для таких моделей, либо, как выяснилось в результате проведенных в диссертационной работе исследований, основаны на слишком грубой нормировке целевых функционалов при анализе их асимптотического вероятностного поведения. Постановка проблемы оценки качества управления в моделях указанного вида требует построения критериев, учитывающих в своей структуре такие факторы, как изменение параметров возмущающего процесса или влияние дисконтирующей функции на асимптотическое поведение целевого функционала. При использовании таких критериев возникает задача выявления взаимосвязи между системами с дисконтированием и системами с той или иной спецификой возмущений. Это позволяет получить ряд новых результатов, обобщающих известные как при исследовании оптимальности в среднем на бесконечных временных интервалах, так и при исследовании стохастической оптимальности для линейных управляемых систем и применить эти результаты к моделям с временными предпочтениями экономических агентов.

Объектом исследования является стохастическая линейная управляемая система с квадратичным целевым функционалом, допускающая наличие дисконтирующей функции, затухание или неограниченный рост случайных возмущений.

Предмет исследования – оптимальность управляемой системы с точки зрения асимптотических вероятностных критериев.

Методы исследования включают методы стохастического анализа, теории вероятностей и теории стохастического управления.

Цель и задачи исследования. Цель диссертационной работы состоит в получении результатов по стохастической оптимальности для линейных управляемых систем с квадратичным целевым функционалом при использовании различных вероятностных критериев и их последующем применении к анализу моделей с временными предпочтениями экономических агентов.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Разработать критерий оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени для систем с переменными параметрами возмущений, учитывающий возможность наличия особенностей шумовых воздействий в системе (их затухание или

неограниченный рост), который бы обобщал критерий долговременного среднего, и определение вида управления, являющегося решением задачи оптимизации с таким критерием.
2. Определить оптимальность полученного закона управления с точки зрения вероятностных критериев, основанных на изучении асимптотического вероятностного поведения процесса дефекта, определяемого как разность целевых функционалов на оптимальном в среднем и произвольном допустимом управлении, и найти вид верхней функции для семейства процессов дефекта.
3. Построить критерий оптимальности в среднем и почти наверное для модели с различными дисконтирующими функциями.
4. Выявить связь между линейными управляемыми системами с дисконтированием в целевом функционале и системами с переменными параметрами возмущений.
5. Применить результаты, полученные для систем с возмущениями, для исследования стохастической оптимальности управления в моделях с дисконтированием.
6. Применить общие результаты по определению оптимальности в линейных экономических системах с временными предпочтениями к анализу некоторых экономических моделей.

Научная новизна. В работе были предложены новые критерии оптимальности для линейной управляемой системы на неограниченных интервалах времени, основанные как на значениях м.о. целевых функционалов, так и на сравнении их асимптотического вероятностного поведения. К ним относятся, в частности, критерии минимизации *обобщенного долговременного среднего*, а также *обобщенного стохастического долговременного среднего*. Указанные понятия, в отличие от их традиционных аналогов, имеющих дело со средними по времени значениями целевых функционалов или их м.о., используют нормировку, которая может быть функцией, растущей быстрее или медленнее горизонта планирования в зависимости от скорости роста (или убывания) параметров возмущения или дисконтирующей функции. С точки зрения новых критериев была исследована оптимальность так называемого установившегося (при стремлении горизонта планирования к бесконечности) оптимального (в смысле м.о.) управления, хорошо известного для задачи с конечным временным горизонтом. Использование нормировок общего вида позволило рассматривать более широкий класс задач и при исследовании стохастической оптимальности, определяемой как асимптотическая неположительность нормированного процесса дефекта оптимального управления. Процессом дефекта называется разность функционалов на оптимальном в среднем и произвольном управлениях, рассматриваемых на всех конечных временных интервалах. Подходящие нормировки при этом определяются видом верхних функций для семейства процессов дефекта. В работе были получены новые результаты о виде верхних функций, обобщающие известные и улучшающие их для случаев затухания возмущений и убывающей дисконтирующей функции. Кроме того, получены соответствующие результаты для случаев неограниченного возрастания возмущений или дисконтирующей функции, для которых известные до сих пор результаты были неприменимы.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты исследования в целом носят теоретический характер и могут быть использованы в качестве аналитического средства при изучении различных моделей, формулируемых в виде линейных стохастических управляемых систем в экономике.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались на Международной конференции "Теория вероятностей и ее приложения посвященной столетию со дня рождения Б.В. Гнеденко (МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 26-30 июня 2012 г.), Шестой международной конференции "Управление развитием крупномасштабных систем" MLSD 2012' (ИПУ РАН им. В.А. Трапезникова, г. Москва, 1-3 октября 2012 г.), конференции "Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах" УТЭОСС-2012 (Концерн "ЦНИИ Электроприбор г. Санкт-Петербург, 9-11 октября 2012 г.), Научно–практической конференции "Системный анализ в экономике-2012" (Финансовый Университет при Правительстве РФ, г. Москва, 27-28 ноября 2012 г.), Втором Российском Экономическом Конгрессе (г. Суздаль, 18-22 февраля 2013 г.), Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва 8-12 апреля 2013 г.), Седьмой международной конференции "Управление развитием крупномасштабных систем" MLSD 2013' (ИПУ РАН им. В.А. Трапезникова, г. Москва, 30 сентября-2 октября 2013 г.), Семинаре "Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании" (ЦЭМИ РАН, г. Москва), Семинаре отдела "Математическое моделирование экономических систем" (ВЦ РАН им. А.А. Дородницына, г. Москва), HIM Trimester Seminar (Hausdorff Research Institute for Mathematics, г. Бонн, Германия).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 печатных работ общим объемом 5,46 п.л. (вклад автора – 4,86 п.л.), из них 2 работы в изданиях, входящих в перечень ВАК Министерства образования и науки РФ, объемом 2,32 п.л. (вклад автора – 1,72 п.л.).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 175 страниц машинописного текста и включает 3 таблицы. Список использованной литературы содержит 220 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы, формулируются цель и задачи исследования, определяются объект, предмет и методы исследования, характеризуется научная новизна, приводятся сведения об апробации работы, структуре и объеме диссертации.

В **первой главе** проводится обзор основных подходов к определению оптимальности для линейных стохастических управляемых систем, основанных, в том числе, на различных вероятностных критериях, описывается проблематика этой области (разделы 1.1 и 1.2). Также определяются системы управления, исследуемые в работе. Далее изучаются два основных вопроса этой главы: существование так называемого установившегося закона управления на бесконечном интервале времени (раздел 1.3) и поведение процесса на этом управлении с вероятностью единица (раздел 1.4).

Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан n-мерный случайный процесс X_t, $t \geq 0$, описываемый уравнением

$$dX_t = A_t X_t dt + B_t U_t dt + G_t dw_t\,, \qquad X_0 = x, \tag{1}$$

где начальное состояние x неслучайно; w_t, $t \geq 0$, – d-мерный стандартный винеровский процесс; U_t, $t \geq 0$, – допустимое управление, или k-мерный случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{w_s,\ s \leq t\}$, такой что уравнение (1) имеет решение; A_t, B_t, $t \geq 0$, – ограниченные матричные функции времени таких размерностей, при которых (1) имеет смысл. Предположения относительно матрицы G_t формулируются в соответствующих разделах второй главы, где рассматривается два случая: ограниченной (раздел 2.1) и неограниченной G_t (раздел 2.2). Также будем предполагать, что все рассматриваемые в дальнейшем процессы заданы на том же вероятностном пространстве.

Множество допустимых управлений обозначим через $\mathcal{U}$. Для каждого $T > 0$ в качестве целевого функционала определим случайную величину (с.в.)

$$J_T(U) = \int_0^T (X_t' Q_t X_t + U_t' R_t U_t)\,dt, \tag{2}$$

где $U = \{U_t\}_{t\leq T}$ – допустимое управление $U \in \mathcal{U}$, Q_t, R_t, $t \geq 0$, – ограниченные симметричные матричные функции времени, неотрицательно определенная и положительно определенная соответственно, $R_t \geq \rho_R \cdot I$ ($'$ – знак транспонирования, $\rho_R > 0$ – некоторая константа, запись $A \geq B$ для матриц означает, что разность $A - B$ неотрицательно определена, I – единичная матрица).

При $T \to \infty$ традиционно ищется управление U^* (называемое также *установившим-*

ся законом управления[1] в силу процедуры его определения), являющееся решением задачи с критерием, называемым *долговременным средним*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}. \tag{3}$$

Однако в задачах управления линейной системой с затухающими (вырождающимися со временем) или, наоборот, бесконечно нарастающими возмущениями, долговременное среднее оказывается неподходящим критерием. В этих ситуациях требуется введение более общей нормировки, которая каким–то образом учитывала бы влияние возмущений. В данной работе такая нормировка предлагается в виде $\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt$, что в дальнейшем позволяет получить основные результаты диссертации. Критерий оптимальности с обобщенной нормировкой такого рода можно назвать *обобщенным долговременным средним.*

Определение 1 *Управление $U^* \in \mathcal{U}$ будем называть оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени или оптимальным в смысле обобщенного долговременного среднего, если оно является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}. \tag{4}$$

Предполагается, что $\int\limits_0^\infty \|G_t\|^2\,dt > 0$ ($\|\cdot\|$ – матричная евклидова норма). Заметим, что критерий в (3) является частным случаем (4) при $G_t \equiv G$.

Для изучения стохастической оптимальности используется понятие *процесса дефекта* оптимального в среднем управления U^* и *верхней функции*[2] для семейства таких процессов.

Определение 2 *Процессом дефекта для управления U^* на управлении $U \in \mathcal{U}$ называется процесс*

$$\Delta_T(U) := J_T(U^*) - J_T(U), \quad T > 0.$$

Выбирая всевозможные $U \in \mathcal{U}$, будем иметь семейство процессов $\{\Delta_T(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$. Оптимальность управления U^* с точки зрения оценок скорости роста процесса дефекта будет изучаться с использованием следующего определения:

Определение 3 *Пусть g_T – положительная невозрастающая функция, $U \in \mathcal{U}$ – произвольное допустимое управление. Управление U^* называется*

a) *g–оптимальным почти наверное, если* $\limsup\limits_{T\to\infty} g_T\Delta_T(U) \le 0$ *п.н.*

---

[1] *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М., 1977. С. 256.

[2] *Белкина Т. А., Кабанов Ю. М., Пресман Э. Л.* О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора // Теория вероятностей и ее применения. 2003. Т. 48, № 4. С. 661-675.

б) *g–оптимальным в среднем, если* $\limsup\limits_{T\to\infty} g_T E\Delta_T(U) \le 0$.

При $g_T \equiv 1$ управление U^* называется *overtaking* оптимальным в среднем или почти наверное соответственно.

Определение 4 *Неубывающая функция h_T является верхней функцией для семейства процессов дефекта $\{\Delta_T(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$, если для любого $U \in \mathcal{U}$ существует почти наверное конечный момент времени T_0, такой что $\Delta_T(U) \le h_T$ почти наверное для $T > T_0$.*

Очевидно, что если найдена верхняя функция h_T, то для g–оптимальности п.н. управления U^* достаточно положить $g_T = o(1/h_T)$.

Для определения вида управления U^* и доказательства его оптимальности при использовании различных вероятностных критериев нам потребуется ряд предположений, введенных в ранее упомянутой работе Т.А. Белкиной, Ю.М. Кабанова и Э.Л. Пресмана, именуемой в дальнейшем [БКП], где в случае ограниченности всех параметров модели был получен вид верхней функции $h_T = b_0 \ln T$ ($b_0 > 0$ – некоторая константа), неулучшаемый в этих общих предположениях. Одной из целей работы является улучшение этой оценки в более сильных предположениях относительно G_t, таких как ее стремление со временем к нулю, а также получение результатов для случая, когда G_t неограничена.

Предположение $\mathcal{P}.1$ Функции A_t, B_t, Q_t, R_t, $t \ge 0$, таковы, что существует абсолютно непрерывная ограниченная функция Π_t, $t \ge 0$, со значениями в множестве неотрицательно определенных симметричных матриц, удовлетворяющая уравнению Риккати

$$\dot{\Pi}_t + \Pi_t A_t + A_t'\Pi_t - \Pi_t B_t R_t^{-1} B_t'\Pi_t + Q_t = 0\,, \tag{5}$$

и такая, что фундаментальная матрица $\Phi_{\mathcal{A}}(t,s)$ для функции $\mathcal{A}_t := A_t - B_t R_t^{-1} B_t'\Pi_t$ допускает экспоненциальную оценку

$$\|\Phi_{\mathcal{A}}(t,s)\| \le \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-s)}, \qquad s \le t\ , \tag{6}$$

при некоторых положительных константах κ_1, $\kappa_2 > 0$.

Предположение $\mathcal{P}.2$ Существует константа $c_0 > 0$, такая что для любой пары $(x_t, u_t)_{t\le T}$, удовлетворяющей уравнению

$$dx_t = A_t x_t dt + B_t u_t dt\,, \quad x_0 = 0\,,$$

справедливо неравенство

$$\|x_T\|^2 + \int\limits_0^T \|x_t\|^2\, dt \le c_0 \int\limits_0^T (x_t' Q_t x_t + u_t' R_t u_t) dt. \tag{7}$$

Напомним, что фундаментальная матрица $\Phi(t,s)$ для матрицы $\mathcal{A}_t$, $t \geq 0$, является решением задачи

$$\frac{\partial \Phi(t,s)}{\partial t} = \mathcal{A}_t \Phi(t,s), \quad \Phi(s,s) = I\,.$$

Если $\Phi(t,s)$ допускает оценку вида (6), то матрица $\mathcal{A}_t$ называется *экспоненциально устойчивой.*

Существуют различные свойства детерминированных линейных систем управления, которые гарантируют выполнение предположений $\mathcal{P}.1$ и $\mathcal{P}.2$. В разделе 1.3 первой главы был проведен подробный анализ этих характеристик и доказан результат[3], ослабляющий известные условия (связанные с равномерной вполне управляемостью пары (A_t, B_t) и равномерной вполне восстанавливаемостью пары $(A_t, \sqrt{Q_t})$ или же экспоненциальной устойчивостью матрицы A_t, см. [БКП]).

Теорема 1.3 *Если пара (A_t, B_t) стабилизируема, а пара $(A_t, \sqrt{Q_t})$ выявляема, то выполняются предположения $\mathcal{P}.1$ и $\mathcal{P}.2$.*

При этом пара ограниченных матриц–функций (A_t, B_t) (пара $(A_t, \sqrt{Q_t})$) называется *стабилизируемой* (*выявляемой*), если существует ограниченная кусочно–непрерывная матрица K_t (F_t), такая что матрица $A_t + B_t K_t$ $(A_t + F_t \sqrt{Q_t})$ является экспоненциально устойчивой.

Применение вероятностных критериев в задаче линейного регулятора предполагает также и исследование асимптотического поведения решений линейных стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрим n-мерный случайный процесс X_t, $t \geq 0$, описываемый уравнением

$$dX_t = \bar{A}_t X_t dt + G_t dw_t\,, \qquad X_0 = x, \tag{8}$$

где $\bar{A}_t$, G_t, $t \geq 0$, – ограниченные матричные функции времени соответствующих размерностей, $\int\limits_0^\infty \|G_t\|^2\,dt > 0$. В работе доказана

Теорема 1.4 *Предположим, что матрица $\bar{A}_t$ является экспоненциально устойчивой. Тогда для процесса X_t, описываемого уравнением* (8)*, имеет место соотношение*

$$\frac{\|X_T\|^2}{\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt} \to 0 \quad \textit{п.н.}\,, \quad T \to \infty\,.$$

Вторая глава посвящена изучению вероятностных критериев оптимальности для линейных управляемых систем с изменяющимися во времени матрицами G_t коэффициентов возмущающего процесса.

[3]Нумерация всех утверждений соответствует нумерации в тексте диссертации

Пусть выполнены предположения $\mathcal{P}.1$ и $\mathcal{P}.2$. Определим управление U^* в виде

$$U_t^* = -R_t^{-1} B_t' \Pi_t X_t^* \,, \tag{9}$$

где функция Π_t удовлетворяет (5), процесс $\{X_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ задается уравнением

$$dX_t^* = (A_t - B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t) X_t^* dt + G_t dw_t \,, \quad X_0^* = x. \tag{10}$$

В условиях предположений $\mathcal{P}.1$ и $\mathcal{P}.2$ при любом допустимом управлении $U \in \mathcal{U}$ для процесса дефекта имеет место следующая оценка, см. [БКП]:

$$\Delta_T \le c_1 \|X_T^*\|^2 + \mathcal{R}_T \,, \tag{11}$$

где

$$\mathcal{R}_T := -\frac{1}{c_0} \int\limits_0^T \|x_t\|^2 \, dt - 2 \int\limits_0^T x_t' \Pi_t G_t dw_t \,, \tag{12}$$

$c_1 > 0$ – некоторая константа, константа c_0 взята из (7) предположения $\mathcal{P}.2$, $x_t := X_t - X_t^*$, процесс X_t соответствует управлению U_t. Посредством исследования асимптотического поведения слагаемых в правой части (11) устанавливается оптимальность управления U^* с точки зрения различных вероятностных критериев.

В разделе 2.1 рассматривается линейная управляемая система (1)–(2) для случая ограниченной матрицы G_t. Доказана следующая

Теорема 2.1 *Пусть выполнены предположения $\mathcal{P}.1$, $\mathcal{P}.2$ и матрица G_t – ограничена. Тогда управление U^*, задаваемое* (9)–(10),

а) *является решением задачи* (4)*;*

б) *g–оптимально в среднем для любой функции g_T, такой что $g_T \to 0\,, T \to \infty$;*

в) *если выполнено хотя бы одно из двух условий:* $\int\limits_0^{\infty} \|G_t\|^2 \, dt < \infty, \quad \lim\limits_{t\to\infty} \|G_t\| = 0,$

то управление U^* является также и overtaking оптимальным в среднем и g–оптимальным в среднем при $g_T \equiv 1$.

Обратимся к оценке (11). По аналогии с определением 4 вводится определение верхней функции для произвольного процесса $\{Y_T\}_{T\ge 0}$. Так как любая неубывающая неограниченная функция $\hat{h}_T$ будет являться верхней функцией для процесса $\mathcal{R}_T$ (см. [БКП]), то остается найти вид h_T^* – верхней функции для процесса $Y_T = \|X_T^*\|^2$.

Обозначим

$$\alpha_t := e^{-2\kappa_2 t} \int\limits_0^t e^{2\kappa_2 s} \|G_s\|^2 \, ds \,. \tag{13}$$

В диссертации была доказана

Теорема 2.2 *Пусть выполнено предположение $\mathcal{P}.1$. Тогда*

$$h_T^* = c_\alpha \sup_{t \le T} (\alpha_t \ln t) \,,$$

где $c_\alpha > 0$ *– некоторая константа, является верхней функцией для процесса* $\|X_T^*\|^2$*, где* $\{X_t^*\}_{t=0}^\infty$ *задается уравнением* (10)*. Более того, если* $\lim\limits_{T\to\infty} \alpha_T \ln T = 0$*, то* $\|X_T^*\|^2 \to 0$ *с вероятностью единица и верхней функцией для этого процесса является любая положительная константа.*

Отметим, что очевидным следствием теоремы является результат работы [БКП] о верхней функции вида $h_T = b_0 \ln T$, а также

Следствие 2.1 *Пусть выполнено предположение* $\mathcal{P}.1$*. Если* $\lim\limits_{t\to\infty} \|G_t\| = 0$*, то для верхней функции процесса* $Y_T = \|X_T^*\|^2$ *всегда имеет место соотношение* $h_T^* = o(\ln T)$.

При помощи приведенных выше утверждений определяется вид верхней функции h_T для семейства процессов дефекта $\{\Delta_T(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$.

Теорема 2.3 *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2.1 *и* $\hat{h}_T$ *– любая неубывающая неограниченная функция. Тогда функция вида*

$$h_T = \max\{\hat{h}_T, h_T^*\}\,,$$

где h_T^* *– верхняя функция для процесса* $\|X_T^*\|^2$*, определенная в теореме* 2.2*, является верхней функцией для семейства процессов дефекта* $\{\Delta_T(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$.

Также в разделе 2.1 доказывается, что управление U^* может быть оптимальным с точки зрения альтернативного вероятностного критерия.

Определение 5 *Управление* $U^* \in \mathcal{U}$ *будем называть оптимальным п.н. на бесконечном интервале времени или оптимальным в смысле обобщенного стохастического долговременного среднего, если оно является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U)}{\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \text{ с вероятностью единица.} \qquad (14)$$

В этом определении обобщается хорошо известное понятие *стохастического долговременного среднего*, или *эргодического критерия*[4]. С использованием представления (11) и теоремы 1.4 была доказана

Теорема 2.4 *Пусть выполнены предположения* $\mathcal{P}.1$, $\mathcal{P}.2$ *и* $\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt \to \infty\,, T\to\infty$. *Тогда управление* U_t^**, задаваемое* (9)–(10)*, является решением задачи* (14).

В разделе 2.2 рассматривается случай неограниченной матрицы G_t, т.е. при возрастающем со временем влиянии шума на динамику системы.

Предположение $\mathcal{G}$. Матрица G_t, $t \geq 0$, такая что

1. $\|G_t\|$ – монотонна, $\|G_t\| \to \infty$, $t \to \infty$;

[4] *Arapostathis A., Borkar V. S., Ghosh M. K.* Ergodic Control of Diffusion Processes. Cambridge, 2012. P. 84.

2. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{d\ln\|G_t\|}{dt} = c_G\,,\;\; c_G \geq 0$ – константа.

Для ситуации $\|G_t\| \to \infty$, $t \to \infty$, традиционное понятие долговременного среднего теряет смысл, так как приводит к неограниченному значению этого критерия оптимальности при разных $U \in \mathcal{U}$. Мы будем использовать ранее введенное понятие оптимальности в среднем по новому критерию (4), а также дополнительное

Определение 6 *Управление $U^* \in \mathcal{U}$ будем называть слабо оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени, если существует число $C_J > 0$, такое что*

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{EJ_T(U^*)}{\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt} \leq \limsup_{T\to\infty}\frac{EJ_T(U)}{\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt} + C_J \quad \textit{для любого}\; U \in \mathcal{U}\,. \tag{15}$$

В диссертации доказана

Теорема 2.5 *Пусть выполнены предположения $\mathcal{P}$.1, $\mathcal{P}$.2 и $\mathcal{G}$. Тогда управление U^*, задаваемое* (9)–(10), *является*

а) *решением задачи* (4), *если в предположении $\mathcal{G}$ имеет место $c_G = 0$;*

б) *решением задачи* (15), *если в предположении $\mathcal{G}$ имеет место $c_G > 0$.*

Асимптотическое исследование составляющих представления (11) приводит к нахождению вида верхней функции h_T для семейства процессов дефекта $\{\Delta_T(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$.

Теорема 2.6 *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5. *Тогда верхняя функция h_T для семейства процессов дефекта $\{\Delta_T(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ имеет вид*

$$h_T = \max\{h_T^*, \bar{h}_T\}\,,$$

где функции $h_T^* = c^*\|G_T\|^2\ln T$ и $\bar{h}_T = \bar{c}\|G_T\|^{2(1+\delta)}$, при этом c^*, $\bar{c} > 0$ – некоторые константы, $\delta > 0$ – как угодно малое число.

В разделе 2.3 был дополнительно исследован традиционный критерий долговременного среднего и показана его неэффективность в случае переменной матрицы G_t параметров возмущающего процесса.

В **третьей главе** рассматривается линейная управляемая экономическая система с квадратичным целевым функционалом, включающим дисконтирование, которое является отражением временных предпочтений экономических агентов. Для анализа такой системы применяются результаты главы 2. В разделе 3.1 проводится анализ понятия «временные предпочтения». Временные предпочтения определяют приоритетность в получении выигрышей (или потерь) для разных моментов времени. Предполагается, что временные предпочтения могут быть выражены с помошью дисконтирующей функции $f_t > 0$ и задана ставка дисконтирования $\phi_t = -\dot{f}_t/f_t$ (знак «$\dot{}$» – производная по времени). Положительным временным предпочтениям (приоритету настоящего) соответствует убывающая f_t ($\phi_t > 0$), f_t возрастает для отрицательных временных предпочтений (приоритет будущего, $\phi_t < 0$), f_t постоянна для нулевых (нейтральность к фактору времени), т.е. $\phi_t = 0$.

Раздел 3.2 посвящен исследованию стохастической оптимальности для линейных систем управления с дисконтированием. Рассмотрим линейную управляемую экономическую систему, функционирующую в условиях неопределенности. Состояние системы определяет n-мерный случайный процесс $\tilde{X}_t$, $t \geq 0$,

$$d\tilde{X}_t = A\tilde{X}_t dt + B\tilde{U}_t dt + G dw_t\,, \qquad \tilde{X}_0 = \tilde{x}, \tag{16}$$

где начальное состояние $\tilde{x}$ неслучайно; w_t, $t \geq 0$, – d-мерный стандартный винеровский процесс; $\tilde{U}_t$, $t \geq 0$, – допустимое управление, или k-мерный случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{w_s,\, s \leq t\}$, такой что уравнение (16) имеет решение; A, B, G – матрицы таких размерностей, при которых (16) имеет смысл, $\|G\| > 0$. Множество допустимых управлений обозначим $\tilde{\mathcal{U}}$.

Определим целевой функционал (с.в.), который учитывает потери из–за отклонения случайного (возмущенного) процесса и некоторого допустимого управления от $\tilde{x}_0$ и $\tilde{u}_0$ соответственно (предполагаем, что $A\tilde{x}_0 + B\tilde{u}_0 = 0$), а также изменяющуюся во времени субъективную оценку этих потерь (т.е. временные предпочтения):

$$\tilde{J}_T(\tilde{U}) = \int_0^T f_t[(\tilde{X}_t' - \tilde{x}_0')Q(\tilde{X}_t - \tilde{x}_0) + (\tilde{U}_t' - \tilde{u}_0')R(\tilde{U}_t - \tilde{u}_0)]\,dt, \tag{17}$$

где $\tilde{U} = \{\tilde{U}_t\}_{t\leq T}$ – допустимое управление $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$, $Q \geq 0$, $R > 0$ – симметричные матрицы, f_t – дисконтирующая функция.

Предположение $\mathcal{D}$. Дисконтирующая функция $f_t > 0$, $t \geq 0$, $f_0 = 1$,
1) монотонна, дифференцируема; в случае возрастающей f_t при $t \to \infty$ функция $f_t \to \infty$, для убывающей f_t при $t \to \infty$ функция $f_t \to 0$; 2) ставка дисконтирования $\phi_t = -\dot{f}_t/f_t$ – ограниченная функция при любом $t \geq 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_t = c_\phi$, где c_ϕ – константа.

Предположению $\mathcal{D}$ удовлетворяют, например, традиционное экспоненциальное дисконтирование вида $f_t = e^{-\gamma t}$ ($\gamma > 0$), «гиперболическая» дисконтирующая функция $f_t = 1/(1+\theta t)^{\theta_1/\theta}$ ($\theta > 0$) и др.

Для изучения поведения системы управления (16)–(17) при $T \to \infty$ вводится определение оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени.

Определение 7 *Управление $\tilde{U}^* \in \tilde{\mathcal{U}}$ будем называть оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени в системе с дисконтированием, если оно является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{E\tilde{J}_T(\tilde{U})}{\int\limits_0^T f_t\,dt} \to \inf_{\tilde{U}\in\tilde{\mathcal{U}}}. \tag{18}$$

При нормировке критерия в (18) учитывается порядок изменения дисконтирующей функции, а само отношение интерпретируется как ожидаемые совокупные потери на единицу накопленного дисконта. Также сформулируем

Определение 8 *Управление $\tilde{U}^* \in \tilde{\mathcal{U}}$ будем называть слабо оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени в системе с дисконтированием, если существует число $C_J > 0$, такое что*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{E\tilde{J}_T(\tilde{U}^*)}{\int\limits_0^T f_t\,dt} \le \limsup_{T\to\infty} \frac{E\tilde{J}_T(\tilde{U})}{\int\limits_0^T f_t\,dt} + C_J \quad \text{для любого } \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}. \tag{19}$$

В силу особенностей поведения матриц f_tQ и f_tR (стремление к нулю или неограниченный рост) в функционале (17), стандартные методы исследования системы (16)–(17) при $T \to \infty$ неприменимы. Путем замены переменных исходная система управления сводится к системе с затухающим, нарастающим или постоянным (в зависимости от вида временных предпочтений) возмущением:

$$X_t := \sqrt{f_t}(\tilde{X}_t - \tilde{x}_0)\,, \quad U_t := \sqrt{f_t}(\tilde{U}_t - \tilde{u}_0). \tag{20}$$

Тогда динамика процесса $\{X_t\}_{t=0}^\infty$ будет описываться уравнением

$$dX_t = (A - (1/2)\phi_t \cdot I)X_t dt + BU_t dt + \sqrt{f_t}G dw_t\,, \qquad X_0 = \tilde{x} - \tilde{x}_0, \tag{21}$$

Функционал (17) в новых обозначениях примет вид

$$J_T(U) = \int_0^T (X_t'QX_t + U_t'RU_t)\,dt. \tag{22}$$

Очевидно, что $\tilde{J}_T(\tilde{U}) = J_T(U)$.

Нетрудно заметить, что система управления (21)–(22) оказывается частным случаем системы (1)–(2). При этом задачи (18) и (4)(задачи (19) и (15)) – эквивалентны. С помощью обратного преобразования к (20) полученные утверждения об оптимальности в среднем (теоремы 2.1 и 2.5) можно переформулировать для исходной системы управления с дисконтированием.

Теорема 3.1 *Пусть выполнено предположение $\mathcal{D}$. Кроме того, предположим, что параметры системы (16)–(17) таковы, что для $A_t = A - (1/2)\phi_t \cdot I$, $B_t \equiv B$, $Q_t \equiv Q$ и $R_t \equiv R$ выполнены предположения $\mathcal{P}.1$ и $\mathcal{P}.2$. Тогда управление вида*

$$\tilde{U}_t^* = -R^{-1}B'\Pi_t(\tilde{X}_t^* - \tilde{x}_0) + \tilde{u}_0\,, \tag{23}$$

где функция Π_t удовлетворяет (5), процесс $\{\tilde{X}_t^*\}_{t=0}^\infty$ задается уравнением

$$d\tilde{X}_t^* = (A - BR^{-1}B'\Pi_t)(\tilde{X}_t^* - \tilde{x}_0)dt + G dw_t\,,\ \tilde{X}_0^* = \tilde{x}, \tag{24}$$

является

а) *решением задачи (18), если в предположении $\mathcal{D}$ имеет место $c_\phi \ge 0$;*

б) *решением задачи (19), если в предположении $\mathcal{D}$ имеет место $c_\phi < 0$;*

в) *overtaking оптимальным в среднем для случая положительного дисконтирования, т.е. при* $f_t \to 0\,,\ t \to \infty$.

Для нахождения вида верхней функции для семейства $\{\Delta_T(\tilde U)\}_{\tilde U \in \tilde{\mathcal U}}$ как оценки риска от применения оптимального в среднем управления $\tilde U^*$ (риск возникает вследствие стохастической природы целевого функционала) воспользуемся теоремами 2.3 и 2.6, положив $G_t = \sqrt{f_t}G$.

Теорема 3.2 *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и* $\tilde h_T^{(0)}$ *– любая неубывающая неограниченная функция. Тогда верхняя функция* $\tilde h_T$ *для семейства процессов дефекта* $\{\Delta_T(\tilde U)\}_{\tilde U \in \tilde{\mathcal U}}$ *имеет вид*

$$\tilde h_T = \max\{\tilde h_T^{(0)}, \tilde h_T^{(1)}, \tilde h_T^{(2)}\}\,,$$

где функции $\tilde h_T^{(1)} = \tilde c_1 \sup\limits_{t \le T}(f_t \ln t)$ *и* $\tilde h_T^{(2)} = \tilde c_2 f_T^{1+\beta}$*, при этом* $\tilde c_1, \tilde c_2 > 0$ *– некоторые константы,* $\beta > 0$ *– сколь угодно малое число.*

Теорема 2.4 применяется для нахождения условий оптимальности п.н. в задаче с дисконтированием. Дадим следующее определение:

Определение 9 *Управление* $\tilde U^* \in \tilde{\mathcal U}$ *будем называть оптимальным почти наверное в системе с дисконтированием, если оно является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\tilde J_T(\tilde U)}{\int\limits_0^T f_t\,dt} \to \inf_{\tilde U \in \tilde{\mathcal U}} \quad \text{с вероятностью единица.} \tag{25}$$

Теорема 3.3 *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и функция* f_t *соответствует положительным или нулевым временным предпочтениям. Если* $\int\limits_0^T f_t\,dt \to \infty\,,\ T \to \infty\,,$ *то управление* $\tilde U^*$*, задаваемое* (23)–(24)*, является решением задачи* (25).

В разделе 3.3 проведен анализ результатов применения оптимальных стратегий управления с целью стабилизации траекторий процесса $\tilde X_t$ вблизи $\tilde x_0$.

В **четвертой главе** рассматриваются три модели управляемых экономических систем: модели управления ценой в экономике с аддитивной (раздел 4.1) и мультипликативной (раздел 4.2) неопределенностью, а также модель управления выбросами вредных веществ (раздел 4.3). При анализе этих моделей применяются методы и подходы, развитые в третьей главе.

В **заключении** излагаются основные выводы работы.

Заключение

Диссертационное исследование было посвящено изучению стохастической оптимальности (оптимальности с точки зрения вероятностных критериев) в линейных управляемых, в том числе экономических, системах на бесконечном интервале времени. Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Для систем с возмущением введен новый критерий оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени, обобщающий традиционное понятие долговременного среднего и учитывающий степень влияния шумовых воздействий на динамику линейной управляемой системы – так называемое обобщенное долговременное среднее.
2. Показано, что вид управления, оптимального по этому критерию, совпадает с хорошо известным установившимся законом управления в виде линейной обратной связи по состоянию в задаче со стандартными условиями на параметры возмущений и найдены достаточные условия существования этого управления, ослабляющие ранее известные требования.
3. Найдены условия на параметры возмущающего процесса, при которых имеют место другие виды оптимальности в среднем, определяемые как асимптотическая неположительность математического ожидания процесса дефекта при наличии или отсутствии нормировки (в последнем случае такой вид оптимальности носит название *overtaking* оптимальности в среднем).
4. Для семейства процессов дефекта оптимального в среднем управления (по новому критерию) получен вид верхней функции, обобщающий и улучшающий ранее известные оценки; с использованием результатов о верхних функциях процесса дефекта доказана оптимальность с точки зрения вероятностных критериев, включающих соответствующие нормировки.
5. Получен результат об асимптотическом поведении решения линейного стохастического дифференциального уравнения с экспоненциально устойчивой матрицей и с помощью него уставновлена асимптотическая оптимальность управления в смысле обобщенного стохастического долговременного среднего.
6. Для линейных управляемых систем с дисконтированием предложен критерий, основанный на верхнем пределе от ожидаемых потерь на единицу накопленного дисконта, а также его стохастический аналог.
7. Показано, что путем линейной замены переменных система, включающая временные предпочтения, может быть приведена к линейной управляемой системе с изменяющимися параметрами возмущений, но постоянными матрицами в целевом функционале; при этом соответствующие критерии, включающие нормировку в виде накопленного дисконта, преобразуются в обобщенное долговременное среднее или его стохастический аналог.
8. С учетом указанной взаимосвязи между системами управления двух различных видов, а также полученных результатов для линейной системы с переменными

параметрами возмущений, получены соответствующие результаты для систем с дисконтированием, а именно: определено оптимальное в среднем управление на бесконечном интервале времени, найден вид верхней функции для семейства процессов дефекта и установлена оптимальность с точки зрения обобщенного стохастического долговременного среднего в задаче с дисконтированием.
9. Разработаны и исследованы с точки зрения вероятностных критериев три экономические модели, представимые в виде линейных управляемых систем.

Публикации по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. *Белкина Т.А., Паламарчук Е.С.* О стохастической оптимальности для линейного регулятора с затухающими возмущениями // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 4. – С. 110-128. (1,2 п.л., доля автора – 0,6 п.л.)
2. *Паламарчук Е.С.* Оценка риска в линейных экономических системах при отрицательных временных предпочтениях // Экономика и математические методы. – 2013. – Т. 49, № 3. – С. 99-116. (1,12 п.л.)

Статьи в других изданиях:

3. *Паламарчук Е.С.* Управление процессом сходимости цены к равновесному значению при наличии случайных факторов // Анализ и моделирование экономических процессов: сборник статей / под ред. В.З. Беленького. – М.: ЦЭМИ, 2010. – Вып. 7. – С. 123-136. (0,85 п.л.)
4. *Паламарчук Е.С.* Управление динамикой равновесной цены в экономике с мультипликативной неопределенностью // Анализ и моделирование экономических процессов: сборник статей / под ред. В. З. Беленького. – М.: ЦЭМИ, 2011. – Вып. 8. – С. 75-88. (0,85 п.л.)

Публикации тезисов докладов научных конференций:

5. *Паламарчук Е.С.* Вероятностные свойства оптимального управления для линейного регулятора с дисконтированием // XVII Всероссийская школа–коллоквиум по стохастическим методам: науч. доклады. Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2010. – Т. 17, Вып. 3. – С. 372-373. (0,1 п.л.)
6. *Паламарчук Е.С.* О стохастической оптимальности в модели линейного регулятора с дисконтирующей функцией // XI Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике: науч. доклады. Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2010. – Т. 17, Вып. 5.– С. 754-755. (0,1 п.л.)

7. *Паламарчук Е.С.* О стохастической оптимальности в задаче линейного регулятора с вырождающимся возмущением // XII Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике: науч. доклады. Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2011. – Т. 18, Вып. 5. – С. 795-796. (0,1 п.л.)
8. *Паламарчук Е.С.* Об усиленном законе больших чисел для решения стохастического дифференциального уравнения // Международная конференция "Теория вероятностей и ее приложения" , посвященная столетию со дня рождения Б.В. Гнеденко, Москва, 26-30 июня 2012 года: тезисы докладов / под ред. А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева. – М.: ЛЕНАНД, 2012. – С. 57-58. (0,12 п.л.)
9. *Паламарчук Е.С.* Об оптимальности в среднем и почти наверное в задаче линейного регулятора с возможным затуханием случайных возмущений // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD 2012'). Шестая международная конференция: материалы в 2 т. / под общ. ред. С.Н. Васильева, А.Д. Цвиркуна. – М.: ИПУ РАН, 2012. – Т. 2. – С. 331-333. (0,2 п.л.)
10. *Паламарчук Е.С.* Стохастическая оптимальность для линейного регулятора с нарастающим возмущением // Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах (УТЭОСС-2012): материалы науч. конф. / под ред. С.Н. Васильева, О.В. Каляева, Д.А. Новикова, Г.Г. Себрякова. – СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ Электроприбор», 2012. – С. 305-307. (0,2 п.л.)
11. *Паламарчук Е.С.* Об оценке риска в одной задаче экологической экономики // Системный анализ в экономике-2012: материалы науч.-практ. конф. – М.: ЦЭМИ, 2012. – Секция 2. – С. 130-133. (0,25 п.л.)
12. *Паламарчук Е.С.* On the strong law of large numbers for some stochastic processes [Электронный ресурс] // Международный молодежный научный форум "ЛОМОНОСОВ-2013": материалы / отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов [и др.]. – М.: МАКС Пресс, 2013. – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. – Систем. требования: ПК с процессором 486+; Windows 95; дисковод DVD-ROM; Adobe Acrobat Reader. (0,12 п.л.)
13. *Паламарчук Е.С.* Мониторинг решения задачи стабилизации линейных систем с дисконтированием // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD 2013'). Седьмая международная конференция: материалы в 2 т. / под общ. ред. С.Н. Васильева, А.Д. Цвиркуна. – М.: ИПУ РАН, 2013. – Т. 2. – С. 432-435. (0,25 п.л.)

Паламарчук Екатерина Сергеевна

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛЯМ С ВРЕМЕННЫМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ

Специальность 08.00.13 – «Математические и инструментальные методы экономики»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Заказ № 37 Объем 1 п.л. Тираж 100 экз.

ЦЭМИ РАН