ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
«ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

На правах рукописи

Ильинский Дмитрий Геннадиевич

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ССУДО-СБЕРЕГАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ИПОТЕЧНОГО КРЕДИТОВАНИЯ

Специальность 08.00.13 «Математические и инструментальные методы экономики»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата экономических наук

Научный руководитель:
академик РАН, д.э.н.
Полтерович Виктор Меерович

Москва, 2017

Оглавление

Введение

Первые ссудно-сберегательные программы возникли ещё на заре человечества — в Китае и Индии существовали так называемые общества взаимного кредитования. Подобные кооперативы широко распространены в развивающихся странах и до сих пор встречаются в передовых экономиках. Особую роль они играют на начальных этапах формирования ипотечного рынка, когда отсутствуют кредитные истории, изъятие залога при невозврате кредита затруднено, и поэтому кредитование небогатых заёмщиков связано с большими рисками.

Актуальность темы диссертационного исследования. В настоящее время в России в числе важных задач социально-экономического развития стоит создание формирование рынка доступного жилья. При этом большинство жителей РФ (69%) не готовы воспользоваться имеющимися на рынке ипотечными кредитами, хотя 47% жителей нуждаются в улучшении жилищных условий (см. Почти 70% россиян оказались... (2015)).

Одним из ключевых инструментов решения этой задачи предусматривается развитие ипотечного жилищного кредитования. Основным способом обеспечения доступности ипотечных кредитов является государственная поддержка отдельных категорий граждан, в первую очередь молодых семей, приобретающих жилье в ипотеку.

Вопрос, который здесь следует задать — какую форму ипотечного кредитования оптимально выбрать для решения данной задачи?

Мировая практика показывает, что практически во всех странах мира исходной точкой развития массовой ипотеки служили ссудо-сберегательные институты (ССИ). Это организации, реализующие контракты со своими членами на предоставление кредита для приобретения или реконструкции жилья, причем получение кредита обусловлено не только залогом и обязательствами заёмщика по обслуживанию долга, но и предварительным выполнением плана накопления сбережений.

Анализ эволюции ипотеки в развитых странах, в странах Восточной Европы и в России позволяет сделать вывод о том, что ССИ являются эффективным трансплантатом в условиях рисковой институциональной среды, в обществах с низким уровнем ссудо-сберегательной культуры, где основные слои имеют низкие доходы, не располагают кредитными историями, и поэтому не имеют доступа к банковским кредитам (см. Полтерович, Старков (2007-2)).

Для выбора эффективной стратегии заимствования институтов необходимо понимать, как именно и в каком формате вводить ССИ. Для этого необходима динамическая модель, которая позволяет не только варьировать значения экзогенных параметров и управляющих переменных, но и позволит определить устойчивость данной системы при резком изменении параметров.

Кроме того, интересен процесс перехода от ССИ к более современным формам ипотечного кредитования. Как именно происходит процесс вытеснения этого института? Это ещё один важный вопрос, на который должна ответить поставленная модель.

Имеющиеся теоретические исследования ссудо-сберегательных программ не позволяют в полной мере исследовать динамические процессы, возникающие при их работе. Таким образом, значимость данной проблемы в совокупности с не достаточной теоретической проработанности свидетельствуют о том, что тема диссертационной работы весьма актуальна.

Степень разработанности проблемы. Несмотря на обилие работ по ссудо-сберегательным программам, относительно мало работ посвящено исследованию модели ССП.

При этом как правило предполагается, что параметры накопления и кредитования не меняются со временем и анализируются соответствующие стационарные режимы (см. Besley (1994), Laux (1978), Laux (1999), Laux (2002), Laux (2005), Schlueter et al (2015)). Статической является и модель, разработанная в монографии (Полтерович, Старков (2007)).

Динамический подход используется редко, и при этом жизнь участника ограничивается одним-тремя периодами (см. статьи Scholten (2000), Plaut et al (2004)).

Объектом исследования является рынок ипотечного кредитования.
Предметом исследования являются динамические процессы, возникающие при формировании и работе ссудо-сберегательных программ ипотечного кредитования. Исследуется устойчивость данной системы, в том числе и при внешних и внутренних изменениях параметров, взаимосвязи между двумя разными программами, а также между ССП и коммерческой ипотекой.

Область исследования соответствует требованиям паспорта специальности ВАК 08.00.13 «Математические и инструментальные методы экономики», отрасль наук экономика,

- 1.2. Теория и методология экономико-математического моделирования, исследование его возможностей и диапазонов применения: теоретические и методологические вопросы отображения социально-экономических процессов и систем в виде математических, информационных и компьютерных моделей.

• 1.4. Разработка и исследование моделей и математических методов анализа микроэкономических процессов и систем: отраслей народного хозяйства, фирм и предприятий, домашних хозяйств, рынков, механизмов формирования спроса и потребления, способов количественной оценки предпринимательских рисков и обоснования инвестиционных решений.

• 1.9. Разработка и развитие математических методов и моделей анализа и прогнозирования развития социально-экономических процессов общественной жизни: демографических процессов, рынка труда и занятости населения, качества жизни населения и др.

Целью диссертационного исследования является разработка и исследование моделей ссудо-сберегательных программ ипотечного кредитования.

Для достижения этой цели поставлены и решены следующие **задачи**:

1. сформулировать основные проблемы и вопросы, возникающие у потребителя, государства и банка к ссудо-сберегательным программам, выявлены требования и ограничения, накладываемые агентами на модель;

2. разработать динамическую модель ссудо-сберегательных программ, удовлетворяющую поставленым требованиям и ограничениям;

3. проанализировать поведение показателей модели в зависимости от исходных параметров;

4. исследовать переходный период от ССП к более передовым формам ипотечного кредитования.

Теоретическая и методологическая основа диссертационного исследования.

Теоретической и методологической основой данного исследования послужили работы отечественных и зарубежных ученых, разрабатывающих модели ипотечного кредитования (Т. Бесли, Х. Лаукс, У. Шольтен, Т. Шультер, С. Сиеверс, Т. Хауртам-Вендельс, И.И. Гасанов, Ф.И. Ерешко, В.М. Полтерович, О.Ю. Старков)

В рамках создания и анализа модели существенно используются методы математического моделирования, развитые в работах отечественных и зарубежных экономистов, а также компьютерные расчёты.

Научная значимость исследования реализована в следующих результатах:

- Предложена динамическая модель ссудо-сберегательной программы ипотечного кредитования. Она предназначена для исследования, оценки и выбора параметров накопления, кредитования и субсидирования участников ипотечных институтов, где режим кредитования вкладчиков зависит от параметров выполненной вкладчиком программы накопления средств. Модель позволяет исследовать переходную динамику, возникающую при изменении экзогенных параметров, в то время как именно такие изменения могут привести к кризису системы ССП.

- Исследованы (сильно) финансово устойчивые ссудо-сберегательные траектории; получены необходимые и достаточные условия на параметры при которых данная траектория финансово устойчива.

- Проведены экспериментальные исследования ссудо-сберегательных траекторий при изменении экзогенных параметров. Результаты исследования показывают, что существуют ССП, которые обеспечивают устойчивую работу ссудо-сберегательных счетов в широком диапазоне изменения внешних условий и параметров.

- На основе данной модели было предложено рассматривать наборы (линейки) тарифных планов, описывающие переход от субсидируемых ипотечных планов к полностью коммерческим. Для каждого из участников системы (потребитель, государство и банк) вводится полезность от использования данной линейки тарифных планов. Определяются полезные свойства линейки: устойчивость, Парето-эффективность, наличие достаточного количества планов, монотонность тарифных планов по параметрам.

- На базе существующих тарифных планов ссудо-сберегательной ипотеки и коммерческого кредита построен конкретный пример линейки, обладающий всеми указанными свойствами.

- Исследованы взаимосвязи между имеющимися полезными свойствами линейки в широком диапазоне параметров. Результаты позволяют существенно упростить нахождение эффективных (Парето-оптимальных) линеек.

Теоретическая значимость исследования. В теоретическом плане данная работа является развитием моделей ипотечного кредитования. Созданная модель вносит вклад в исследование методов взаимодействия между потребителем, банком и государством. Сформулированные в работе выводы по созданию модели ссудо-сберегательных программ могут составить теоретическую основу для выработки стратегии развития государства в сфере ипотечного кредитования.

В частности, модель предназначена для исследования, оценки и выбора параметров накопления, кредитования и субсидирования участников ипотечных институтов, где режим кредитования вкладчиков зависит от параметров выполненной вкладчиком программы накопления средств. Модель нетрудно модифицировать и дополнить так, чтобы она учитывала операционные издержки, потери по просроченным и дефолтным кредитам, издержки на резервирование и страхование.

Практическая значимость исследования состоит в том, что полученные результаты и практические рекомендации могут применяться для создания и улучшения ссудо-сберегательных программ ипотечного кредитования. Самостоятельное практическое значение имеют:

- разработка программы для расчёта параметров модели с помощью ЭВМ (свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2012617869);

- методика расчёта полезностей всех участников процесса, поскольку разработанная модель позволяет находить оптимальные решения и может стать основой для автоматизации расчетов перед запуском данной системы;

- модель прогнозирования состояния системы в будущем с учётом различных процессов (падения притоков вкладчиков, постепенное изменение рынка ипотеки).

В частности, материалы диссертации могут быть использованы следующими группами пользователей:

1. непосредственно стройсберкассами и банками для разработки планов накопления и кредитования;

2. Министерством финансов для разработки и анализа правил начисления премий вкладчикам на накопления;

3. надзорным органом (Центральным банком) для анализа и утверждения тарифных планов, предлагаемых стройсберкассами и банками населению, и разработки нормативов финансовой устойчивости стройсберкасс.

Отметим, что при разработке так называемой «Народной ипотеки» — системы спецсчетов, внедренной в Краснодарском крае (2011-2016) в рамках жилищно-накопительных счетов (Козлов, Филатова (2011)), (Артемова (2012)), а затем (с небольшими модификациями) и в Ростовской области (Народная ипотека на Дону... (2013)),(За февраль в донском регионе... (2015)), была использована модель, близкая к описанной в работе. Похожие модели были использованы и в аналогичных программах в, Башкортостане (В Башкирии собираются... (2014)),(В Башкирии внедряют... (2014)),(С начала года... (2015)) и Ханты-Мансийском АО (Накопительная ипотека (2015)). Объявлено о запуска аналогичной программы в Калужской области (В Калужской области... (2014)).

Апробация и внедрение результатов исследования.

Основные теоретические положения и результаты диссертационного исследования прошли апробацию и получили положительную оценку на различных практических конференциях, форумах:

• *международные* Второй Российский экономический конгресс, 17-21 февраля, 2013 г., Суздаль;

XIV Международная научная конференции ГУ-ВШЭ по проблемам развития экономики и общества, 2-5 апреля 2013 г., Москва;

XV Международная научная конференции ГУ-ВШЭ по проблемам развития экономики и общества, 1-4 апреля 2014 г., Москва,

XVI Международная научная конференции ГУ-ВШЭ по проблемам развития экономики и общества, 1-4 апреля 2015 г., Москва,

• *региональные*

Банки. Процессы. Стандарты. Качество., 19-22 марта 2014 г., Уфа, Республика Башкортостан;

Методологические проблемы моделирования социально-экономических процессов, 14-15 ноября 2013 г., Уфа, Республика Башкортостан;

Молодая экономика: экономическая наука глазами молодых ученых, 10 декабря 2014 г., Москва

Системное моделирование социально-экономических процессов, Международная научная школа-семинар имени академика С.С. Шаталина, 2-8 октября 2015 г., Казань

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ, в том числе 3 — в изданиях, рекомендованных ВАК. Общий объём принадлежащих лично соискателю опубликованных работ по теме диссертации составляет — 2 п.л.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 104 страницах, имеет 8 рисунков, 6 таблиц. Список литературы включает 47 наименований.

Первая глава посвящена истории вопроса, а также развитию ипотечного кредитования в России. Во второй главе строится динамическая модель ССП, и исследуются вопросы устойчивости этой модели. В третьей главе ставится вопрос о переходном процессе от ССП к коммерческим кредитам и описывается обобщение модели для анализа этого процесса. В четвёртой главе производится анализ обобщённой модели.

1. Ссудо-сберегательные институты

1.1 История вопроса. Важность ссудо-сберегательных институтов.

Вообще говоря, набор институтов жилищного кредитования широк и включает, в частности, ссудо-сберегательные институты, ссудо-сберегательную ассоциацию, ипотечный банк, сберегательный банк и агентство вторичного рынка (которое проходит три стадии эволюции — торговлю первичными закладными, облигациями и вторичными бумагами на основе комбинаций кредитов).

В конце 17 — начале 18 века ссудо-сберегательные институты послужили основой развития массовой ипотеки и исходной точкой быстрой эволюции жилищных финансов во многих европейских странах. В частности, в Англии (70 лет, до преобразования в 1845 году в розничные банки, специализирующиеся на кредитовании жилья), в США (60 лет, до вытеснения в 1890-х годах ссудо-сберегательными ассоциациями). В Германии первые стройсбер-кооперативы возникли в 1885 г. Спустя 39 лет в 1924 г. в Германии возникли стройсберкассы, играющие в этой стране важнейшую роль и по сей день. В 1925 г. германский опыт был перенесен в Австрию, а в 1965 г. — во Францию. Особую роль они сыграли в после войны, в период экономических трудностей, упадка государственных институтов и кризиса доверия. По мере возникновения кредитного рынка в 1980-х их роль начала падать.

На постсоветском пространстве в начале 90-х годов также возникла проблема становления жилищного кредитования. И тут страны использовали разные технологии. В России и Польше была предпринята попытка использовать самые передовые институты, созданные по американскому образцу. Были предприняты многочисленные попытки, потрачены сотни миллионов долларов, а результаты нельзя считать удовлетворительными. Наименее удачными были проекты создания вторичного рынка закладных, а наибольшую способность к расширению рынка жилищных кредитов продемонстрировали спонтанно возникшие ссудо-сберегательные институты (кооперативы), и это — несмотря на отсутствие адекватного законодательства и государственной поддержки на федеральном уровне. Главные причины неудач ипотечного рынка в Польше и России — как и в других развивающихся странах мира — в недооценке роли государства, с одной стороны, и культурных и институциональных препятствий, — с другой, наивная уверенность в том, что за короткое время могут быть созданы условия для развития передовых форм кредитования.

Вместе с тем, Чехия и Словакия поддерживали обе формы ипотеки — банки и стройсберкассы — наиболее подходящие для внедрения в несовершенную институциональную среду. Словакия ввела стройсберкассы в 1992 г., Чехия — в 1993 г. В Чехии в первый же год их членами стали 2% жителей, в Словакии 0.9%.Через 10 лет работы уже 44.6% чехов и 50% словаков оказались вовлечены в систему стройсбережений. На начальном этапе стройсберкассы в Чехии и Словакии намного превзошли все остальные финансовые институты по числу выдаваемых кредитов.

Таким образом, анализ эволюции ипотеки в развитых странах, в странах Восточной Европы и в России позволяет сделать вывод о важности ссудосберегательных программ в условиях формирования массовой ипотеки.

Описание ссудо-сберегательных институтов Какие же черты ССИ делают их необходимым звеном в процессе создания ипотеки? ССИ нередко объединяют тех, кто не имеет доступа к формальному кредитному рынку из-за отсутствия надежной информации о доходе и способности к долгосрочной выплате долгов.

ССИ характеризуются двумя принципиальными отличиями от других ипотечных институтов. Во-первых, выдача кредита в рамках этих программ обусловлена регулярным накоплением вкладчиком первоначального взноса в течение достаточно длительного времени (обычно 4-6 лет). Тот, кто сумел выполнить план сбережений, тем самым доказал, что имеет стабильный доход и умеет контролировать свое финансовое положение, а потому с большой вероятностью будет надежным заёмщиком. Являясь школой ссудносберегательного поведения и фактически источником кредитных историй для широких масс, ССИ создают условия для развития банковской ипотеки. Последняя, как правило, существует одновременно с ССИ, но начинает быстро развиваться лишь после того, как ССИ привлекут достаточное на кредитный рынок число заёмщиков.

Во-вторых, регулярное накопление стимулируется субсидиями из государственного (федерального или регионального) бюджета — премиями на стройсбережения. При этом вкладчики, нарушающие план накопления, лишаются премий, а при многократных нарушениях исключаются из программы вовсе. Благодаря этим особенностям а) ССИ доступны для граждан с невысокими доходами; б) ненадежные заёмщики выявляются уже на стадии накопления и не получают кредита; в) проценты по депозитам и кредиту могут быть достаточно низкими (обычно, 2-3% и 5-6%), так чтобы эффективный процент по депозитам с учетом премии оказался на достаточно высоком уровне, а ставка по кредиту привлекала вкладчиков и обеспечивала достаточно высокую маржу банку.

Ссудо-сберегательные программы (ССП) могут быть реализованы в рамках специализированных институтов — стройсберкасс или строительно-сберегательных кооперативов, либо в форме специальных жилищных накопительных счетов в банке. Хотя последние в практике других стран используются сравнительно редко, исследование, проведенное в (Полтерович, Старков (2011)), показало, что именно эта форма имеет наибольшие шансы на успех в современной России, поскольку её внедрение связано с наименьшим сопротивлением заинтересованных игроков.

1.2 Требования к модели ССП

Качество работы ССП зависит от сочетания значений экзогенных параметров и управляющих переменных. К первым (экзогенным параметрам) относятся: приток вкладчиков[1], процент по внешним кредитам, ставка резервирования, норма страховых отчислений, частота нарушений планов накопления, вероятность невыплаты кредита, доля «друзей» вкладчиков[2], распределение помесячных взносов вкладчиков, цены предпочитаемых ими квартир. К управляющим переменным относятся: ставки по депозитам и кредитам, сроки накопления и кредитования, ставка премии на сбережения, предельный уровень премии в месяц. Управляющие переменные следует выбирать так, чтобы при изменениях экзогенных параметров в достаточно широком диапазоне обеспечить преимущество ССП перед альтернативными ипотечными программами для вкладчиков с невысокими доходами, банка и государства (региональной администрации или федерального центра). Необходимым условием для решения этой задачи является финансовая устойчивость. Поясним это понятие.

При заданном наборе экзогенных параметров каждая ССП порождает ссудо-сберегательную траекторию (ССТ), характеризующуюся множествами вкладчиков, находящихся на той или иной стадии накопления и выплаты кредитов, суммами их средств на счетах, их задолженностей и т.п.

ССТ *допустима*, если в каждый момент времени она предусматривает обя-

[1] Строго говоря, параметры ССП могут влиять на приток вкладчиков; эту связь мы не учитываем.

[2] «Друзьями» вкладчиков называют участников ССП, накапливающих средства в течение достаточно длительного времени (обычно пять лет), но отказывающихся от кредита. Накопления «друзей» вкладчиков используются для кредитования заёмщиков. Поэтому «друзьям» разрешено выйти из ССП, забрав не только накопленные средства с процентами, но и премии на сбережения.

зательства по кредитам, не превосходящие имеющиеся в рамках ССП денежные средства. Для обеспечения допустимости ССТ может оказаться необходимым либо создать очередь вкладчиков, выполнивших программу сбережений и ожидающих кредита, либо привлечь внешние займы[3]. В этих случаях говорят о наличии *кассового разрыва*.

Мы говорим, что ССТ *финансово устойчива*, если, начиная с некоторого момента времени, она не допускает кассовых разрывов. ССТ *финансово устойчива в сильном смысле*, если она устойчива и не допускает кассовых разрывов вовсе, т.е. если она не предусматривает ни очередей, ни займов. Соответственно ССП *финансово устойчива* (*в сильном смысле*), если в заданном диапазоне изменений экзогенных параметров устойчива в сильном смысле любая порожденная ею траектория. Очевидно, очереди являются источником дополнительных издержек для вкладчиков, а при необходимости прибегать к внешним займам возникают дополнительные риски для ССП. Модель должна позволить разработчику исследовать ССП на допустимость и финансовую устойчивость.

Очевидно, что для решения сформулированных задач необходима динамическая модель ССП. Между тем ни одна из известных нам прикладных моделей ССП не позволяет достаточно полно учесть переходную динамику, возникающую при изменении экзогенных параметров, в то время как именно такие изменения могут привести к кризису системы ССП. Поэтому на практике модели дополняются эвристическими процедурами для поддержания баланса в условиях существенного роста цен на жилье и нестабильного вступления в систему новых участников.

Практически во всех работах предполагается, что параметры накопления и кредитования не меняются со временем и анализируются соответствующие стационарные режимы (см., в частности Laux (2005)). Статической является и модель, разработанная в монографии (Полтерович, Старков (2007)) для других целей.

Одной из близких к рассматриваемой является модель с перекрывающимися поколениями, использованная в статье (Scholten (2000)) для анализа простейшего типа ССП. Правда, и в этом случае фактически рассматриваются только стационарные режимы, вкладчики одинаковые, их приток постоянный, принято упрощенное правило назначения очередности при выдаче кредита (жребий). Интересна динамическая модель кооператива, исследуемая в статьях (Гасанов (2006)), (Гасанов, Ерешко (2007)), (Ерешко, Кочетков, Сытов (2010)). Однако и здесь, как и в предыдущих моделях не предусмат-

---

[3]Если ССП воплощается в виде специальных банковских счетов, то привлекаются дополнительные ресурсы самого банка

ривается бюджетная премия на сбережения; рассматривается конечный, а не постоянный поток участников.

В следующем разделе мы описываем опыт развития ССП в Российской Федерации и Казахстане.

1.3 Развитие ССП

1.3.1 Опыт Казахстана

Началу внедрению системы жилищных строительных сбережений в Казахстане положил Закон Республики Казахстан «О жилищных строительных сбережениях в Республике Казахстан» от 7 декабря 2000 года.

На основании постановления Правительства Республики Казахстан от 16 апреля 2003 года № 364 в целях совершенствования и повышения эффективности долгосрочного финансирования жилищного строительства и развития системы жилищных строительных сбережений было создано Акционерное общество «Жилищный строительный сберегательный банк Казахстана» (далее – АО «Жилстройсбербанк Казахстана», Жилстройсбербанк) со 100% участием государства в уставном капитале. Учредителем и акционером банка стали Правительство Республики Казахстан в лице Комитета государственного имущества и приватизации Министерства финансов Республики Казахстан. С 23 ноября 2011 года единственным акционером банка является Агентство Республики Казахстан по делам строительства и жилищно-коммунального хозяйства.

В апреле 2005 года в Закон Республики Казахстан «О жилищных строительных сбережениях в Республике Казахстан» были внесены изменения об увеличении поощряемой премией государства суммы жилищных строительных сбережений с 60 до 200 месячных расчетных показателей (Сайт агенства .... (2015)).

Схема получения займа такова. Гражданин Казахстана выбирает один из четырех возможных тарифных планов и открывает счет в Жилстройсбербанке, в соответствии с которым берет на себя обязательства в течение нескольких лет вносит определенную сумму денег на свой счет (от 3 до 15 лет в зависимости от тарифного плана). К этим сбережениям ежегодно добавляются вознаграждения банка (в зависимости от тарифного плана годовая эффективная ставка вознаграждения по вкладам – до 12,6%) и премии от государства.

Премия государства составляет 20% от суммы вклада, но не более установленного максимума в 38 840 тенге (Полтерович, Старков (2010)). Накопив как минимум 25% стоимости искомой квартиры можно получить жилищный займ под весьма незначительный процент — от 3,5% до 5% в год (годовая эффективная ставка вознаграждения по жилищному займу от 4% до 5,8%). Вкладчикам АО «Жилстройсбербанк Казахстана», приобретающим жилье, построенное в рамках государственной программы жилищного строительства, предоставляется возможность кредитования до 25 лет при минимальном сроке накопления три года .

На начальном этапе (до 2010 года) ССП развивались очень медленно по причине наличия чрезмерно щедрой альтернативы тарифных планов при крайне невыгодных условиях членства в стройсберкассах (доходность после 5 лет составляла всего 3,5%, а премии были минимальными).

В 2011 г. множество ССП были объединены в четыре: «Бастау», «Оркен», «Кемел», «Болашак» (по сроку накопления), которые предлагали гораздо лучшие условия для вкладчика годовая эффективная ставка вознаграждения по вкладам от 12,6% до 4,6%, соответственно). Вместе с этим, в 2012-м году была утверждена программа «Доступное жилье — 2020», предлагающая дешевое жильё. Это, а также увеличение денежных доходов населения (со среднегодовым темпом роста 18,2%: с 10533 тенге до 56245 тенге) послужило толчком для развития ССП.

В результате объем договоров жилищно-строительных сбережений существенно увеличился. Если в период с 2003-го до 2010-го года было заключено 214 тыс. договоров, то в период с 2011 до 2013 год суммарное количество договоров увеличилось до 523 тыс., а к концу 2015 гг. до 924 тыс. договоров (Сайт «ЖилСтройСбербанк» (2015)). Можно заключить, что за последние пять лет (2010 – 2015 годы) Республика Казахстан совершила большой рывок в отношении увеличения доступности жилья для слоев населения со средним и ниже среднего доходами с помощью ССИ.

1.3.2 Опыт Краснодара

В октябре 2011 г. в Краснодарском крае начала работу ипотечная система, основанная на принципе строительных сберегательных касс. Этот принцип реализован в виде банковского жилищного накопительного счета «Ипотечный» и счета для перечисления социальных выплат в рамках совместной программы «Строительные сберегательные кассы»/«Народная ипотека» администрации Краснодарского края и Сбербанка России[4].

К маю 2014 г. спустя два с половиной года после начала работы программы в ней участвовало более 4000 вкладчиков. Несколько десятков уже по-

[4] О разработке программы см. (Перспективы внедрения... (2011))

Таблица 1: Тарифные планы в Краснодарском крае.

Срок вклада	1 год	2 года	3 года	4 года	5 лет	6 лет
Максимальный взнос в месяц, поощряемый субсидией, тыс. руб.	10	10	10	10	10	10
Ставка субсидии на сбережения, %	30	30	30	30	30	30
Максимальная сумма субсидии за период накопления, тыс. руб.	36	72	108	144	180	216
Ставка по вкладу, %	1	1	1,5	1,5	2	2
Ставка по кредиту, %	8	8	7	7	6	6
Эффективная годовая ставка процента по вкладу с учетом субсидий, %	48,44	25,23	17,57	13,51	11,41	9,77
Срок кредита, лет	1,5	3	4,5	6	7,5	9
Максимальная сумма кредита, млн. руб.	0,5	0,5	1	1	1,5	1,5
Срок действия тарифного плана	1 год	1 год	1 год	-	-	-

Таблица 2: Структура вкладов по сроку накопления (на 1 февраля 2013 г.) и фактический средневзвешенный ежемесячный взнос для данного срока вклада за январь 2013 г.

Срок вклада	1 год	2 года	3 года	4 года	5 лет	6 лет
Доля вкладчиков на тарифном плане, %	2,8	4,6	16	9,7	49,6	17,3
Средневзвешенный взнос, тыс. руб.	11,7	10,6	8,8	7,8	7	7

лучили квартиры. Около 67% вкладов открыто на сроки 5 и 6 лет, и это является несомненным успехом. До последнего времени на финансовом рынке отсутствовали вклады более 3 лет, поскольку считается, что российские потребители не склонны к длительному накоплению.

Параметры тарифных планов, предлагавшихся в начале эксперимента, указаны в табл. 1. В течение первого года вкладчикам были предложены вклады сроком от 1 года до 6 лет. Ставки по одно- и двухлетним депозитам составляли 1%, по трёх- и четырёхлетним — 1,5%, по пяти и шестилетним — 2%. Процент по кредиту после одного и двух лет накопления равнялся 8%, после трёх и четырёх лет — 7%, а после пяти и шести лет — 6%. Для всех планов предусматривалась одна и та же ставка субсидии (премии) на сбережения — 30%.

В совокупности всех действующих вкладов доля вкладов, открытых на 1 год составляла в феврале 2013 г. 2,8%, на 2 года — 4,6%, на 3 года — 16%, на 4 года — 9,7%, на 5 лет — 49,6%, на 6 лет — 17,3% (Табл. 2).

На втором году эксперимента короткие вклады на один-три года были отменены. Их роль ограничилась демонстрацией работоспособности схемы. Эффективные годовые ставки процента для этих вкладов явно чрезмерны, столь щедрое субсидирование вкладчиков, вообще говоря, нерезонно. Кроме того, при установленных параметрах использовать короткие вклады для покупки квартиры могут преимущественно относительно богатые вкладчики, субсидирование которых не представляется целесообразным. В то же время, как показывает опыт разных стран, для состоятельных агентов использование тарифных планов на четыре-шесть лет при ограниченной субсидии вряд ли целесообразно: для них тяготы ожидания перевешивают выгоды от субсидирования. Благодаря этому премии на сбережения в ССП фактически нацелены на поддержку граждан с невысокими доходами.

Структура фактических взносов на вклады в начальной краснодарской линейке (см. табл. 2) подтверждает приведенные соображения. Фактический средневзвешенный ежемесячный взнос убывал по мере увеличения срока накопления; для длинных вкладов он был ниже субсидируемого максимума в 10 тыс. руб., а для одно- и двухгодичных тарифных планов — выше[5].

На протяжении 2014-2016 годов текущее количество вкладчиков показывало слабое уменьшение. Прироста вкладчиков, аналогичного Казахстанским жилищно-строительным спецсчетам не произошло. Более того, с 1 марта 2016-го года приём заявлений на участие в программе приостановлен. Это можно объяснить несколькими причинами, характерными для российских ССП. Они будут описаны в разделе 1.3.5.

1.3.3 Опыт Ростовской области

В 2013 году в Ростовской области Сбербанком была запущена программа «Народная ипотека» на тех же (Краснодарских) условиях (Сайт «Народная ипотека» (2015)).

Порядок предоставления государственной поддержки установлен постановлением Правительства Ростовской области от 02.07.2012 года № 563 «Об утверждении Положения о порядке предоставления бюджетных субсидий гражданам, открывающим вклады в кредитных организациях с целью накопления средств для улучшения жилищных условий» (Постановление правительства... (2013)). Согласно последнему получателем бюджетной субсидии может быть совершеннолетний гражданин Российской Федерации, постоянно проживающий на территории Ростовской области в течение 5 и более лет, нуждающийся в улучшении жилищных условий, открывающий вклад (на срок от 4 до 6 лет после 1 января 2013 года с целью накопления денежных средств для улучшения жилищных условий.

[5] При низких депозитных ставках такое превышение было невыгодным; оно, видимо, объясняется желанием участников увеличить сумму накоплений в надежде получить большую сумму кредита по сниженной ставке.

Нуждающимся в улучшении жилищных условий признается гражданин, принятый органом местного самоуправления на учет в качестве нуждающегося в улучшении жилищных условий до 1 марта 2005 года, либо принятый на учет в качестве нуждающегося в жилых помещениях после 1 марта 2005 года, либо обеспеченный жильем менее жилищной нормы (жилищная норма составляет 10 кв. м. общей площади на 1 человека.

Субсидия предоставляется за счет средств областного бюджета один раз в квартал, начиная с 1 января 2013 года. Размер бюджетной субсидии составляет 30 процентов от ежемесячного взноса, но не выше 3 тыс. руб., то есть не более 36 тыс. руб. в год. Минимальный предельный взнос, на который начисляется бюджетная субсидия, составляет 3 тыс. руб. , максимальный — 10 тыс. руб. Бюджетные субсидии носят строго целевой характер: гражданин, получающий субсидии, в течение 6 месяцев со дня окончания срока действия договора вклада направляет накопленные средства на приобретение или строительство жилого помещения на территории Ростовской области с помощью привлечения средств жилищного кредита. В виде исключения средства бюджетной субсидии, находящиеся на счете гражданина, могут быть выданы гражданину без приобретения или строительства жилого помещения только в случае, если на день прекращения срока действия договора вклада, вкладчик является инвалидом I или II группы, при условии получения инвалидности в период действия договора вклада.

В течение 2015 года в рамках «Народной ипотеки» было выдано свыше 9000 жилищных кредитов на общую сумму 14 млрд. рублей (Народная ипотека .... (2016)). При этом количество постоянных вкладчиков постоянно и практические не меняется с течением времени.

1.3.4 Опыт Башкортостана

14 февраля 2014 года постановлением Правительства Республики Башкортостан был утвержден порядок реализации в республике совместно с ОАО «Сбербанк России» (С 1 апреля в Башкирии... (2014)) проекта по приобретению жилья по системе жилищно-строительных спецсчетов.

В первый год действия программы участником может стать любой постоянный житель Башкортостана. Год отсчитывается с 14 февраля 2014г. — дня выхода соответствующего постановления Правительства Республики Башкортостан. После 14 февраля 2016 года правом на участие смогут воспользоваться только граждане, признанные нуждающимися в улучшении жилищных условий (В Башкирии начинает... (2014)).

Приобретаемое жилье — квартира или дом, строящееся или готовое, — должно располагаться только на территории республики, поскольку наряду с повышением доступности ипотечного жилищного кредитования с запуском этой программы власти республики рассчитывают увеличить объемы строительства жилья эконом-класса.

Согласно условиям программы, ежемесячный накопительный взнос участников составит от 3 до 10 тыс. руб., а бюджет республики будет доплачивать к сбережениям каждого участника до 30% суммы первоначального взноса на покупку жилья. Максимальная доплата из бюджета составит 3 тыс. руб. в месяц или 36 тыс. руб. в год на одного участника.

Накопительный период составляет от 3 до 6 лет . После окончания накопительного периода, участник программы сможет получить ипотечный кредит на срок, в полтора раза превышающий период накоплений, соответственно — от 4,5 до 9 лет , соответственно. Минимальная величина банковского займа составит 150 тыс. руб., максимальная — 1,5 млн. руб. , но не больше накопленной суммы, то есть первоначальный взнос составляет 50% от стоимости приобретаемого жилья.

Процентная ставка по вкладу и по ипотеке зависит от продолжительности периода накопления. Чем дольше деньги остаются в системе, тем выше процент по вкладу и ниже по ипотеке. Так, при трехлетнем накопительном периоде участник будет получать 1% годовых, а при шестилетнем — 1,5% . Ставка по ипотеке на 4,5 составит 7% годовых, а на девять лет — 6% . При ежемесячных взносах 10 тыс. руб. с учетом бюджетной премии и процентов по вкладу, за 6 лет можно скопить почти 1 млн. руб., что на сегодняшний день достаточно для первого взноса по ипотеке.

По состоянию на июнь 2017 года в двух банках-партнерах (ПАО Сбербанк и ПАО «БАНК УРАЛСИБ») гражданами республики открыто порядка 7 000 долгосрочных целевых жилищно-накопительных вкладов с общей суммой остатков около 1,7 млрд рублей (В Башкортостане выданы... (2017)). Выданы первые ипотечные кредиты под 7% годовых. В банки подано 260 заявок от граждан на получение льготного кредита, из которых более 30 уже одобрены и готовы к приобретению жилья.

Только по заключенным договорам, начиная с 2017 года, ожидается поступление на жилищно-строительный рынок региона не менее 6,5 млрд. рублей. На данный момент из всего российского опыта программа в Башкортостане является самой успешной. Но и у этой программы, несмотря на большое количество вкладов, роста не происходит.

1.3.5 Отличия российских ССП

ССП, введённые в России не показывают стремительного роста, аналогичный произошедшему в Казахстане в 2011-2016 года. Опишем возможные причины этого.

Посмотрим на каждого из участников процесса: банк и государство. Государственная поддержка в России, в отличие от Казахстана, представлена не на федеральном, а на региональном уровне. Администрация региона ограничена в средствах. В результате у неё появляется стремление ограничить участие в ипотеке, предоставляя её более «льготным» категориям жителей. В частности, для Ростовской области и Краснодарского края необходимым условием является наличие в собственности всей семьи не более одного объекта жилой недвижимости. В Башкортостане первый год действия программы ограничений не было, однако с февраля 2016-го года только очередники имеют право ей воспользоваться. Немаловажно и то, что кризис в стране также стимулирует администрацию ограничить число участников программы.

Другая проблема, которая возникает на уровне администрации — обеспечение участников ССП дешёвым жильём. Тут всё неоднозначно. По правилам программы, участникам предлагается социальное жильё с 25% скидкой, что безусловно является положительным моментом. Другой вопрос, что дома, построенные для участников расположены в неудобных для жителей местах и не всегда отвечают заявленному качеству. Программу жилья, аналогичную казахстанской, регион обеспечить не в состоянии.

Некоторые действия банка тоже мешают развитию программы ССП. В Краснодаре и Ростовской области участие в ССП не является гарантией того, что вкладчику дадут ипотечный кредит. Происходит дополнительная оценка заёмщика (по уровню доходов) перед выдачей кредита. Нарушена одна из основных идей стройсберкассы: тот факт, что вкладчики каждый месяц вносят средства должно было гарантировать их кредитоспособность. С чем это может быть связано? Возможно, банк боится потери прибыли, если все клиенты, использующие другие программы, в частности, коммерческие кредиты, перейдут в спецсчета. Однако, можно предположить, что если бы банк был дальновиднее, то ССП должна привести к притоку новых средних вкладчиков, и могла бы принести большую дополнительную прибыль, чем имеющийся поток на одном коммерческом плане — ипотеке.

Для эффективной работы ссудо-сберегательной программы необходимо грамотное взаимодействие банка, администрации и потребителя. Совокупность причин, описанных выше приводит к тому, что ССП не получает должного развития. Однако, несмотря на все проблемы, в ССП в России приняли участие около 20000 потребителей, и в двух из трёх регионов правительство рассчитывает на успешное продолжение программы ((Народная ипотека .... (2016)), (Рустэм Хамитов вручил... (2016))).

1.4 ССП из нескольких тарифных планов

Построенная выше модель описывает состояние и траекторию одного тарифного плана (ТП). В дальнейшем под ТП мы будем понимать набор следующих восьми параметров: срок накопления, ставка по депозиту, величина премии на сбережения в процентах, максимальная и минимальные величины ежемесячного взноса, на которые начисляется премия, срок кредита, отношение объема кредита к накопленной сумме, процент по кредиту. Так, в рамках краснодарского эксперимента на пятилетнем плане накопления ставка по депозиту была принята равной 2% годовых; ставка бюджетной премии на сбережения — 30% от ежемесячного взноса на вклад, но не более 3 тыс. рублей (значит, максимальная величина субсидируемого взноса — 10 тыс. руб); минимальная величина взноса — 3000 руб, ставка по кредиту — 6% годовых, срок кредита — 7,5 лет, сумма кредита равна накоплениям на вкладе вместе с субсидиями. Однако, наряду с пятилетним планом, в Краснодарском крае потребителям предлагаются также тарифные планы на 4 и 6 лет.

ССП, включающие несколько разных тарифных планов, встречаются на практике достаточно часто. Ясно, что их параметры нельзя выбирать произвольно: ведь от сочетания параметров зависит распределение потребителей между планами, а значит, и эффективность всего набора (линейки) ТП. Следующий важный вопрос, который мы здесь ставим —- продемонстрировать, что формирование линеек, содержащих ТП со сроками накопления от одного до шести, может быть выгодно всем трем агентам ссудо-сберегательной программы: потребителю, банку и государству. Основная задача глав 3 и 4 — продемонстрировать, что формирование линеек, содержащих ТП со сроками накопления от одного до шести, может быть выгодно всем трем агентам ссудо-сберегательной программы: потребителю, банку и государству. Приводятся соответствующие примеры. При их построении намечена общая схема конструирования эффективных линеек. Линейка организуется так, что более состоятельным участникам оказывается выгодным выбирать планы с меньшими сроками накопления, более низкими ставками премии на сбережения и более высокими ставками процента за кредит. Тем самым преодолевается указанная выше трудность: обеспечивается плавный переход от дотируемой ипотеки к чисто рыночным механизмам по мере роста доходов.

Дальнейшая структура диссертации организована следующим образом. В Главе 2 приводится основная модель ССП и исследуются стационарно устойчивые траектории. В Глава 3 посвящена формированию линеек тарифных планов ССП, их полезных свойств и построен пример, удовлетворяющий этим условиям. В главе 4 исследуются взаимосвязи между свойствами линеек.

2. Динамическая модель ссудо-сберегательных программ

2.1 Основные результаты главы

В данной главе разрабатывается динамическая модель ссудо-сберегательных программ ипотечного кредитования (ССП), опираясь на разные специализированные институты: стройсберкассы или строительно-сберегательных кооперативы или специальные жилищные накопительные счета в банке. Модель позволяет для каждого момента времени рассчитать: число вкладчиков с разными сроками накопления; число вкладчиков, получивших право на кредит с разными сроками его ожидания; структуру внешних заимствований; число заёмщиков, получивших кредиты в разное время; сумму, накопленную на депозитах; кредитную массу. При этом имеется возможность учесть изменения притока вкладчиков, темпы инфляции, изменения темпа роста доходов и ставок процента на внешнем рынке, а также вариации внутренних параметров спецсчетов: процентных ставок, сроков и объемов накопления и кредитования.

Кроме этого, для заданных параметров можно исследовать *ссудо-сберегательные траектории* (ССТ), то есть упорядоченные по времени состояния ССП. Важнейшей характеристикой ССТ является её (сильная) финансовая устойчивость относительно кассовых разрывов. В этой главе будут приведены необходимые и достаточные условия для финансовой устойчивости ССТ и финансовой устойчивости в сильном смысле.

Предлагаемая ниже модель (разд. 2.2—2.3) представляет систему нелинейных рекуррентных соотношений, описывающих динамику ССП (системы спецсчетов). Модель позволяет для каждого момента времени рассчитать: число вкладчиков с разными сроками накопления; число вкладчиков, получивших право на кредит с разными сроками его ожидания; структуру внешних заимствований; число заёмщиков, получивших кредиты в разное время; сумму, накопленную на депозитах; кредитную массу. При этом имеется возможность учесть изменения притока вкладчиков, темпы инфляции, изменения темпа роста доходов и ставок процента на внешнем рынке, а также вариации внутренних параметров спецсчетов: процентных ставок, сроков и объемов накопления и кредитования.

Благодаря этому модель дает возможность решать описанные выше задачи, и, таким образом, разрабатывать планы накопления и кредитования участников ССП, устойчивые к колебаниям экзогенных параметров.

Модель включает два важных частных случая, отражающие варианты ССП, используемые на практике:

1) строительно-сберегательная касса . В этом случае на социальные премии начисляется процент, текущая прибыль идет частично в кредитную массу, частично выплачивается акционерам[1]. Возможны очереди и займы под внешние проценты;

2) жилищно-накопительный счет в банке (спецсчет). В этом варианте нет процентов на социальные премии, нет очередей (кассовые разрывы покрывает банк), прибыль идет банку.

В разделе 2.4 сформулированы условия финансовой устойчивости и сильной финансовой устойчивости ССП. В разделе 2.5 приведены результаты экспериментальных расчетов. Здесь исследованы границы финансовой устойчивости ССП.

Различные серии расчетов соответствовали различному выбору управляющих переменных (срок кредитования, величина дотации на сбережения, размер гарантированного кредита) и экзогенных параметров (процент «друзей вкладчиков», рыночные ставки процента внешних заимствований и вложений). Кроме того, была исследована реакция ссудо-сберегательных траекторий на изменение внешних условий. При этом важнейшие параметры менялись достаточно резко и в широком диапазоне. В частности, рассматривалось падение притока вкладчиков на 50% и его полное прекращение.

Расчеты показали, что в российских условиях ССП обеспечивают устойчивое кредитование участников программы в широком диапазоне изменения внешних условий и внутренних параметров. При этом дефицит средств, приводящий к необходимости займов и возникновению очередей, наблюдается чаще не в стационарном, а в переходном режиме.

Последний результат явственно демонстрирует преимущество предлагаемой модели над известными, описывающими лишь стационарные режимы. Отсутствие длительного дефицита средств является важнейшей характеристикой ССП, характеризующей её устойчивость: при высоком и длительном дефиците банк терпит убытки. А в случае невозможности обслужить потен-

[1]Различают два типа стройсберкасс — общественные и частные. Прибыль полностью или частично направляется акционерам в частных стройсберкассах.

циальных заёмщиков возникает опасность массового «бегства вкладчиков». Стационарные модели дают чрезмерно оптимистические оценки и не позволяют получить своевременную информацию об угрозе кризиса.

2.2 Агенты ССП: общая схема взаимодействия

В данном разделе дается описание общей схемы взаимодействия участников ипотечной системы: потребителя, ссудо-сберегательного института, банка и регионального или федерального правительства. Под ссудо-сберегательным институтом подразумевается организация, которая занимается всеми операциями ССП: это может быть как сберегательный банк, так и специализированный банковский институт — ССК. Модели для разных институтов немного различаются. Для упрощения далее мы везде будем подразумевать, что таким институтом является банк, там где в моделях есть различия, будут даны соответствующие указания.

Потребитель. Потребитель, желающий приобрести жилье, обращается в банк для выбора ссудо-сберегательного плана. Его важнейшими характеристиками является срок накопления (длительность ожидания жилья), срок кредитования, площадь приобретаемого жилья и размеры ежемесячных выплат при накоплении и выплате кредита. В принципе поведение потребителя можно описать стандартной моделью потребительского выбора. В данном случае она учитывала бы временные предпочтения агента и представляла бы собой задачу максимизации интегральной полезности при бюджетном ограничении[2]. Из этой модели можно было бы определить спрос потребителей на квартиры той или иной площади. Однако выявление потребительских предпочтений — сложная задача. Поэтому мы будем предполагать заданным распределение потребителей по величине предпочитаемых ежемесячных выплат и предпочитаемому сроку накопления.

Потребитель, вступивший в ССП, может находиться на одной из её трех стадий: накопления, очереди, выплаты кредита.

1. *Накопление.* Каждый месяц потребитель вносит сумму денег (взнос), не меньшую заранее фиксированной величины. На взнос банк начисляет процент по депозиту. Кроме того, с определенной периодичностью (обычно раз в месяц или в квартал) государство выплачивает потребителю премию (социальную выплату), пропорциональную сумме внесенных за период взносов.

2. *Очередь.* При нехватке кредитной массы потребитель после окончания накопления может не сразу получить кредит, а оказаться в очереди за креди-

[2] При таком описании потребителя рассматриваемая ниже модель становится вариантом модели с перекрывающимися поколениями.

том. Правила формирования очереди формулируются заранее. На практике банк может использовать вместо очереди другой инструмент — внешний заём. В стройсберкассах как правило, используется очередь.

3. *Выплата кредита.* В течение срока кредитования агент ежемесячно вносит платежи за кредит. После завершения выплат по кредиту он выходит из системы с приобретенным в собственность жильем.

При вступлении в ССП потребитель заключает договор с банком, где указываются параметры его тарифного плана (срок накопления, ставка по депозиту и т.п.)[3]. Специальным решением государство обязуется выплачивать ему премию на сбережения из федерального или регионального бюджета. Участник, нарушивший контракт, получает накопленные деньги плюс определенный процент, но лишается премии. Если участник полностью выполнил программу накопления длительностью более определенного срока (обычно, более 5 лет), он вправе отказаться от кредита и получить все накопленные им средства с процентами и премией без покупки жилья[4]. Таких агентов называют «друзьями» вкладчиков (см. сноску 2).

Ссудо-сберегательный институт. В рамках ССП процентные ставки по кредитам и депозитам ниже рыночных и обычно не зависят от инфляции. Небольшая маржа (разность между ставками, обычно 3-4%), а также процентный доход от инвестиций временно свободной кредитной массы являются источниками прибыли, которую получает банк. Между администрацией и банком заключается соглашение о предоставлении вкладчикам бюджетных субсидий.

Для выдачи кредитов формируется кредитная масса из целевых вкладов физических лиц, выплат в счет погашения ранее выданных кредитов, неиспользованного ранее остатка и резерва. Если денег для выплаты кредитов по-прежнему не хватает, стройсберкасса формирует очередь вкладчиков за кредитом. В отличие от стройсберкасс банк для преодоления кассового разрыва должен привлечь собственные средства, поступившие от операций, не связанных с ССП, либо заёмные средства. Средства ССП, временно свободные от обязательств перед вкладчиками и иными кредиторами, банк может использовать для вложения в государственные ценные бумаги или на иные рыночные операции.

Для покрытия финансовых разрывов ССИ может также создать специальный фонд пополнения распределяемой массы (резерв). Формирование резерва осуществляется за счет процентных доходов, полученных от вложений

[3] На практике вначале может быть заключен договор о накоплении и лишь по его окончании —договор о кредите. В этом случае в первом договоре условия второго указываются, но не имеют обязательного характера, и при определенных обстоятельствах могут быть пересмотрены банком.

[4] На практике это право может быть предоставлено не всем, а лишь специальным группам потребителей

временно свободной части распределяемой массы в рыночные операции и государственные ценные бумаги.

Государство выплачивает вкладчику субсидии в процентах от его взносов (ежемесячно, ежеквартально, либо в конце каждого года).

2.3 Модель ССП: спецсчетов и стройсберкассы

2.3.1 Некоторые обозначения

Проценты. В модели вводятся следующие ставки процента: ставка по депозитам[5] — p, кредитная ставка — c, ставка по займу — z, ставка процента по внешним инвестициям — u, ставка начислений на сбережения (ставка субсидирования) — s.

Если обозначить через $p_{\text{год}}$, $c_{\text{год}}$, $u_{\text{год}}$, $z_{\text{год}}$ годовые ставки, то формулы пересчета на месяц выглядят следующим образом:

$$p = \frac{p_{\text{год}}}{12}, c = \frac{c_{\text{год}}}{12}, u = \frac{u_{\text{год}}}{12}, z = \frac{z_{\text{год}}}{12}.$$

Последовательность операций. Время в модели дискретное. Единицей расчета времени является месяц (в расчетах также использовалася квартал). За один период времени производятся следующие операции. В начале периода вкладчики вносят деньги на депозиты. В конце периода им начисляются проценты и субсидии. Кроме того, заёмщики осуществляют выплаты по кредитам. Затем внесенные агентами суммы и ранее накопленные средства используются для выдачи новых контрактных сумм.

Далее, если не оговорено иное, под значением функции в момент времени t понимается значение этой функции в конце периода t.

Модели стройсберкассы и спецсчетов. Для различения двух моделей будем использовать параметр γ:

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \text{для модели стройсберкассы,} \\ 0, & \text{для модели спецсчетов.} \end{cases}$$

2.3.2 Накопление

Будем считать, что социальные выплаты производятся каждый месяц: это упрощает формулы и вычисления.

Пусть A — множество всех агентов-участников ССП (вкладчиков и заёмщиков). При появлении в системе агент $a \in A$ задается тремя параметрами:

[5]В базовой версии модели вводились следующие значения процентов: $p_{\text{год}} = 0,02$, $c_{\text{год}} = 0,06$, $s = 0,3$, $u_{\text{год}} = 0,06$, $z_{\text{год}} = 0,08$.

временем появления в системе $T_{\text{нач}}(a)$, размерами взносов $P(t, a)$ в период времени t и длительностью периода накопления $\tau(a)$. Для удобства записи формул там, где это несущественно, будем опускать параметр a.

Каждый месяц в период накопления агент получает процент p на вклад и социальные выплаты, т.е. процент s от взносов $P(t)$ за текущий месяц накопления). Обозначим через $T_{\text{кон}}(a)$ период последнего взноса агента a, тогда $T_{\text{кон}} = T_{\text{нач}} + \tau - 1$.

Найдем объем накоплений агента a. На момент времени $t \leqslant T_{\text{кон}}$ накопленная сумма $M(t, a)$ в конце периода t вычисляется по формуле:

$$M(t) = \sum_{i=T_{\text{нач}}}^{t} P(i)(1+p)^{t-i+1} + s \sum_{i=T_{\text{нач}}}^{t} P(i)(1+\gamma p)^{t-i+1}. \qquad (2.1)$$

Мы считаем, что $M(t) = 0$, если верхний индекс суммирования меньше нижнего. Правая часть этой формулы состоит из двух слагаемых: первое — взносы с учетом процентов, второе — социальные выплаты. Второе слагаемое отражает тот факт, что процент на социальные выплаты начисляется для стройсберкасс, но не для спецсчетов.

В случае $t = T_{\text{кон}}$ получаем формулу для полного объема накоплений:

$$M(T_{\text{кон}}) = \sum_{i=T_{\text{нач}}}^{T_{\text{кон}}} P(i)(1+p)^{T_{\text{кон}}-i+1} + s \sum_{i=T_{\text{нач}}}^{T_{\text{кон}}} P(i)(1+\gamma p)^{T_{\text{кон}}-i+1}.$$

2.3.3 Очередь

Если вкладчик ССП завершил накопление, но имеющийся в наличии объема кредитной массы недостаточно для выдачи ему контрактной суммы, а внешние займы не используются, вкладчик попадает в очередь за кредитом. При этом он больше не делает взносов, и, хотя на накопленные им средства начисляется процент p, объем причитающегося ему кредита остается постоянным, поскольку зависит только от размера накоплений без учета процентов, начисленных в очереди. Однако проценты влияют на объем контрактной суммы.

Итак, для агента a, стоящего в очереди в момент времени $t \geqslant T_{\text{кон}}$, количество накопленных средств $M(t)$ равно

$$M(t) = \sum_{i=T_{\text{нач}}}^{T_{\text{кон}}} P(i)(1+p)^{t-i+1} + s \sum_{i=T_{\text{нач}}}^{T_{\text{кон}}} P(i)(1+\gamma p)^{t-i+1}.$$

Объем контрактной суммы $K(t, a)$ агента a в момент времени t равен сумме объемов накопленных средств $M(t, a)$ и кредита $C(a)$. Считаем, что объем кредита пропорционален сумме $M(T_{\text{кон}})$ и коэффициент пропорциональности Λ зависит от ССП[6] :

$$K(t) = M(t) + C, \tag{2.2}$$
$$C = \Lambda \cdot M(T_{\text{кон}}).$$

2.3.4 Кредитование

Обозначим через $T_{\text{кр}}(a)$ период, в конце которого агент a получает контрактную сумму. При отсутствии очереди выполняется равенство $T_{\text{кр}}(a) = T_{\text{кон}}(a)$. Первая выплата по кредиту производится в момент времени $T_{\text{кр}}(a) + 1$.

Введем характеристики кредита.

Срок кредита $\tau_{\text{кр}}(a)$ определяется временем накопления агента a (без учета очереди), умноженного на коэффициент Γ[7]:

$$\tau_{\text{кр}} = \Gamma\tau = \Gamma(T_{\text{кон}} - T_{\text{нач}} + 1).$$

Процент за кредит обозначим через c. Выплаты по кредиту рассчитываются по аннуитету. Это означает, что каждый период агент выплачивает одну и ту же сумму денег, включающая выплату по телу кредита и проценты. Легко проверить, что *ежемесячные выплаты* $B(a)$ *по кредиту* объемом C агента a вычисляются по формуле (2.3):

$$B = \frac{C \cdot c}{1 - (1+c)^{-\tau_{\text{кр}}}} = \frac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} c}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} - 1} \cdot C. \tag{2.3}$$

Для расчетов нам понадобятся две функции. Пусть $T_{\text{кон}}+1 \leqslant t \leqslant T_{\text{кон}}+\tau_{\text{кр}}$ (т.е. в момент t агент находится в состоянии выплат по кредиту). Через $V(t,a)$ обозначим оставшийся объем тела кредита, а через $E(t,a)$ — выплаты по телу кредита в момент времени t. Формулы для вычисления $V(t,a)$ и $E(t,a)$ запишутся так (символ a опускаем):

$$V(t) = \begin{cases} C, & \text{если } t = T_{\text{кон}}; \\ V(t-1) - E(t), & \text{если } t > T_{\text{кон}} + 1, \end{cases}$$

$$E(t) = B - V(t-1) \cdot C, \text{ если } t \geqslant T_{\text{кон}} + 1.$$

Найдем явное выражение для $V(t)$ и $E(t)$ через C. Учитывая соотношение (2.3), прямой подстановкой в определение несложно проверить, что

[6]Коэффициент Λ в расчётах полагался равным 1.

[7]В расчётах Γ полагался равным $1,5$.

$$V(t) = \frac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} - (1+c)^{t-T_{\text{кон}}}}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} - 1} \cdot C, \qquad T_{\text{кон}} \leqslant t \leqslant T_{\text{кон}} + \tau_{\text{кр}}. \tag{2.4}$$

Отсюда получаем формулу для $E(t)$ при $T_{\text{кон}} + 1 \leqslant t \leqslant T_{\text{кон}} + \tau_{\text{кр}}$:

$$E(t) = \frac{(1+c)^{t-T_{\text{кон}}-1}}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} - 1} \cdot c \cdot C. \tag{2.5}$$

2.3.5 Друзья вкладчиков и нарушители контракта

Кроме обычных агентов, проходящих стадии накопления, очереди и кредитования, есть еще два особых типа агентов.

Друзья вкладчиков. Этот тип агентов фактически выполняет вспомогательную функцию в ССП: они копят взносы, а затем отказываются от кредита, забирают свой вклад с процентами и субсидиями и выходят из системы. Друзьями могут быть только агенты, накапливающие средства пять лет или более. За их счет поддерживается кредитная масса, обеспечивающая выплаты агентам-заёмщикам.

Нарушители контракта. Это агенты, которые разрывают контракт на стадии накопления до её завершения[8]. Они забирают свои деньги с накопленными процентами[9], но без социальных выплат и таким образом играют в модели роль, аналогичную друзьям вкладчиков.

2.3.6 Ссудо-сберегательный институт

Несколько упрощенно схема работы ССИ выглядит следующим образом. В начале каждого периода мы собираем взносы от вкладчиков и вместе с остатком средств за предыдущий период (если остаток положительный) инвестируем их под заданный процент. В конце периода полученные средства с процентами и выплаты по кредиту формируют так называемую *кредитную массу*[10]. Далее выдаются средства друзьям вкладчиков и нарушителям. После этого обслуживаются агенты, ожидающие в очереди выдачи контрактных сумм. Как отмечалось выше, их место в очереди определяется некоторым правилом (в зависимости от момента завершения накопления, размера взносов, времени накопления); им последовательно выдаются контрактные суммы. В результате либо получат обслуживание все агенты, ожидающие выдачи контрактных сумм, либо будет исчерпана кредитная масса. Остаток кредитной

[8]Термин «нарушители» условен: формально вкладчик вправе досрочно выйти из ССП.

[9]Возможно также снижение ставки нарушителям; мы предполагаем, что ставка не изменяется.

[10]Понятие кредитной массы в системе специальных счетов условно. В реальности средства ССП могут ничем не отличаться от других средств банка.

массы частично используется для формирования прибыли ССИ[11], частично переходит на следующий период.

Средства резерва, создаваемого ССП, отличаются повышенной ликвидностью. В нашей модели этот аспект не учитывается, мы считаем, что резервный фонд является частью остатка кредитной массы.

Будем считать, что в момент времени t произошел *кассовый разрыв*, если в этом периоде кредитной массы не хватает на обеспечение контрактами всех агентов, получивших право на кредит.

Отметим, что на начальной стадии существования системы контрактные суммы агентам не выдаются: агенты только накапливают средства. Поэтому на этой стадии не может быть кассового разрыва. В соответствующие периоды ССИ инвестирует имеющиеся у него средства, формируя кредитную массу, которая используется на начальных стадиях кредитования. Она пополняется благодаря притоку вкладчиков и выплатам по кредиту. Однако, когда в ССИ только формируется «линейка» заёмщиков, находящихся на разных стадиях выплаты кредита, накопленной кредитной массы и притока денег может оказаться недостаточно, тогда возникает кассовый разрыв. В этом случае ССП формирует очередь, а банк использует имеющиеся у него средства, либо прибегает к займу. В дальнейшем мы не различаем два последних способа покрытия разрыва банком, полагая, что стоимость собственных и заёмных средств для банка одинаковая. В обоих случаях привлечение средств сверх имеющейся кредитной массы рассматривается как займ.

Очередь и займы моделируются следующим образом. Назначается максимально возможное время нахождения в очереди T. Если в какой-то момент времени возникают вкладчики, находящиеся в очереди T периодов, то контрактная сумма выдается им за счет займа. Если T достаточно велико, то при естественных условиях займы отсутствуют; так моделируется ССП. Если $T = 0$, то очереди не возникает никогда. Именно так происходит, если в качестве ССИ выступает банк. На внешний займ начисляются процент z, займ с процентами выплачивается за счет кредитной массы.

Опишем еще раз последовательность действий ссудо-сберегательного института. В начале каждого периода поступают взносы от вкладчиков, которые используются для внешних инвестиций. В конце периода ССИ располагает кредитной массой, включающей взносы с процентами, платежи по выданным ранее кредитам и остаток кредитной массы прошлого периода с учетом полученных (если он положителен) или уплаченных по нему процен-

[11] В бухгалтерских расчетах прибыль формируется за счет процентов по кредитам вкладчикам и по внешним вложениям временно свободных средств. Однако в модели для целей нашего исследования удобно все поступления приплюсовывать к кредитной массе и из нее же производить отчисления.

тов (отрицательный остаток покрывается за счет внешних займов). Из кредитной массы выдаются деньги друзьям вкладчиков и агентам-нарушителям, производятся выплаты по внешним займам, накопленные премии нарушителей возвращаются в бюджет. Далее, по описанным выше правилам выдаются контрактные суммы, и таким образом формируется остаток кредитной массы, используемый в следующем периоде.

Будем обозначать через $\Delta(t)$ объем кредитной массы перед началом выдачи средств друзьям вкладчиков и агентам-нарушителям, $\Delta_{\text{кон}}(t)$ — остаток кредитной массы предыдущего периода.

2.3.7 Формирование и использование кредитной массы

В множестве агентов A выделим следующие подмножества: $F(t)$ — «друзья» вкладчиков, заканчивающие накопления в момент t, $R(t)$ — агенты-нарушители, разрывающие контракт в момент t, $N(t)$ — агенты, находящиеся на стадии накопления в момент t , $O(t)$ — агенты, ожидающие выдачи кредита в момент t, $W(t)$ — агенты, выплачивающие кредит в момент t.

Формирование кредитной массы. В начале периода t вкладчики приносят средства в размере $\sum_{a\in N(t)} P(t,a)$. К концу этого периода доход от инвестирования этих средств составит $u\cdot\sum_{a\in N(t)} P(t,a)$, где u - ставка по внешним инвестициям, которую мы считаем фиксированной[12].

Кредитная масса в конце периода формируется следующим образом. От вкладчика a в нее поступает взнос $P(t,a)$ с учетом инвестиций u и социальных выплат s, т.е. $P(t,a)\cdot(1+u+s)$. От заёмщика приходит выплата по кредиту $B(a)$.

Кроме того, в кредитную массу включается остаток предыдущего периода $\Delta_{\text{кон}}(t-1)$ с учетом процентов. Если остаток был положительным, то в течение периода он использовался в качестве внешних инвестиций, если отрицательным, то для его покрытия был привлечен внешний займ, и, следовательно, на него начислены проценты по займу. Считаем, что займ берется на один период, так что в конце периода он возвращается за счет имеющихся средств или нового займа. Для удобства записи введем обозначения

$$\Delta_{\text{кон}+}(t-1)=\max\{0,\Delta_{\text{кон}}(t-1)\},\Delta_{\text{кон}-}(t-1)=\min\{0,\Delta_{\text{кон}}(t-1)\}.$$

Тогда в кредитную массу добавляется $\Delta_{\text{кон}+}(t-1)\cdot(1+u)+\Delta_{\text{кон}-}(t-1)(1+z)$. В итоге получаем, что объем кредитной массы $\Delta_{\text{кон}}$ до выдачи денег

[12]В базовой модели u бралось из расчёта 6% годовых

специальным агентам и контрактных сумм равен

$$\Delta(t) = (1+u_+s) \sum_{a\in N(t)} P(t,a)+ \sum_{a\in W(t)} B(a)+\Delta_{\text{кон}+}(t-1)\cdot(1+u)+\Delta_{\text{кон}-}(t-1)(1+z). \tag{2.6}$$

Естественно считать, что $z \geqslant u$, в противном случае можно было бы получать прибыль, просто инвестируя заимствованные средства. При выполнении этого неравенства соотношение (2.6) можно переписать в более удобном виде

$$\begin{aligned}\Delta(t) = (1 + u_+s) \sum_{a\in N(t)} P(t,a) + \sum_{a\in W(t)} B(a) + \Delta_{\text{кон}}(t-1)+ \\ \min\{\Delta_{\text{кон}}(t-1)\cdot u + \Delta_{\text{кон}}(t-1)\cdot z\}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Величина остатка $\Delta_{\text{кон}}(t-1)$ задается формулой (2.8) (см. далее).

Выдача денег специальным агентам. Друзьям вкладчиков выдаются суммы $M(t,a)$, накопленные ими к концу периода t. Агентам-нарушителям, прекращающим участие в ССП в момент t, выдается накопленная сумма за вычетом социальных выплат:

$$M(t,a) - s \sum_{i=T_{\text{нач}}(a)}^{t} P(i,a),$$

а соответствующие социальные выплаты возвращаются в бюджет.

Таким образом, из кредитной массы вычитаются деньги на выдачу друзьям вкладчиков, агентам-нарушителям и возврат в бюджет. Обозначим кредитную массу после выдачи денег специальным агентам через $\Delta^+(t)$, тогда

$$\Delta^+(t) = \Delta(t) - \sum_{a\in F(t)} M(t,a) - \sum_{a\in R(t)} M(t,a).$$

Отметим, что кредитная масса может оказаться отрицательной. В этом случае на недостающая сумма заимствуется под определенный процент.

Выдача контрактных сумм. ССИ должен выдать кредиты агентам, которые закончили накапливать средства. Выдача происходит следующим образом: агенты выстраиваются в некотором порядке, а потом им в порядке очереди выдаются денежные средства. Порядок может быть устроен разными способами и учитывать время нахождения в очереди, размер ежемесячного взноса, время накопительного периода. Например, можно упорядочивать агентов по убыванию времени ожидания в очереди, потом — по убыванию времени накопления, а затем — по убыванию размеров ежемесячных взносов.

Если при этом все же возникает неоднозначность, то можно дополнительно использовать случайный выбор.

Обозначим через упорядоченный список агентов, которым предстоит выдать контрактные суммы $K(t, H_i)$ (объем контрактных сумм определяется формулой (2.2)), здесь H_i — агент, стоящий в очереди на месте i. Находим максимальное число вкладчиков m, которым можно выдать контрактную сумму, не используя займ. Оно определяется формулой:

$$m = \max_j \{j : \Delta^+(t) - \sum_{i=1}^{j} K(t, H_i) \geqslant 0\}.$$

Выдаем контрактные суммы всем агентам $H_1, \ldots, H_m$. Если после этой операции остались агенты, которым предстоит выдать контрактную сумму за счет займа (это агенты, которые стоят в очереди ровно T периодов), то им тоже выдаем контрактную сумму. Пусть l — последний номер агента, который находится в очереди T периодов (если таких нет, положим $l = 0$). Тогда множество агентов, которым выдаются контрактные суммы, запишется так: $\{H_i \mid i = 1, \ldots, \max(m, l)\}$. Таким образом, обозначив через $\Delta_{\text{кон}}(t)$ оставшуюся после выдачи контрактных сумм кредитную массу, с учетом (2.2), имеем

$$\Delta_{\text{кон}}(t) = \Delta^+(t) - \sum_{i=1}^{\max(m,l)} K(t, H_i) = \Delta^+(t) - \sum_{i=1}^{\max(m,l)} (M(t, H_i) - \Lambda M(T_{\text{кон}}, H_i). \tag{2.8}$$

Остаток кредитной массы $\Delta_{\text{кон}}(t)$ переходит на следующий период. Операционные издержки банка, потери по просроченным и дефолтным кредитам, равно как издержки на резервирование и страхование, мы не учитываем. Соотношения (2.1)—(2.8) вместе с (не конкретизированными выше) правилами формирования очереди описывают динамику ссудо-сберегательной программы.

2.4 Устойчивость ссудо-сберегательных программ

2.4.1 Ссудо-сберегательные программы и траектории

Напомним введенные выше основные понятия. Под *ссудо-сберегательной программой* мы понимаем совокупность правил сбережения, назначения премии, формирования прибыли и очереди за кредитом, предоставление займов, правил выбора момента выдачи кредита, определения его объема, срока и объемов выплат. *Тарифным планом* будем называть набор числовых характеристик ССП.

Каждый агент ССП в произвольный момент времени может находиться в состоянии вкладчика, очередника или заёмщика. Вкладчик характеризуется временем пребывания в ССП и функцией, определяющей размер взноса в каждый момент времени; кроме того, он может быть нарушителем, выходящим из системы в тот или иной момент времени[13], или другом вкладчика. Очередника характеризует текущий объем накоплений; объем, накопленный за период накопления, и временя пребывания в очереди. заёмщика характеризует время с момента получения займа, объем невыплаченного кредита и программа выплат. Перечень агентов со всеми их характеристиками, величина остатка кредитной массы на конец периода и объем отчисляемой прибыли определяют состояние ССП при заданном тарифном плане. Упорядоченная по времени последовательность состояний ССП называется *ссудо-сберегательной траекторией* (или, для краткости, траекторией, или ССТ).

Теперь определим прибыль ССП. Логично предположить, что ССП не получает никакой прибыли в момент времени t, если остаток кредитной массы $\Delta_{\text{кон}}(t)$ отрицательный (т.е. если мы находимся в состоянии кассового разрыва). Вместе с тем, если для данной траектории начиная с некоторого момента времени остаток растет (т.е. если постоянно образуются средства, которые не используются для выдачи контрактных сумм и покрытия прочих затрат), то можно отчислять некоторую его часть в прибыль ССП[14]. Будем считать, что в прибыль отчисляется максимально возможная сумма средств такая, что в результате отчисления не возникают кассовые разрывы.

Прибылью $\Gamma(t_0)$ в момент времени t_0 называется такое максимальное значение X, $0 \leqslant X \leqslant \Delta_{\text{кон}}(t_0)$, что при замене остатка $\Delta_{\text{кон}}(t_0)$ на $\Delta_{\text{кон}}(t_0) - X$ измененная ССТ не будет находиться в состоянии кассового разрыва в моменты времени $t \geqslant t_0$.

Прибыль определена только для тех ССТ, у которых с некоторого момента времени t_0 не возникает кассовых разрывов, или, что то же самое, $\Delta_{\text{кон}}(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant t_0$. Такие ССТ будем называть *финансово устойчивыми.*

Замечание. При определении прибыли мы должны знать, как будет вести себя траектория в дальнейшем. На практике мы не знаем будущих значений параметров и должны исходить из их прогноза, обеспечивая с некоторой вероятностью отсутствие разрывов. Более того, может оказаться выгодным допустить кассовый разрыв, так что введенное определение указывает нижнюю оценку реальной прибыли.

Будем говорить, что ССТ *финансово устойчива в сильном смысле*, если

[13] В реальных ССП предусматривается исключение агента из состава вкладчиков в соответствии с определенными правилами. Здесь мы на этом не останавливаемся.

[14] См. сноску 11

она никогда не допускает финансовых разрывов, т.е. $\Delta_{\text{кон}}(t) \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$. Сильно устойчивая ССТ не предусматривает ни очередей, ни займов.

Соответственно, ССП является финансово устойчивой (в сильном смысле) в заданной области экзогенных параметров, если для любого набора из этой области устойчива (в сильном смысле) любая порожденная ею траектория.

2.4.2 Условия финансовой устойчивости

При изучении условий устойчивости ССП будет рассматриваться упрощенный вариант модели. Считаем, что нарушители контракта отсутствуют, а при нехватке кредитной массы очередь не формируется, а используется внешний кредит. Кроме того, предполагаем, что процент по инвестициям не превосходит процента по внешнему кредиту $z \geqslant u$. Предположим также, что в начале каждого периода в ссудо-сберегательную программу вступает одинаковое число вкладчиков, среди которых имеется постоянная доля k друзей. Друзья отличаются от остальных вкладчиков только тем, что не берут кредит и выходят из системы по окончании срока накопления. Взносы всех агентов постоянны и одинаковы. При этих предположениях можно без дальнейшего ограничения общности считать, что число агентов на входе равно $1 + d$, где d — число друзей (так что их доля $k = d/(1 + d)$), а взнос каждого агента равен 1.

Для упрощения формул введем обозначения:

$$c_+ = 1 + c,\ p_+ = 1 + p,\ u_+ = 1 + u. \tag{2.9}$$

Кредитная масса до начала выдачи кредитов. Вычислим кредитную массу $\Delta(\tau)$. Для этого найдем $\Delta(1)$ и выпишем рекуррентную формулу, выражающую $\Delta(t)$ через $\Delta(t-1)$ при $1 \leqslant t \leqslant \tau$.

Согласно (2.7), $\Delta(1)$ состоит из взноса вкладчика и друзей вкладчиков с учетом социальных выплат и инвестиций. Таким образом,

$$\Delta(1) = 1 + d(s + u_+).$$

Докажем, что

$$\Delta(t) = (1 + d)\frac{1 + s + u}{u}\left((1 + u)\cdot\frac{(1 + u)^t - 1}{u} - t\right). \tag{2.10}$$

При $t = 1$ формула верна. Предположим, что она верна для некоторого $t < \tau$, тогда вычислим $\Delta(t + 1)$. Сумма взносов вкладчика с учетом друзей равна $(t + 1)(1 + d)$, в предыдущем периоде остаток кредитной массы положительный. Выплат по кредитам нет. Снова применяя формулу (2.7), получаем:

$$\Delta(t+1) = (1+d)(1+u)\Delta_{\text{кон}}(t) + (1+d)(1+s+u)(t+1) =$$

$$= (1+d)(1+u)\frac{1+s+u}{u}\left((1+u)\cdot\frac{(1+u)^t-1}{u} - t\right) + (1+d)\frac{1+s+u}{u}u(t+1) =$$

$$= (1+d)\frac{1+s+u}{u}\left((1+u)\cdot\frac{(1+u)^{t+1}-1-u}{u} - (1+u)t + u(t+1)\right) =$$

$$= (1+d)\frac{1+s+u}{u}\left((1+u)\cdot\frac{(1+u)^{t+1}-1}{u} - (1+u)(t+1) + u(t+1)\right) =$$

$$= (1+d)\frac{1+s+u}{u}\left((1+u)\cdot\frac{(1+u)^{t+1}-1}{u} - (t+1)\right),$$

что совпадает с (2.10).

2.4.3 Выдача контрактных сумм

По определению, для сильной финансовой устойчивости необходимо и достаточно выполнение неравенства $\Delta_{\text{кон}}(t) \geqslant 0$ для всех t. Из формулы (2.10) следует, что $\Delta_{\text{кон}}(t) \geqslant 0$ при $t < \tau$. Найдем выражение для $\Delta_{\text{кон}}(t)$ при $t \geqslant \tau$.

Начиная с момента времени τ, мы выдаем контрактные суммы и возвращаем средства друзьям вкладчиков. Так как очередей нет, то в каждый период выдается ровно одна контрактная сумма. Её величина равна $M(\tau)(1+\Lambda)$ (см. (2.2)), где объем накоплений $M(\tau)$ равен

$$M(\tau) = (1+p)^\tau + K + (1+p) + s\tau = \frac{(1+p)((1+p)^\tau - 1)}{p} + s\tau, \qquad (2.11)$$

а размер кредита $C(\tau) = \Lambda M(\tau)$. Друзьям вкладчиков возвращается сумма $M(\tau)$.

Поскольку специальные агенты и очередь отсутствуют, то

$$\Delta_{\text{кон}}(t) = \Delta(t) - M(\tau)(1+d+\Lambda), \quad t \geqslant \tau \qquad (2.12)$$

(см. (2.8)).

При $z \geqslant u$ согласно (2.7) имеем

$$\Delta(t) = (1+u+s)\sum_{a\in N(t)} P(t,a) + \sum_{a\in W(t)} B(a) + \Delta_{\text{кон}}(t-1) +$$

$$+ \min\{\Delta_{\text{кон}}(t-1)u, \Delta_{\text{кон}}(t-1)z\}.$$

В нашем случае взнос вкладчика $P(t,a) = 1$, взносы друга вкладчика равны d; число агентов на стадии накопления равно сроку накопления τ, умноженному на коэффициент $(1{+}d)$; число агентов, выплачивающих кредит, равно $\min\{\tau_{\text{кр}}, t-\tau\}$[15]. Из этих соотношений и (2.11) получаем

$$\Delta_{\text{кон}}(t) = \Delta_{\text{кон}}(t-1) + Q(t-1) + F(t), \tag{2.13}$$

где

$$Q(t-1) = \min\{\Delta_{\text{кон}}(t-1)u, \Delta_{\text{кон}}(t-1)z\}, \tag{2.14}$$

$$F(t) = \tau(1+d)(1+s+u) + B\min\{\tau_{\text{кр}}, t-\tau\} - M(\tau)(1+d+\Lambda). \tag{2.15}$$

Величина $Q(t{-}1)$ — это сумма получаемых или выплачиваемых процентов на остаток кредитной массы, $F(t)$ — приток денежных средств по вкладам (с учетом премий на сбережения) и по предоставленным внешним и внутренним кредитам, $Q(t-1) + F(t)$ — чистый приток средств в кредитную массу. Согласно (2.3),

$$B = \frac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} c}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} - 1} M(\tau)\Lambda. \tag{2.16}$$

В силу (2.14)—(2.15)

$$F(t) = \tau(1{+}d)(1{+}s{+}u) + \left(\frac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} c}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} - 1}\min\{\tau_{\text{кр}}, t-\tau\} - 1\right)(\Lambda{-}1{-}d)M(\tau). \tag{2.17}$$

Уравнение (2.13) вместе с соотношениями (2.11), (2.14), (2.17) задает ссудосберегательную траекторию. Заметим, что $F(t)$ возрастает на отрезке $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \tau_{\text{кр}}$ и остается постоянной при $t \geqslant \tau + \tau_{\text{кр}}$. На этот факт опирается доказательство следующей леммы.

Лемма 1. *Если чистый приток средств в кредитную массу $Q(t_0 - 1) + F(t_0) > 0$ для некоторого момента времени t_0, то ССТ финансово устойчива.*

Доказательство. Из (2.13) следует, что $\Delta_{\text{кон}}(t_0) > \Delta_{\text{кон}}(t_0 - 1) + \varepsilon$, где ε — некоторая положительная величина. Но тогда $Q(t_0) > Q(t_0 - 1)$, $F(t_0 + 1) \geqslant F(t_0)$, и следовательно,

$$\Delta_{\text{кон}}(t_0 + 1) > \Delta_{\text{кон}}(t_0 - 1) + \varepsilon > \Delta_{\text{кон}}(t_0 - 1) + 2\varepsilon.$$

Значит, начиная с некоторого момента, величина $\Delta_{\text{кон}}(t)$ становится положительной. $\square$

[15]Первый кредит выплачивается в момент τ — момент окончания накопления первым агентом, а первый платеж по кредиту осуществляется в следующий момент.

Теорема 1. *Для финансовой устойчивости ссудо-сберегательной траектории необходимо выполнение неравенства*

$$Q(\tau + \tau_{кр} - 1) + F(\tau + \tau_{кр}) \geqslant 0, \tag{2.18}$$

и достаточно, чтобы

$$Q(\tau + \tau_{кр} - 1) + F(\tau + \tau_{кр}) > 0. \tag{2.19}$$

В случае $\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1) \geqslant 0$ условие (2.18) является необходимым и достаточным, а при $\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1) < 0$ этим свойством обладает условие (2.19).

Согласно теореме 1 финансовая устойчивость заведомо имеет место, если в тот момент, когда сформировалась полная линейка заёмщиков, чистый приток средств в кредитную массу оказывается положительным (см. (2.19)).

Доказательство. Начнем с доказательства необходимости условия. Предположим, что (2.18) не выполняется. Тогда в силу (2.13) при $t = \tau + \tau_{кр}$ выполнено неравенство

$$\Delta_{кон}(t) < \Delta_{кон}(t - 1). \tag{2.20}$$

Из (2.14) следует, что Q убывает на следующем шаге, в то время как F остается неизменным. Поэтому левая часть (2.18) сохраняет отрицательный знак, и, следовательно, неравенство (2.19) остается справедливым и для $(t+1)$. Повторяя рассуждение, убеждаемся в справедливости (2.20) при любом $t \geqslant \tau + \tau_{кр}$. Если $\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1) < 0$, то отрицательный знак $\Delta_{кон}(t)$ сохраняется для всех последующих периодов, и, следовательно, ССТ не является финансово устойчивой. Если же $\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1) \geqslant 0$, то и $Q(\tau + \tau_{кр} - 1) \geqslant 0$. Теперь из невыполнения (2.18), следует, что $F(\tau + \tau_{кр}) < 0$. Но тогда левая часть (2.18) остается меньше некоторой фиксированной отрицательной величины для всех $t \geqslant \tau + \tau_{кр}$. В силу (2.13) величина $\Delta_{кон}(t)$ должна, начиная с некоторого момента, оставаться отрицательной, а, следовательно, финансовая устойчивость не имеет места.

Если (2.19) не выполняется, то (2.20) превращается в нестрогое неравенство при любом $t \geqslant \tau + \tau_{кр}$. Следовательно, при $\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1) < 0$ финансовая устойчивость не имеет места. Необходимость условия доказана.

Достаточность условия немедленно следует из леммы 1.

Теорема доказана. □

Поскольку $z \geqslant u$, непосредственно из теоремы 1 вытекают два следствия.

Следствие 1. *В случае* $\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1) \geqslant 0$ *условие*

$$\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1)u + F(\tau + \tau_{кр}) \geqslant 0 \tag{2.21}$$

необходимо и достаточно для финансовой устойчивости, а в случае $\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1) < 0$ *этим свойством обладает условие*

$$\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1)z + F(\tau + \tau_{кр}) > 0. \tag{2.22}$$

Следствие 2. *В случае* $F(\tau+\tau_{кр}) \leqslant 0$ *условие (2.21) необходимо и достаточно для финансовой устойчивости, а в случае* $F(\tau+\tau_{кр}) > 0$ *этим свойством обладает условие (2.22).*

Доказательство. В случае $F(\tau + \tau_{кр}) > 0$ необходимое условие (2.18) влечет за собой неравенство $\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1) \geqslant 0$, следовательно, условие (2.21) необходимое. Если выполнено условие (2.21), то $\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1) \geqslant 0$, а, следовательно, условие (2.21) достаточное.

В случае $F(\tau + \tau_{кр}) > 0$ дополнительное неравенство $\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1) \geqslant 0$ влечет за сбой неравенство (2.22), что оказывается достаточно для финансовой устойчивости в силу (2.21). Если же $\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1) < 0$, то условие (2.22) необходимо и достаточнов силу следствия 1. □

Наряду с используемыми до сих пор понятиями устойчивости естественно ввести еще одно. Будем говорить, что ССТ *слабо финансово устойчива*, если на ней объем внешнего займа ограничен. Из теоремы 1 легко выводится соответствующий критерий.

Следствие 3. *ССТ слабо финансово устойчива, но не финансово устойчива тогда и только тогда, когда к моменту формирования полной линейки заёмщиков чистый приток равен нулю и при этом используется внешний займ:* $Q(\tau + \tau_{кр} - 1) + F(\tau + \tau_{кр}) = 0$ *и* $\Delta_{кон}(\tau + \tau_{кр} - 1) < 0$.

Доказательство мы опускаем.

Нижеследующие утверждения полезны для понимания структуры финансово устойчивых ССТ.

Утверждение 1. *Пусть ССТ финансово устойчива, но не сильно финансово устойчива. Тогда* $F(\tau + \tau_{кр}) > 0$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда, поскольку F не убывает, $F(t) \leqslant 0$ при любом $t \geqslant \tau$. Рассматриваемая ССТ не является сильно устойчивой, следовательно, $\Delta_{кон}(t_0) < 0$ для некоторого t_0. Но тогда из равенства (2.13), следует, что $\Delta_{кон}(t) < 0$ для всех $t \geqslant t_0 + 1$, а это противоречит условиям финансовой устойчивости. □

Утверждение 2. *Пусть ССТ финансово устойчива, но не сильно финансово устойчива. Тогда найдется период* t_0 *такой,что* $\tau \leqslant t_0 < \tau + \tau_{\text{кр}}$, $F(t_0) < 0$.

Доказательство. Пусть t_0 — наименьшее число, для которого $\Delta_{\text{кон}}(t_0) < 0$. Это возможно лишь при $\tau \leqslant t_0$. Очевидно, $\Delta_{\text{кон}}(t_0 - 1) + Q(t_0 - 1) \geqslant 0$,значит, $F(t_0) < 0$ в силу (2.13).Из утверждения 1 следует, что $t_0 < \tau + \tau_{\text{кр}}$. □

Полученная картина ССТ вполне соответствует экономической интуиции. После начала выдачи кредитов величина чистого притока $Q(t-1) + F(t)$ может оказаться отрицательной; при этом запас средств, накопленный за начальные периоды, постепенно уменьшается. Но приток денежных средств от вкладчиков и заёмщиков $F(t)$ постепенно растет за счет выплат по кредитам. Возможно, что мы не исчерпаем запас начальных средств $\Delta_{\text{кон}}$ до того, как величина F станет положительной; в этом случае ССТ сильно устойчива. В противном случае приходится прибегать к внешнему займу. Если затем F(t) вырастет настолько, что чистый приток $Q(t-1) + F(t)$ станет положительным, то остаток кредитной массы $\Delta_{\text{кон}}$ также начнет расти и, в конце концов, обретет положительный знак. Тогда ССТ финансово устойчива. Если же $Q(t-1) + F(t)$ останется отрицательным, то устойчивость не имеет места.

2.4.4 Условия сильной финансовой устойчивости

При сильной финансовой устойчивости ССТ уравнение (2.13) запишется так:

$$\Delta_{\text{кон}}(t) = \Delta_{\text{кон}}(t-1) + \Delta_{\text{кон}}(t-1)u + F(t), \tag{2.23}$$

где $F(t)$ определяется выражениями (2.15)— (2.17). Выпишем явную формулу для вычисления $\Delta_{\text{кон}}(t)$. Пусть $t \leqslant \tau + \tau_{\text{кр}}$. Многократно применяя (2.23), (2.15) и используя (2.16), получаем:

$$\Delta_{\text{кон}}(t) = \Delta_{\text{кон}}(\tau)\cdot(1+u)^{t-\tau} + F(\tau+1)(1+u)^{t-\tau-1} + F(\tau+2)(1+u)^{t-\tau-2} + \ldots + F(\tau) =$$

$$= (1+d)\frac{1+s+u}{u}\left((1+u)\frac{(1+u)^{\tau}-1}{u} - \tau\right)\cdot(1+u)^{t-\tau} -$$

$$-M(\tau)(1+d+\Lambda)((1+u)^{t-\tau-1} + \ldots + 1) + \tau(1+d)(1+s+u)(u_{+}^{t-\tau-1} + \ldots + 1) +$$

$$+B\cdot((1+u)^{t-\tau-1}\cdot 1 + (1+u)^{t-\tau-2}\cdot 2 \ldots + 1\cdot(t-\tau)) =$$

$$= (1+d)\frac{1+s+u}{u}\left(\frac{(1+u)^{\tau}-1}{u}\cdot(1+u)^{t-\tau+1} - \tau\right) -$$

$$-M(\tau)(1+d+\Lambda)\frac{(1+u)^{t-\tau+1}-1}{u}+$$

$$+B\left(\frac{(1+u)^{t-\tau}+(1+u)^{t-\tau-1}+\ldots+(1+u)+(t-\tau)}{u}\right)=$$

$$=(1+d)\frac{1+s+u}{u}\left(\frac{(1+u)^{\tau}-1}{u}\cdot(1+u)^{t-\tau+1}-\tau\right)-$$

$$-M(\tau)\left(1+d+\Lambda\left[\frac{(1+u)^{t-\tau+1}-1}{u}-\frac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}c}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}-1}\left(\frac{(1+u)^{t-\tau+1}-1}{u^2}-\frac{t-\tau}{u}\right)\right]\right).$$

Таким образом, при $t\leqslant\tau+\tau_{\text{кр}}$

$$\Delta_{\text{кон}}(t)=(1+d)\frac{1+s+u}{u}\left(\frac{(1+u)^{\tau}-1}{u}\cdot(1+u)^{t-\tau+1}-\tau\right)-$$

$$-M(\tau)\left(1+d+\Lambda\left[\frac{(1+u)^{t-\tau+1}-1}{u}-\frac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}c}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}-1}\left(\frac{(1+u)^{t-\tau+1}-1}{u^2}-\frac{t-\tau}{u}\right)\right]\right),$$

где, согласно (2.1), $M(\tau)=\frac{(1+p)(1+p)^{\tau}-1)}{p}+s\tau$.

Начиная с момента времени $t=\tau+\tau_{\text{кр}}$, $F(t)$ не меняется. Следовательно, при $t\geqslant\tau+\tau_{\text{кр}}$ остаток кредитной массы вычисляется по формуле $\Delta_{\text{кон}}(t)=\Delta_{\text{кон}}(t-1)u_{+}+F(\tau+\tau_{\text{кр}})$. Снова, используя неубывание функции $F(t)$ по t, получаем необходимое и достаточное условие сильной финансовой устойчивости.

Утверждение 3. *Пусть $t_0\geqslant\tau$ — минимальный период такой, что приток средств от агентов неотрицателен $F(t_0)\geqslant 0$. ССТ сильно финансово устойчива тогда и только тогда, когда остаток кредитной массы в предыдущий период также неотрицателен $\Delta_{\text{кон}}(t_0-1)\geqslant 0$.*

Доказательство. Если ССТ сильно финансово устойчива, то, по определению, неравенство $\Delta_{\text{кон}}(t)\geqslant 0$ выполнено для всех t.

Предположим, что $\Delta_{\text{кон}}(t_0-1)\geqslant 0$. Тогда $\Delta_{\text{кон}}(t_0)=\Delta_{\text{кон}}(t_0-1)u_{+}+F(t_0)\geqslant 0$. Так как $F(t)\geqslant F(t_0)$ при $t\geqslant t_0$, то $F(t)\geqslant 0$, а значит $\Delta_{\text{кон}}(t)\geqslant 0$ при всех $t\geqslant t_0$.

Теперь покажем, что $\Delta_{\text{кон}}(t)\geqslant 0$ при $\tau\leqslant t\leqslant t_0-2$. Действительно, из (2.14) имеем $\Delta(t)=\frac{\Delta(t+1)-F(t+1)}{u}$. Так как по условию $F(t)\geqslant 0$ при $\tau\leqslant t\leqslant t_0-1$, то для всех $t\leqslant t_0-2$ имеем $\Delta_{\text{кон}}(t)\geqslant 0$, если $\Delta_{\text{кон}}(t+1)\geqslant 0$. Последнее неравенство, согласно предположению, верно для $t=t_0-2$, а значит (по индукции) — и для всех меньших t. Утверждение доказано. $\square$

Суммируем наши выводы в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть t_0 — минимальное число такое, что $t_0 \geqslant \tau$ и*

$$F(t_0) = \tau(1+d)(1+s+u) + \left(\Lambda\left[\frac{(1+c)^{\tau_{кр}}c}{(1+c)^{\tau_{кр}}-1}(t_0-\tau)-1\right]-1-d\right)M(\tau) \geqslant 0. \tag{2.24}$$

Для сильной финансовой устойчивости ССТ с параметрами p, u, s, c, τ, $\tau_{кр}$, Λ необходимо и достаточно выполнения неравенства:

$$\Delta_{кон}(t_0-1) = (1+d)\frac{1+s+u}{u}\left(\frac{(1+u)^{\tau}-1}{u}\cdot(1+u)^{t_0-\tau}-\tau\right)-$$
$$-\left(\frac{(1+p)((1+p)^{\tau}-1)}{p}+s\tau\right)\cdot\left(1+d+\Lambda\left[\frac{(1+u)^{t_0-\tau}-1}{u}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{(1+c)^{\tau_{кр}}c}{(1+c)^{\tau_{кр}}-1}\left(\frac{(1+u)^{t_0-\tau}-1}{u^2}-\frac{t_0-1-\tau}{u}\right)\right]\right) \geqslant 0.$$

Теорема 1 доказана в предположении, что на входе ССП наблюдается «поток» агентов постоянной численности с одинаковыми и независящими от времени параметрами. Стоит отметить, что если в ССП одновременно входят несколько «потоков» с такими свойствами, то сильная устойчивость ССТ заведомо обеспечивается выполнением условий сильной устойчивости для каждого «потока». Покажем, что при некоторых разумных ограничениях на параметры, величина $F(\tau+\tau_{кр})$ будет неотрицательной, так что выполняется (2.24). Сначала установим справедливость двух вспомогательных неравенств.

Лемма 2. *Для $z > 1$, $T > 0$ верны неравенства:*

$$q(z,T) = \frac{Tz^T(z-1)}{z^T-1} > 1, \tag{2.25}$$

$$\frac{Tz^T(z-1)}{z^T-1} + \frac{T(z-1)}{z(z^T-1)} > 2. \tag{2.26}$$

Кроме того, функция $q(z)$ возрастает по z и T.

Доказательство. Имеем

$$q(z,T) = \frac{Tz^T}{z^{T-1}+z^{T-2}+\ldots+1} = \frac{T}{z^{-1}+z^{-2}+\ldots+z^{-T}},$$

так, что возрастание по z очевидно. Неравенство (2.25) немедленно следует из соотношения $Tz^T > z^{T-1}+z^{T-2}+\ldots+1$. Как легко проверить, знак производной выражения (2.25) по T совпадает со знаком выражения $z^T -$

$1 - \ln z^T$, которое, очевидно, положительно при $z > 1$. Чтобы проверить неравенство (2.26), запишем эквивалентное неравенство

$$g(z) = Tz^{T+1}(z-1) + T(z-1) - 2z(z^T - 1) > 0.$$

Дважды дифференцируя $g(z)$, имеем

$$g'(z) = T(T+2)z^{T+1} - (T+1)(T+2)z^T + T + 2,$$
$$g''(z) = T(T+1)(T+2)(z^T - z^{T-1}).$$

Рассмотрим множество $z > 1$. Очевидно, что на нем $g''(z) > 0$, значит, $g''(z)$ возрастает и положительна, поскольку $g''(1) = 0$. Но тогда по аналогичной причине $g(z)$ также положительна. Лемма доказана. $\square$

Замечание. Нетрудно убедиться в том, что при естественном понимании неопределенностей для $z \geqslant 1, T \geqslant 0$ имеют место нестрогие неравенства типа (2.25) и (2.26).

Утверждение 4. *Если* $\Lambda \geqslant 1$, $u \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $\tau_{кр} \geqslant \tau > 0$, $c \geqslant p > 0$, $d = 0$, *то* $F(\tau + \tau_{кр}) > 0$.

Доказательство. Рассмотрим формулу (2.17) при $t = \tau + \tau_{\text{кр}}$ и $d = 0$. Заметим, что коэффициент при параметре Λ положителен в силу (2.25). Следовательно, при $\Lambda = 1$ значение этого слагаемого будет минимальным. Отсюда

$$F(\tau + \tau_{\text{кр}}) \geqslant \tau(1+s+u) - M(\tau) + \left[\frac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}c}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} - 1}\tau_{\text{кр}} - 1\right] M(\tau) \geqslant$$
$$\geqslant \tau - \frac{(1+p)((1+p)^\tau - 1)}{p} + \left[\frac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}c}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} - 1}\tau_{\text{кр}} - 1\right]\frac{(1+p)((1+p)^\tau - 1)}{p}. \tag{2.27}$$

В (2.27) использована формула (2.11), согласно которой

$$M(\tau) = \frac{(1+p)((1+p)^\tau - 1)}{p} + s\tau,$$

и неравенство (2.25), обеспечивающее в (2.27) положительность коэффициента при $M(\tau)$ во втором его вхождении. Теперь для доказательства утверждения 4 достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$\frac{p\tau}{(1+p)((1+p)^\tau - 1)} + \tau_{\text{кр}}\frac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}c}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} - 1} \geqslant 2. \tag{2.28}$$

Второе слагаемое является значением функции $q(1+c, \tau_{\text{кр}})$, определенной в (2.25). Согласно лемме 2, q возрастает по обоим переменным. Из условия следует, что $q(1+c, \tau_{\text{кр}}) \geqslant q(1+p, \tau)$. Поэтому (2.28) следует из (2.26). Утверждение доказано. $\square$

Очевидно, что в условиях утверждения 4 неравенство $F(\tau + \tau_{\text{кр}}) \geqslant 0$ выполняется и при $\Lambda < 1$, если Λ не слишком мало.

2.5 Экспериментальное исследование ссудо-сберегательных траекторий

2.5.1 Базовый тарифный план

Задача экспериментального исследования состояла в изучении устойчивости тарифного плана, близкого к реально используемому в рамках «Народной ипотеки», при варьировании внутренних и внешних параметров. В базовом примере ежемесячный взнос вкладчиков был принят равным 10 тыс. руб., срок накопления — 5 лет; процентная ставка по вкладу — 2%; начисление ежемесячное; срок кредита в полтора раза больше срока накопления; процентная ставка по кредиту — 6%, начисление ежемесячное; размер кредита равен 100% суммы накоплений на вкладе. Социальная выплата равнялась 30% суммы денежных средств, внесенных участником на вклад за календарный месяц. На социальные выплаты проценты по депозиту не начислялись. Предполагаем, что $d = 0,2$, так что доля друзей вкладчиков (отказывающихся от кредита после завершения 5 и 6 лет накопления) $k = \frac{d}{1+d}$ составляет 16,7% численности всех агентов. Процент на внешнем рынке равен 8% годовых. Очереди и досрочные расторжения договоров отсутствуют. Не учитываются также дефолты по кредитам.

Полная линейка заёмщиков формируется через 12,5 лет (5 лет накопления и 7,5 лет выплаты кредита). Поэтому расчеты разумно ограничить 18 годами (точнее, в модели рассматривалось 200 периодов времени) — в этот период полная линейка заёмщиков уже функционирует некоторое время и процесс стабилизирован.

На рис. 1 показан остаток кредитной массы при заданных параметрах. Первые 5 лет остаток растёт (мы не выдаём контрактные суммы, а только накапливаем денежные средства). Далее, приблизительно до 10-го года остаток уменьшается засчёт выдачи кредитов. Выплаты по кредиту постепенно растут, и, начиная с 130-го месяца, остаток снова увеличивается. Таким образом, при данных параметрах наблюдается сильная финансовая устойчивость.

Оценим теперь размер прибыли ССП в базовом примере. В принципе, можно изымать весь остаток кредитной массы, начиная с момента, когда выплаты по кредитам становятся достаточно большими (минимум графика на рис. 1, это 135-й период времени). Однако на практике этот способ неудобен, он требует точного прогноза всей траектории.

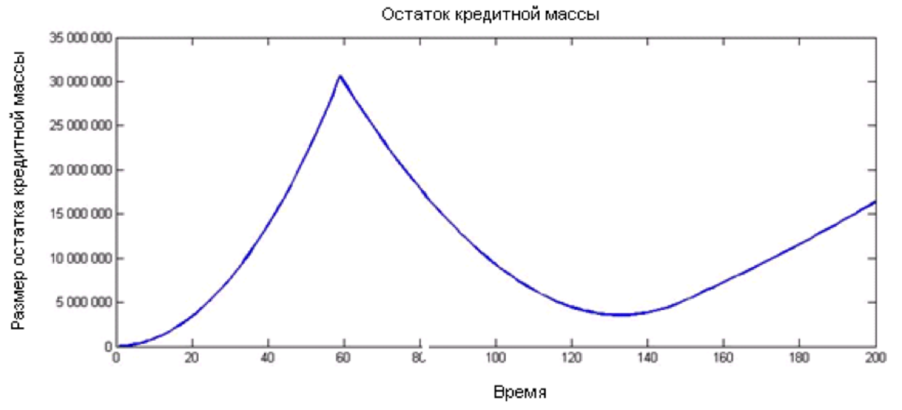

Рис. 1: Остаток кредитной массы.

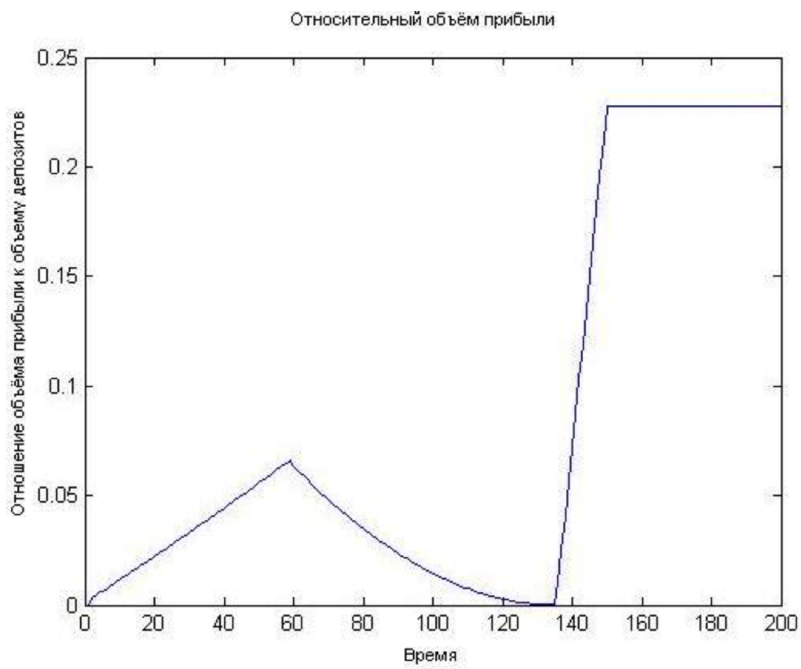

Рис. 2: Относительный объём прибыли.

Более практичным выглядит правило, в соответствии с которым в каждый момент времени изымается фиксированный процент средств из остатка. Естественно использовать такую ставку процента, при которой сохраняется сильная финансовая устойчивость.

В результате расчётов получаем, что максимальная допустимая ставка равна 1,8%.Удобно рассматривать относительный объём прибыли, то есть отношение прибыли к объему депозитов в данный момент времени. График относительного объёма прибыли за период изображен на рис. 2.

Поведение объёма прибыли соответствует поведению кредитной массы до периода 135 (11 лет с начала работы системы). В 136-й период величина $F(t)$ становится положительной, и прибыль пропорциональна остатку кредитной массы. Начиная с периода 150 (12,5 лет работы системы) становится постоянной (сформирована полная линейка заёмщиков).

2.5.2 Границы устойчивости и прибыльности: варьирование параметров тарифного плана

Исследуем, как изменятся объёмы и максимальный процент прибыли при изменении следующих параметров: доли друзей вкладчиков, отношения объёма кредита к объёму накопления, отношения срока кредитования к сроку накопления и ставок процента на государственные субсидии, на инвестиции, на кредиты и на накопления.

Под отношением объёма прибыли к объему депозитов мы будем подразумевать отношение суммарного объёма прибыли к суммарному объему депозитов в момент времени 200.

Изменение доли друзей вкладчиков d.

Определенная доля вкладчиков, которые отказываются от кредита и чьи средства служат источником финансирования долгосрочных кредитов, жизненно необходима для стабильной работы ССП. На рис. 3 показано, как изменяются параметры прибыли при изменении доли друзей d.

При доле друзей $d = 0,1$ сильная финансовая устойчивость нарушается, но ССП остается финансово устойчивой даже при отсутствии друзей вкладчиков. По мере роста количества друзей растет и прибыль.

Изменение объема кредита Λ. Объем кредита определяется как доля Λ объема накоплений. На рис. 4 показано, как влияет изменение этой доли на прибыль.

Как и следовало ожидать, увеличение Λ приводит к уменьшению прибыли. Граница сильной финансовой устойчивости достигается при $\Lambda = 1,1$, а граница финансовой устойчивости — при $\Lambda = 3,5$. Отметим, что относительно небольшие изменения этого параметра довольно существенно влияют на объем и допустимый процент прибыли.

Изменение срока кредитования. Напомним, что в базовом примере срок кредита равен 150% срока накопления. Увеличение срока кредита приводит к уменьшению прибыли. Граница сильной финансовой устойчивости достигается при отношении срока кредитования к сроку накопления,равном 1,7, а граница финансовой устойчивости — при отношении, равном 5.

Изменение процентных ставок: субсидий на сбережения, инвестиционного дохода, ставки по внешнему кредиту. Для всех трех параметров наблюдается похожая динамика: максимальный процент и объем прибыли увеличиваются при увеличении ставки, при этом система реагирует слабее, чем на изменение рассмотренных выше параметров. Реакция на изменение доходности инвестиций отражена на рис. 5. Сильная финансовая устойчивость

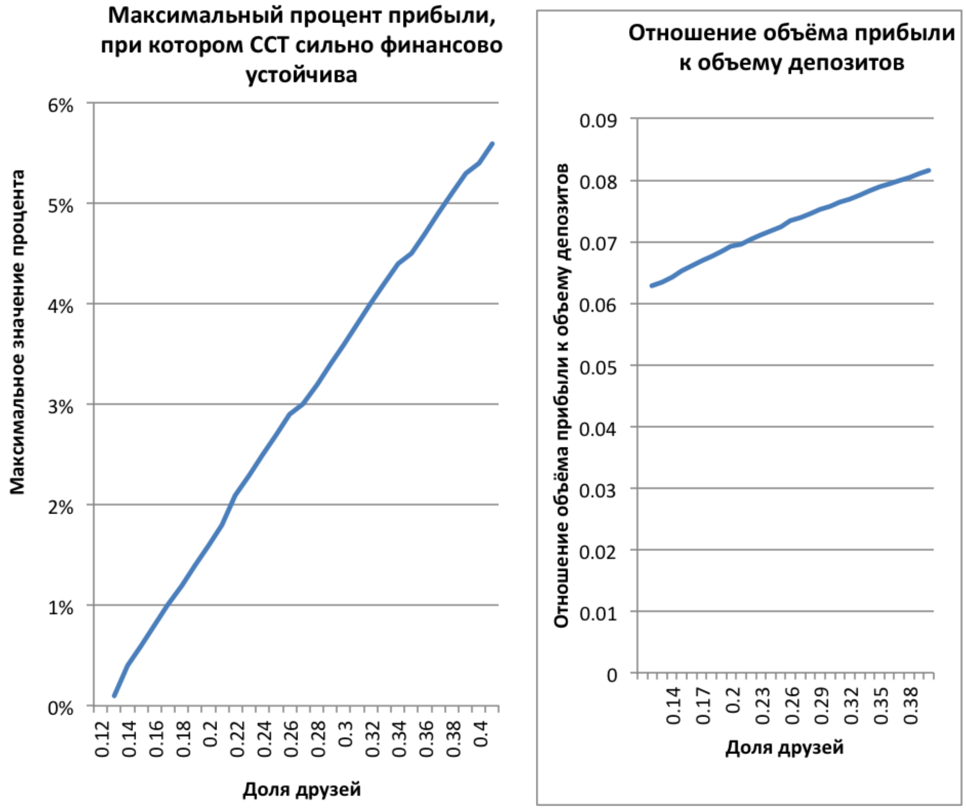

Рис. 3: Изменение доли друзей.

наблюдается даже при нулевой ставке процента по субсидиям. Для процента по кредиту граница сильной финансовой устойчивости достигается при 3,9%, а финансовой устойчивости — при 1,5%.

Изменение процента на накопления. Соответствующая динамика отражена на рис. 6.

При увеличении процента на накопления прибыль падает. Граница сильной финансовой устойчивости достигается при значении 3,6%, финансовой устойчивости — при 7,5% . Изменение этого параметра, как и других процентных ставок, слабее влияет на границы устойчивости, чем изменение объема кредита или времени кредитования.

2.5.3 Падение притока вкладчиков

Устойчивость к изменению притока вкладчиков — важнейшее свойство ссудо-сберегательных траектории. В данной модели была проведена серия соответствующих расчетов. А именно, в описанном выше базовом примере для данных параметрах рассматривались ситуации падения притока на величину $1-\lambda$, $0 \leqslant \lambda < 1$ в разные моменты времени t после падения приток вкладчиков оставался неизменным. Таким образом, значение $t = 0,5$ соответствовало падению притока вкладчиков на 50%, а $t = 0$ — отсутствию притока.

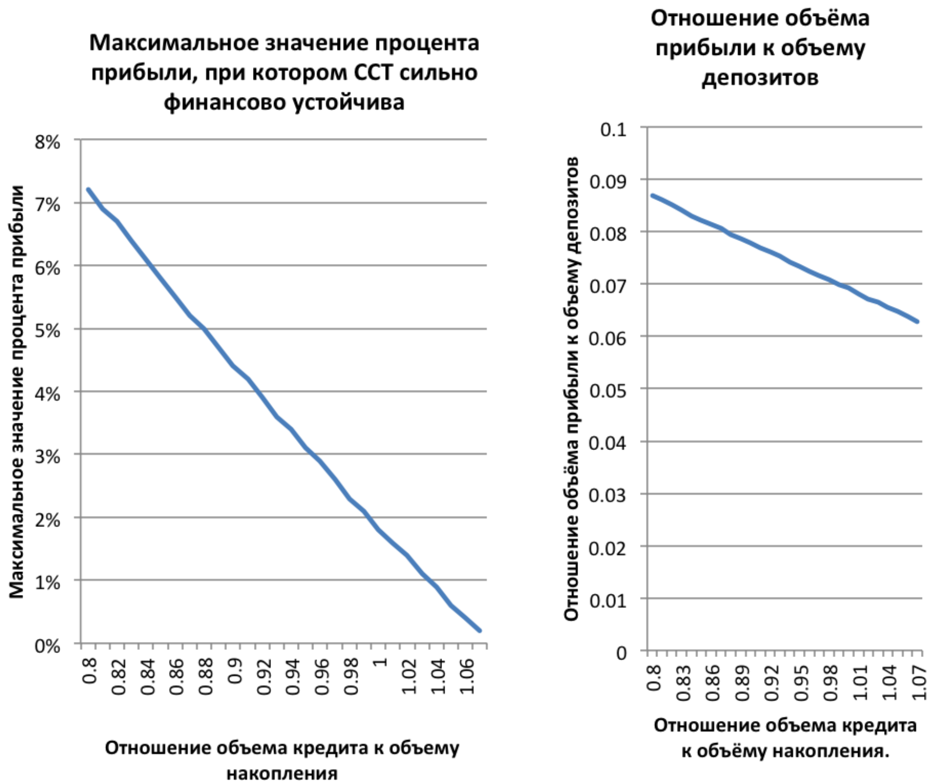

Рис. 4: Изменение объёма кредита.

В результате эксперимента оказалось, что даже полное прекращение притока вкладчиков в моменты времени $t > 170$ не нарушает сильную финансовую устойчивость. На рис. 7 показано, как изменяется количество периодов использования внешнего займа в зависимости от периода t , когда произошло возмущение (вертикальная ось) и его величины λ (горизонтальная ось).

На рисунке изображены кривые, соответствующие постоянным количествам периодов внешнего займа после падения притока. Таким образом, область 0 справа соответствует сильной устойчивости. Как мы видим, при незначительном падении притока вкладчиков (до 0,83 от общего количества) или при падении притока после 163-го периода сохраняется сильная устойчивость.

При более значительном уменьшении притока вкладчиков эффект зависит от того, в какой период времени это уменьшение происходит. Если момент шока достаточно удален от начала функционирования системы, то падение притока слабо влияет на число периодов внешнего займа (уже выдано достаточно кредитов, чтобы поддерживать систему). самые плохие сценарии наблюдаются при падении притока вкладчиков в 89—90-е периоды. К моменту шока уже выдано много кредитов, кредитная масса не очень велика, а приток $F(t)$ еще отрицателен, поэтому уменьшение притока вкладчиков неблагопри-

Рис. 5: Изменение доходности инвестиций.

ятным образом влияет на сильную устойчивость ССТ. Тем не менее, даже в случае падения притока в 80-90 периоды финансовая устойчивость сохраняется: прибыль ССТ временно идет на погашение займов (сроком до 5 лет), а затем становится положительной.

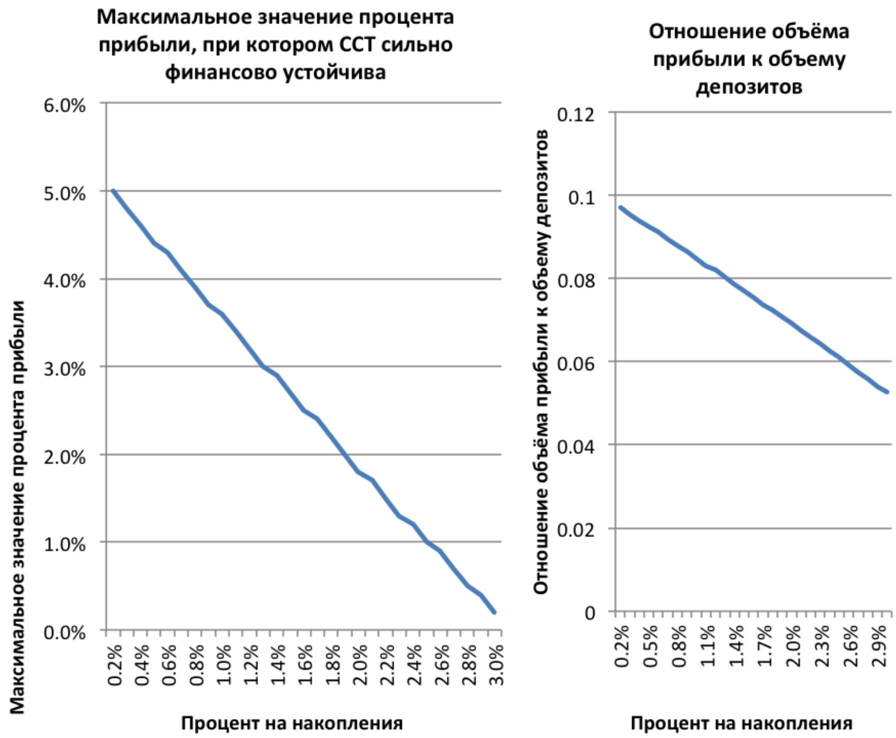

Рис. 6: Изменение процента на накопления.

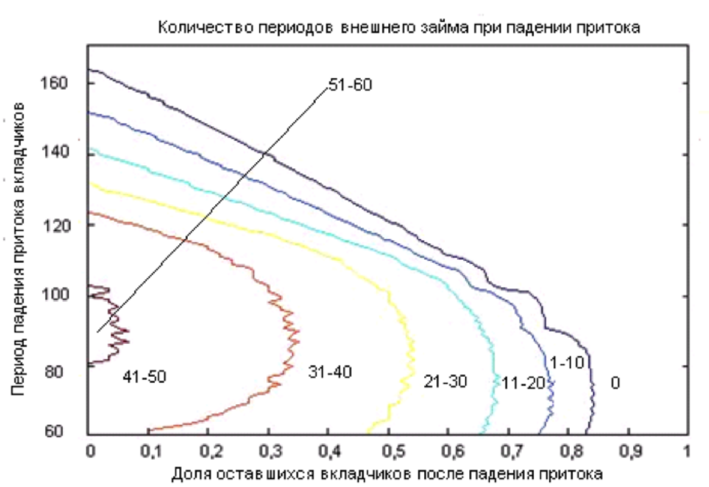

Рис. 7: Падение притока вкладчиков.

3. Линейки тарифных планов ссудо-сберегательных программ

3.1 Основные результаты главы

Основными результатами данной главы являются следующие. Сформирован подход к к конструированию линеек (наборов тарифных планов). Описаны требуемые свойства линеек: эффективность, правильность, сплошнота, справедливость. На основе модели, построенной в предыдущей главе строится пример, демонстрирующий, что при нынешних российских условиях существуют линейки, обладающие перечисленными свойствами и включающие, по крайней мере, пять субсидируемых тарифных планов - от однолетнего до пятилетнего. Отсюда, в частности, следует и существование эффективных линеек.

Глава организована следующим образом. Раздел 3.2 посвящен изложению общих принципов конструирования линеек. Здесь вводятся понятия эффективной, правильной, сплошной и справедливой линейки, предлагается модель для исследования линеек. В разделе 3.3 строится требуемый пример. Влияние параметров тарифных планов на целевые функции участников ССП рассмотрено в разделе 3.4.

3.2 Принципы конструирования линеек тарифных планов

3.2.1 Эффективность и другие свойства линеек

Как отмечалось во введении, под тарифным планом мы понимаем набор из восьми параметров: срок накопления, ставка по депозиту, ставка премии (субсидии) на сбережения, максимальная и минимальные величины ежемесячного взноса, на которые начисляется премия, срок кредита, отношение объема кредита к накопленной сумме, процент по кредиту. Набор тарифных планов мы называем *линейкой*.

Ниже будет показано, что при подходящем выборе параметров использование линейки с тарифными планами, предусматривающими разные сроки накопления, вместо одного пятилетнего плана может быть выгодно всем трем агентам — вкладчику, банку и государству. Вначале попытаемся пояснить, почему это в принципе возможно.

Пусть наряду с пятилетним введен четырехлетний план с меньшей ставкой субсидии и несколько худшими для потребителя условиями накопления и кредитования. Очевидно, потребителю придется для покупки той же квартиры выплачивать больший ежемесячный взнос и при накоплении, и при возврате кредита. Несмотря на это он может предпочесть четырехлетний план пятилетнему, поскольку стремится сократить срок ожидания квартиры. Ожидание связано с издержками — необходимостью жить в менее удобной квартире или даже арендовать жилье. Таким образом, он сделает выбор, сопоставляя увеличение полезности от более раннего получения квартиры с дополнительными издержками.

Итак, предположим, что благодаря подходящему назначению параметров четырехлетнего плана часть потребителей перешла с пятилетнего плана на четырехлетний. Если полезность владения квартирой в течение года одинакова для всех, то ясно, что переход осуществят более состоятельные агенты — для них дополнительные расходы менее значимы. Поскольку теперь они будут получать дотации меньшего размера, государство окажется в выигрыше. Но выиграет также и банк, поскольку выплаты потребителей увеличатся. Аналогичные возможности Парето- улучшения в принципе возникают и при дополнении линейки с двумя ссудо-сберегательными планами трехлетним планом и т.д.

Как следует из приведенных рассуждений, распределение вкладчиков по тарифным планам в зависимости от дохода позволяет добиться более точной социальной адресности субсидий. Эта проблема весьма актуальна. Расчеты показывают, что фактически жилищными субсидиями на начальный взнос пользуются представители наиболее состоятельных 4% населения, которые могли бы приобрести жилье и без поддержки государства[1] Чтобы избежать использования коротких планов линейки состоятельными гражданами, целе-

[1]На субсидирование начального взноса в бюджете Краснодарского края в 2011 г. было выделено 743 млрд руб., что обеспечило субсидиями 1820 семей; средняя субсидия составила 408 тыс. руб. на семью (Эффективность и результативность... (2011)). Согласно данным о 245 получателях субсидий средний размер полученного ими ипотечного кредита в отделениях Сбербанка Краснодарского края был равен 1400 тыс. руб. Средняя площадь приобретенной ими квартиры составляла 53 кв. м по цене 40 тыс. руб. за 1 кв. м. Кредит на срок до 7,5 лет предоставлялся по средней ставке 13,5%, а его обслуживание обходилось в 24,8 тыс. руб. в месяц. Согласно распределению населения по доходам, в 2011 г. эти выплаты могли себе позволить только представители наиболее состоятельных 4,3% населения (в предположении, что платеж не превосходил 20% дохода). А для потребителей из девятой и восьмой доходных групп обслуживание кредитов уже оказывалось непосильным: сбережения таких семей составляли от 10 до 18 тыс. руб. в месяц.

сообразно ограничить право на субсидию тем, кто уже располагает избыточной жилой площадью; целесообразно также ввести для получателей субсидий запрет на быструю продажу купленного жилья или сдачу его в наем.

Расширение линейки за счет более коротких ТП увеличит спрос на проекты дешевого жилья экономического класса. Девелоперы смогут быстрее предложить проекты в новом сегменте, снизив цены в обмен на массовые продажи жилья. Благодаря первым результатам повысится доверие населения и к длительным планам накопления.

Если заданы цены жилья и целевые функции всех агентов — государства, потребителей и банка, то можно говорить об *эффективности* (Парето-оптимальности) линейки в обычном смысле — как такого набора тарифных планов, который нельзя улучшить для одного агента, не ухудшив их одновременно для другого. Наряду с эффективностью полезно иметь в виду ряд других свойств линеек ТП.

Назовем линейку *правильной*, если исключение любого подмножества из её промежуточных[2] тарифных планов невыгодно ни одному из агентов, и локально правильной, если ни одному из агентов невыгодно исключение любого (одного) промежуточного плана. Правильная линейка устойчива в том смысле, что все три агента (потребитель, банк и государство) заинтересованы в сохранении её структуры. Будем говорить, что линейка является сплошной, если она содержит планы с любым сроком накопления — от одногодичного до заданного максимального и при этом каждый из планов *непуст*, т.е. выбран хотя бы одним участником.

Назовем линейку *справедливой*, если для каждой пары её тарифных планов план с большим значением максимального субсидируемого взноса характеризуется небольшим сроком накопления, небольшими ставками премии на сбережения и неменьшими ставками процента за кредит. Это свойство позволяет организовать линейку так, что более состоятельным участникам оказывается выгодным выбирать планы с меньшими сроками накопления, более низкими ставками премии на сбережения и более высокими ставками процента за кредит. Увеличение премии по мере уменьшения дохода вкладчика означает, что мы больше помогаем тем, кто больше нуждается. Уменьшение ставки по кредиту по мере уменьшения взноса возможно за счет снижения ставок по депозиту. Кроме того, поскольку участники, копившие более длительный срок, продемонстрировали тем самым свою надежность как заёмщиков, банку естественно снизить для них маржу, чтобы привлечь вкладчиков.

Справедливые линейки обеспечивают плавный переход агентов к более

[2] Под «промежуточным» понимается план, предусматривающий срок накопления, не являющийся в линейке ни минимальным, ни максимальным.

рыночным ипотечным планам по мере роста доходов.

Ниже будет построен пример сплошной эффективной правильной и справедливой линейки в условиях, близких к российским.

3.2.2 Поведение потребителей

При моделировании линеек ТП наиболее трудная задача состоит в описании поведения потребителей — участников ССП, покупателей жилья. Очевидно, приток участников и их распределение по тарифным планам зависят не только от характеристик ТП, входящих в линейку, но и от широкого набора экономических условий: доходов населения, динамики цен на жилье и другие товары, банковских ставок по депозитам и кредитам и т.п. Поскольку наша основная цель — продемонстрировать целесообразность применения линеек, мы будем рассматривать максимально простую ситуацию. А именно: мы будем считать, что приток вкладчиков не зависит от выбора линейки и постоянен во времени и что функция распределения семей по доходам задана и также не зависит от времени. Каждый вкладчик представляет семью одинаковой численности, все вкладчики планируют приобрести квартиры одинаковой площади и стоимости. Каждый участник готов ежемесячно вносить на свой счет на стадии накопления и платить по кредиту суммы, не превосходящие определенной доли дохода его семьи. Считаем, что эта доля не зависит от дохода и равна 20%[3]. Премию на сбережения считаем равной фиксированной доле взноса, определенной тарифным планом. «Друзья» вкладчиков отсутствуют[4].

Тарифный план является *допустимым* для участника ССП, если при его использовании он может приобрести желаемую им квартиру, осуществляя при накоплении и выплате кредита регулярные платежи, не превосходящие заданной доли его семейного дохода. С точки зрения потребителя каждый тарифный план характеризуется издержками приобретения квартиры и полезностью пользования квартирой. Издержки приобретения исчисляются как дисконтированная сумма выплат на стадиях накопления и кредитования. Разность между дисконтированной полезностью с момента получения квар-

[3]Учет зависимости максимального допустимого взноса от дохода не требует изменения излагаемой ниже методологии.

[4]Под друзьями вкладчиков понимают агентов, которые по окончании срока накопления отказываются получать кредит. Обычно в случае пятилетнего или более длительного срока они получают весь накопленный вклад, включая премию на сбережения. Благодаря премии эффективный процент на сбережения выше процента в надежных банках. Тем самым снижаются риски участия в программе, повышается е привлекательность. В промежуточных планах также возможны компенсации вкладчикам, не получившим кредит (за счет банка или совместно с государством). Такой вкладчик может иметь право на получение вклада с процентами по ставке, действовавшей в банке на момент заключения договора для обычных депозитов соответствующей срочности.

тиры и издержками составляет выигрыш потребителя от использования данного плана. Наше основное предположение о поведении потребителя состоит в том, что он среди всех предлагаемых ему ТП выбирает допустимый ТП с максимальным выигрышем.

Из этого и других сформулированных выше предположений, зная распределение рассматриваемой совокупности по доходам, можно найти их распределение по тарифным планам любой линейки.

Трудный вопрос — как исчислить полезность пользования квартирой в течение «элементарного» периода времени (в наших расчетах — месяца). В качестве нижних оценок полезности можно рассматривать цену аренды или величину выплаты по ипотечному кредиту для квартиры заданной площади. Соответствующие величины могут быть оценены по статистическим данным.

При дополнении линейки каким-либо тарифным планом часть потребителей могут переключиться на него, если он для них допустим и обеспечивает положительный прирост выигрыша.

Укажем формулы для исчисления полезности, издержек и выигрыша потребителя. Обозначим размер взноса потребителя через P, выплаты по кредиту через B, время накопления и кредитования через τ и $\tau_{\text{кр}}$ соответственно. Кроме того, введем коэффициент дисконтирования λ (в расчетах он брался равным 8% в год); положим $\delta = \frac{1}{1+\lambda}$.Тогда издержки I приобретения квартиры составляют

$$I = P(1+\delta+\delta^2+\ldots+\delta^{\tau-1})-P(\delta^\tau+\ldots+\delta^{\tau+\tau_{\text{кр}}-1}) = P\frac{1-\delta^{\tau+1}}{1-\delta}+B\delta^{\tau+1}\frac{1-\delta^{\tau_{\text{кр}}}}{1-\delta} \tag{3.1}$$

Пусть потребитель получает полезность A от использования квартиры в течение месяца, начиная с момента $\tau+1$. Тогда интегральная полезность L на бесконечном интервале времени (приведенная к моменту вступления потребителя в систему) вычисляется по формуле:

$$L = A(\delta^\tau+\delta^{\tau+1}+\ldots) = \frac{\delta^\tau}{1-\delta}A \tag{3.2}$$

Выигрыш потребителя Q определяется как разность полезности и издержек:

$$Q = L - I = \frac{1}{1-\delta}[A\delta^\tau - P(1-\delta^\tau) + B\cdot\delta^\tau(1-\delta^{\tau_{\text{кр}}})]. \tag{3.3}$$

Заметим, что если линейка содержит два плана, один из которых дает потребителю меньший выигрыш и предусматривает больший взнос по депозиту и платеж по кредиту, то этот план выбран потребителями не будет, так что включать его в линейку не имеет смысла. В дальнейшем рассматриваются тарифные планы, используя которые потребитель выбирает максимальный субсидируемый взнос по депозиту, который оказывается равным платежу по кредиту. Если линейка из таких планов составлена рационально, то нашему потребителю не нужно считать выигрыш: из множества допустимых для него планов он должен всегда выбирать план с максимальным взносом. Для справедливой сплошной линейки это эквивалентно выбору допустимого плана с минимальным сроком накопления.

Желательно, чтобы эффективная ставка доходности вклада была несколько выше коммерческой ставки по депозиту в надежном банке настолько, чтобы можно было рассчитывать на положительный, но не чрезмерный приток «друзей» вкладчиков. Считая, что процент по вкладу начисляется с самого первого периода, получаем следующее уравнение для вычисления эффективной ставки доходности $p_{\text{эфф}}$:

$$\big((1+p_{\text{эфф}})^{\tau}-1\big)\,\frac{1+p_{\text{эфф}}}{p_{\text{эфф}}}=\left[\big((1+p)^{\tau}-1\big)\,\frac{1+p}{p}+s\tau\right],$$

где p — ставка процента по вкладу, s — ставка субсидии в процентах от взноса на вклад, τ — число периодов накопления.

3.2.3 Расчёт прибыли ССП

Прибыль ССП, отождествляемая в нашем случае с прибылью банка, а также расходы бюджета на субсидирование вкладчиков рассчитываются на основе модификации динамической модели стройсберкассы, описанной в Главе 2. В исходной формулировке предусматривалось формирование резерва на покрытие кассовых разрывов[5] из получаемого в рамках ССП процентного дохода от кредитов и внешних инвестиций. При исчислении чистой прибыли этот объем резерва рассматривался как составляющая издержек. Такой подход можно считать естественным для общественных ССП, но он выглядит несколько искусственным для банковских ССП.

В данной главе мы допускаем возможность использования части процентного дохода для уменьшения величины кассового разрыва в текущий период времени. Текущая прибыль ССП определяется как разность между получаемыми процентами по кредитам и инвестициям и издержками: уплачиваемыми процентами по вкладам и внешним займам, а также расходами на

[5]Напомним, что кассовый разрыв — это ситуация, когда текущих доходов и кредитной массы, которыми располагает ССП, не хватает для выполнения имеющихся обязательств, так что приходится прибегать к внешнему (для ССП) кредиту. Фактически это средства, предоставляемые банком сверх имеющихся в ССП.

покрытие кассового разрыва (если он имеет место). Интегральная прибыль исчисляется, как обычно, путем дисконтирования потока текущей прибыли. Для простоты мы не учитываем операционные издержки, кредитные риски и обязательные отчисления банка.

Приведем формулы для вычисления прибыли ССП. Поскольку система функционирует по модели банковских спецсчетов, при нехватке средств кредиты выдаются за счет внешнего займа, так что очереди за кредитами не возникают. Кроме того, считаем, что отсутствуют «друзья» вкладчиков и нарушители контракта — участники, досрочно забирающие вклады.

Как было указано в п. 3.2.2, потребители планируют приобрести квартиры одинаковой площади и стоимости; обозначим её через K. Кроме того, мы предполагаем, что ежемесячные взносы участника на стадии накопления равны его ежемесячным платежам по кредиту. Если платеж больше взносов, то банк несет дополнительный риск, а если меньше, то возможности заёмщика недооценены, и вполне вероятно, что он будет стремиться вернуть кредит раньше предусмотренного планом срока. Эти соображения актуальны, когда речь идет о длительных сроках накопления, но мы их используем во всех случаях.

Будем считать, что тарифные планы удовлетворяют следующему условию: величина ежемесячного взноса, совпадающая с платежом по кредиту и обеспечивающая приобретение квартиры, равна верхнему пределу субсидируемого взноса. Тогда потребитель, ежемесячный доход которого превышает величину ежемесячного взноса P данного тарифного плана будет вносить в точности P средств: больше ему невыгодно, так как излишек не будет субсидироваться, и ставка по нему ниже рыночной, но и меньше невыгодно, так как он накопит меньшую сумму.

Благодаря указанным ограничениям тарифный план задается всего пятью параметрами. Пусть T - множество тарифных планов. Зафиксируем параметры тарифного плана $i \in T$: τ_i - время накопления, $\tau_{\text{кр},i}$ - время кредитования, p_i — ставка процента по депозиту, s_i — ставка премии (субсидии) на сбережения, c_i - кредитная ставка. Пусть a_i - потребитель, использующий тарифный план i.

Выполнена следующая формула:

$$P(a_i)\left[((1+p_i)^{\tau}_{i}-1)\cdot\frac{1+p_i}{p_i}+s_i\cdot\tau_i\right]+B(a_i)\left[\frac{1}{c_i}\cdot\frac{(1+c_i)^{\tau_{\text{кр},i}}-1}{(1+c_i)^{\tau_{\text{кр},i}}}\right]=K, \tag{3.4}$$

где $P(a_i)$ - взнос, $B(a_i)$ — выплаты по кредиту потребителя a_i. Здесь первое слагаемое — объем накоплений потребителя a_i, второе слагаемое — размер кредита, справа — стоимость квартиры K. Так как мы считаем, что $P(a_i) = B(a_i)$, то взнос выражается через параметры тарифного плана и не зависит от потребителя. Будем обозначать его через P_i, а выплаты по кредиту через B_i.

Через введенные параметры тарифного плана выражается также отношение объема кредита к объему накоплений.

Как было указано выше, потребитель из множества допустимых (по уровню его дохода) планов выбирает план с максимальным выигрышем Q (см. формулу (3.3)). Кроме того, при определенных условиях потребитель всегда будет выбирать допустимый план с максимальным взносом. Мы предполагаем, что эти условия выполнены, а в расчетах отдельно проверяем их.

В этом случае по значениям P_i можно вычислить долю населения α_i, для которой тарифный план i оптимален. Это те потребители, которые готовы платить P_i, но не следующее по порядку значение взноса. Сумма, которую готов платить потребитель, считается равной 20% от уровня его семейных доходов. Полагаем, что потребитель с месячным доходом х готов платить $0,2bx$, где $b = 2,9$ - средняя численность семьи. Если f - функция распределения потребителей по величине допустимого семейного платежа, то

$$\alpha_i = f(\min_{j \in M, P_j > P_i} P_j) - f(P_i).$$

Пусть в каждый момент времени в ССП вступает N потребителей. Будем считать, что они распределяются по тарифным планам в пропорциях α_i . Тогда количество потребителей β_i, использующих тарифный план i, равно

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{i \in M} \alpha_i} \cdot N.$$

Рассмотрим потребителя a_i, использующего тарифный план i, и вступившего в систему в момент времени t_0. На стадии накопления в момент времени t, при $t_0 \le t \le t_0 + \tau_i - 1$, потребитель вносит сумму P_i, получает субсидию $s_i \cdot P_i$ и проценты по депозитам в размере

$$S(t, a_i) = P_i p_i \sum_{k=t_0}^{t} (1 + p_i)^{k - t_0} = P_i((1 + p_i)^{t - t_0 + 1} - 1).$$

Обозначим через $S_i(t)$ сумму процентов по депозитам, выплачиваемых банком в момент времени t на тарифном плане i. Тогда

$$S_i(t) = \beta_i P_i \sum_{k=1}^{\min t, \tau_i} ((1 + p_i)^k - 1).$$

После окончания накопления потребитель получает контракт K. Суммарный объем выданных контрактов $K_i(t)$ в момент t для тарифного плана i равен

$$K_i(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_i \\ \beta_i K, & \tau_i \leqslant t. \end{cases}$$

Выплаты по кредиту B_i потребителя a_i в момент времени $t_0 + \tau_i \leqslant t \leqslant t_0 + \tau_i + \tau_{\text{кр},i} - 1$ разделяются на две части: проценты по кредиту $V(t, a_i) \cdot c_i$ и выплаты тела кредита, очищенные от процентов $E(t, a_i)$. Их можно найти по следующим формулам (аналогично формулам 2.4, 2.5):

$$V(t, a_i) \cdot c_i = \left(1 - \frac{1}{(1 + c_i)^{t_0 + \tau_i + \tau_{\text{кр},i} - t}}\right) \cdot B_i;$$

$$E(t, a_i) = \frac{1}{(1 + c_i)^{t_0 + \tau_i + \tau_{\text{кр},i} - t}} \cdot B_i.$$

Таким образом, сумма процентных платежей по кредиту $V_i(t)$ и сумма выплат по телу кредита $E_i(t)$ от всех заёмщиков тарифного плана i в момент времени t запишутся так (полагаем сумму равной 0, если верхний индекс суммирование меньше нижнего):

$$V_i(t) = \beta_i B_i \sum_{k=0}^{\min(\tau_{\text{кр},i} - 1, t - \tau_i - 1)} \left(1 - \frac{1}{(1 + c_i)^{\tau_{\text{кр},i} - k}}\right),$$

$$E_i(t) = \beta_i B_i \sum_{k=0}^{\min(\tau_{\text{кр},i} - 1, t - \tau_i - 1)} \frac{1}{(1 + c_i)^{\tau_{\text{кр},i} - k}}.$$

ССП может инвестировать остаток кредитной массы, если она в какой-то момент избыточна, и брать внешние займы, если кредитной массы не хватает. Предположим, что ставки процента по инвестициям u и внешним займам z совпадают, и выпишем формулы для прибыли и остатка кредитной массы.

Выражение для остатка кредитной массы $\Delta_{\text{кон}}(t)$ имеет вид:

$$\Delta_{\text{кон}}(t) = \sum_{i \in T} ((1 + s_i) M_i(t) + S_i(t) + E_i(t) - K_i(t)) + \Delta_{\text{кон}}(t - 1) + R(t), \quad (3.5)$$

где $M_i(t)$ — суммарный объём взносов вкладчиков тарифного плана i в момент времени t, $M_i(t) = \beta_i P_i \min(t, \tau_i)$.

Согласно (3.5) остаток в период t равен сумме остатка за предыдущий период $\Delta_{\text{кон}}(t - 1)$, вкладов с субсидиями и процентами на вклад $\sum_{i \in T}((1 +$

$s_i)M_i(t)+S_i(t))$, выплат по телу кредита $\sum_{i\in T} E_i(t)$ и части $R(t)$ процентного дохода $Q(t)$ предназначенной для уменьшения внешнего займа, за вычетом суммарного объёма выданных контрактов $\sum_{i\in T} K_i(t)$.

Чистый процентный доход $Q(t)$, полученный в результате работы ССП в период t, за вычетом $R(t)$ образует прибыль программы $D(t)$ так, что $Q(t) = D(t) + R(t)$. При этом

$$Q(t) = D(t) + R(t) \sum_{i\in T} (M_i(t)u + V_i(t) - S_i(t) + \Delta_{\text{кон}}(t-1)u. \tag{3.6}$$

В соответствии с (3.6) чистый процентный доход образуется как сумма процентов от инвестиций временно свободных вкладов $\sum_{i\in T} M_i(t)u$, процентов по кредитам $\sum_{i\in T} V_i(t)$, процентов, начисленных на сальдо кредитной массы $\Delta_{\text{кон}}(t-1)u$, за вычетом процентов, начисленных на вклады $\sum_{i\in T} S_i(t)$. Заметим, что величина $\Delta_{\text{кон}}(t-1)u$ является доходом от инвестиций с случае положительного сальдо, а в случае отрицательного — равна процентным выплатам по внешнему займу.

Обозначим через $\tilde{\Delta}(t)$ часть остатка кредитной массы без учёта средств на уменьшение внешнего займа:

$$\tilde{\Delta}(t) = \sum_{i\in T} ((1+s_i)M_i(t) + S_i(t) + E_i(t) - K_i(t)) + \Delta_{\text{кон}}(t-1). \tag{3.7}$$

Считаем заданной долю w процентного дохода, которую банк разрешает изымать для уменьшения внешнего займа, $0 \leqslant w \leqslant 1$. Тогда

$$R(t) = \begin{cases} 0, & \tilde{\Delta}(t) \geqslant 0 \\ wQ(t), & wQ(t) + \tilde{\Delta}(t) \leqslant 0 \\ -\tilde{\Delta}(t), & wQ(t) + \tilde{\Delta}(t) > 0. \end{cases}$$

Приведенные формулы позволяют вычислить прибыль

$$D(t) = Q(t) - R(t)$$

. Заметим, что после формирования полной линейки заёмщиков для каждого тарифного плана i величина $(1+s_i)M_i(t) + S_i(t) + E_i(t)$ будет в точности равна суммарному объему выдаваемых контрактов $K_i(t)$. Таким образом, кредитный остаток будет изменяться лишь вследствие возможных изменений объема внешнего займа и с какого-то момента станет постоянным.

Для расчета прибыли ССП мы используем два подхода: стационарный и динамический. В первом случае мы рассчитываем прибыль в момент, когда система уже вышла на стационарный режим, сформирована полная линейка заёмщиков, показатели системы стабилизировались и не зависят от времени. При наличии пятилетнего плана этот режим начинается через 12,5 лет, т.е. в 150-й месяц. Чтобы учесть также и шестилетние планы, прибыль в стационаре $\mathbf{D}_{\text{ст}}$ рассчитывается за 15-й год:

$$\mathbf{D}_{\text{ст}} = D(169) + D(170) + \ldots + D(180). \tag{3.8}$$

Другой способ вычисления прибыли, учитывающий переходный период, возникающий в начале выдачи контрактов, состоит в дисконтировании прибыли за все моменты времени:

$$\mathbf{D}_{\text{дин}} = D(1) + \delta D(2) + \delta^2 D(3) \ldots, \tag{3.9}$$

где $\delta = \frac{1}{1+\lambda}$, λ — норма дисконтирования, которую мы использовали при расчёте полезности потребителя (см. формулы (3.1)-(3.3)).

Заметим, что решение банка о погашении внешнего займа за счет процентного дохода $Q(t)$ зависит от соотношений параметров λ и u. Если $\lambda > u$, то для банка целесообразно изымать прибыль как можно раньше, получая выгоду, превосходящую потери от внешнего займа. Поэтому он предпочтет $w = 0$, $D(t) = Q(t)$. В случае $\lambda < u$ ситуация обратная, поэтому целесообразно уменьшать внешний займ за счет прибыли, приняв $w = 1$, $R(t) = Q(t)$. Если $\lambda = u$, то банку безразлично, как использовать $Q(t)$, поэтому он может выбрать любой вариант.

3.2.4 Цели государства

Одновременно с переходом вкладчика на новый план меняются и расходы государства, поэтому необходимо оценить выигрыш или убыток бюджета. Для этого используется описанная выше модель. После каждого взноса государство выплачивает участнику программы тарифного плана i субсидии в размере $s_i P_i$. Следовательно, в каждый момент времени государство тратит $G(t) = \sum_{i \in T} \beta_i s_i M_i(t)$.

Для оценки интегральных затрат государства, как и при расчете прибыли, используются стационарный и динамический подходы. Формулы аналогичны приведенным выше формулам (3.8), (3.9),

$$\mathbf{G}_{\text{ст}} = G(169) + G(170) + \ldots + G(180). \tag{3.10}$$

$$\mathbf{G}_{\text{дин}} = G(1) + \gamma G(2) + \gamma^2 G(3) \ldots, \tag{3.11}$$

При выборе нормы дисконта государству естественно рассмотреть два варианта. Можно выбрать ту же самую норму дисконтирования, которая принята для потребителя и банка (и тогда $\gamma = \delta$). Другой вариант — исходить из нормы доходности ценных бумаг, в которые преимущественно размещают накопления бюджет или ЦБ. При наших базовых условиях её значение — около 2% годовых. При перерасчете на месяц (для всех процентов мы делим годовые проценты на 12) получаем, что величина δ равна $\frac{1}{1+\frac{0,02}{12}} = 0,9983$.

Как показывают расчеты, результаты этих двух подходов качественно не различаются. Ниже приведены результаты, полученные в соответствии с первым вариантом.

3.3 Пример эффективной линейки тарифных планов

3.3.1 Предположения

Перечислим основные предположения, касающиеся линейки тарифных планов. Некоторые из них уже упоминались выше. Предполагаем, что все потребители стремятся купить одинаковые квартиры площадью 50 кв. м. по цене около 30,7 тыс. руб. за 1 кв. м [6]. Стоимость квартиры составляет 1,535 млн руб.

Параметры всех тарифных планов в рассматриваемых линейках выбираем так, чтобы каждый давал возможность купить квартиры и предусматривал накопление первоначального взноса не менее 18%. Это не противоречит наблюдаемой практике, а величина 18% выбрана для удобства расчетов. Кроме того, в наших расчетах ежемесячные взносы участника на стадии накопления равны его ежемесячным платежам по кредиту.

Конструируемые далее ТП удовлетворяют следующему условию: величина ежемесячного взноса, совпадающая с платежом по кредиту и обеспечивающая приобретение квартиры, равна верхнему пределу субсидируемого взноса. Благодаря такой конструкции ни одному потребителю невыгодно делать взносы меньше субсидируемого максимума. В результате структура линейки оказывается относительно простой.

Еще одно упрощающее предположение состоит в том, что потребитель готов тратить на ипотечные взносы не более 20% своего семейного дохода. Среди тарифных планов, удовлетворяющих этому условию, потребитель выбирает план с максимальным выигрышем (см. раздел 3.2.2).

[6] В приказе Минрегиона РФ отмечено, что средняя рыночная стоимость одного квадратного метра в Краснодарском крае в 4 квартале 2011 г. составляла 32 тыс. руб. (см. Приказ No 462 Министерства... (2011)).

На самом деле допустимый платеж по ипотеке зависит от нормы сбережений, которая растет с увеличением дохода[7]. Это обстоятельство можно учесть, несколько усложнив описанную выше модель.

Параметры ТП должны быть выбраны так, чтобы участникам были выгодны более короткие планы, их выбору препятствует только недостаточность дохода. Очевидно, короткий план, проигрывающий более длинному по величине выигрыша, не будет использован вовсе.

Условно полагаем, что каждый месяц на все ипотечные планы вступают 100 участников. Эта лишь величина масштабирования, на выводы она никак не влияет. Пропорции, в которых вкладчики распределяются по ТП исчисляются в соответствии со следующей гипотезой: доля участников на данном плане равна доле граждан с месячным доходом, одна пятая которого обеспечивает требуемый платеж, но не достаточна для участия в более коротких планах (см. раздел 3.2.3).

Под совокупным выигрышем потребителей будем подразумевать сумму выигрышей 100 потребителей, вступивших в ССП в первый момент времени.

3.3.2 Бинарная система

Чтобы продемонстрировать целесообразность использования линеек ТП, мы будем сравнивать их с простейшей системой, включающей всего два плана. Первый из них соответствует принятому в краснодарском эксперименте со сроком накопления пять лет. Второй представляет коммерческую ипотеку. Он предусматривает предварительное накопление в течение одного года при ставке по депозиту 5% годовых. Премии при этом не выплачиваются. Ставка по кредиту равна 13,5%. Срок кредитования — такой же, как и в первом ТП, — 7,5 лет. Таким образом, параметры второго плана близки к рыночным, действовавшим в 2011—2013 гг.

Опираясь на сформулированные выше допущения и используя приведенную выше модель, можно подсчитать, что взнос на коммерческом плане составит 22,33 тыс. руб. в месяц при сумме накоплений около 18% от стоимости жилья (табл. 3). Напомним, что взнос по субсидируемому пятилетнему плану равен 10 тыс. руб., а суммарные накопления составляют около 53% стоимости квартиры.

Расчет показывает, что на однолетнем плане выигрыш потребителя боль-

[7] Согласно данным АИЖК в России в 2006—2014 гг. формально средняя доля платежа по ипотечному кредиту в доходе заёмщика варьировала от 31,4 до 36,4%. В 2011 г. она составляла 36,3%. Это совпадает с данными ЦБ РФ о средних показателях договоров выдачи кредитов в 2011 г. Средний размер кредита составлял 1,27 млн руб., срок — 14,6 лет, процентная ставка — 12% (Сведения о жилищных кредитах... (2014)). Обслуживание такого кредита должно было обходиться в 15,4 тыс. руб. в месяц. Это соответствует 31% средних ежемесячных располагаемых ресурсов домашнего хозяйства в 2011 г.

Таблица 3: Тарифные планы бинарной системы ипотеки.

Тарифный план	Коммерческий (1 год)	Субсидируемый (5 лет)
Взнос, обеспечивающий покупку 50 кв. м., тыс. руб.	22 330	10 000
Доля вкладчиков на тарифном плане, %	18,8	81,2
Ставка субсидии на сбережения, %	0	30
Процентные ставки по вкладу/кредиту, %	5 / 13,5	2/6
Отношение размера кредита к накоплению вкладчика %	4,58	0,89
Доля накоплений и субсидий в цене квартиры, %	17,8	52,9
Совокупный выигрыш потребителя, млн. руб.	1,387	1,26

ше, чем на пятилетнем. Поэтому состоятельные потребители, пятая часть семейного дохода которых не меньше 22,33 тыс. руб., предпочтут однолетний план накопления. Потребители менее состоятельные, но все же располагающие доходом 50 тыс. руб. или выше, смогут воспользоваться пятилетним планом[8].

Используя данные о распределении населения по доходам (см. **Приложение**), получим, что в бинарной ССП смогли бы принять участие 30,38% населения, из них 5,72% (18,8% принявших участие) смогли бы оплатить коммерческую ипотеку, а 24,66% (81,2% числа потенциальных участников) были бы вынуждены копить пять лет. В соответствии с принятой нами гипотезой, найденные пропорции определяют распределение вкладчиков по тарифным планам (см. табл. 3).

Для расчета выигрыша потребителя необходимо оценить полезность от владения жильем в течение месяца. В качестве нижней оценки можно рассматривать арендную плату за квартиру 50 кв. м. или типичный ипотечный платеж по портфелю действующих ипотечных кредитов. В Краснодаре в 2012 г. арендная плата составляла в среднем около 18,5 тыс. руб., но цены больше 25 тыс. встречались довольно часто. Следует иметь в виду, что полезность собственной квартиры выше арендной платы, поскольку у владельца есть возможность продавать и благоустраивать квартиру, так что вложения не пропадут. В Краснодарском крае платеж за типичную ипотеку квартиры площадью 50 кв. м. (по цене 40 тыс. за кв. м), при начальном взносе в 40%,

[8] В краснодарском эксперименте минимальный допустимый взнос равен 3 тыс. руб. В принципе промежуточные планы также могут иметь минимальные границы взносов. Однако, как отмечалось выше, в нашем расчете мы не рассматриваем случаи, когда вкладчики вносят меньше, чем необходимо для получения максимальной премии.

ставке за кредит в 13,5% на срок 7,5 лет составлял 21,3 тыс. руб. В дальнейших расчетах полезность жилья для потребителя принята равной 22 тыс. руб. в месяц и не зависит от его дохода.

Выше рассматривались два варианта подсчета эффектов от линейки тарифных планов для банка и государства: динамический (формулы (3.9) и (3.11)) и стационарный (формулы (3.8) и (3.10)). Первый позволяет оценить линейку тарифных планов как один проект, полностью учитывая переходный режим. Стационарный подход показывает, как выглядят прибыль банка и расходы государства в стационарном режиме — на 15-м году работы ССП.

При принятых предположениях в бинарной системе тарифных планов интегральная прибыль банка составляет 1,506 млрд руб., а интегральная прибыль банка в стационарном режиме — 140,5 млн руб. в год; совокупный выигрыш потребителей от использования двух ипотечных планов равен 128,6 млн руб.; расходы бюджета равны 1,816 млрд руб. в динамическом и 175,3 млн руб. — в стационарном режиме. Средневзвешенный срок ожидания до приобретения жилья у коллектива потребителей составляет 4,25 года.

3.3.3 Эффективная линейка тарифных планов

Подберем дотируемые планы на 2, 3 и 4 года с одинаковым фиксированным сроком кредитования 7,5 лет[9] так, чтобы линейка удовлетворяла описанным ниже свойствам:

1) линейка должна включать все промежуточные тарифные планы между первым и пятым годами (сплошная линейка);

2) по мере увеличения срока накопления проценты по кредитам и вкладам монотонно убывают, процент на субсидии растет (справедливость); выигрыши потребителей убывают (условие не пустоты коротких ТП);

3) удаление любого подмножества линеек уменьшает прибыль банка и увеличивает расходы государства или совокупный выигрыш потребителей (правильность);

4) при любом небольшом изменении параметров кому-то из агентов становится хуже (локальная Парето-эффективность).

Отыскание линейки производилось следующим образом. Тарифный план с заданным сроком накопления и кредитования задается тремя параметрами: размером субсидии в процентах, процентов на вклад и за кредит. По ним подбираются одинаковые платежи на всем протяжении плана. Далее была

[9]Срок кредитования 7,5 лет, с одной стороны, типичен для немецких и австрийских ССП с пятилетним сроком накопления, а с другой — близок среднему сроку возврата коммерческих кредитов в нынешней российской ипотечной практике. Чтобы не усложнять расчеты, мы приняли его одинаковым для всех тарифных планов. Увеличение этого срока повышает доступность ТП и в то же время может увеличить потребность ССП во внешних заимствованиях на этапе развертывания программы.

Таблица 4: Эффективная линейка ссудо-сберегательных тарифных планов

Показатели тарифного плана	Ипотека (1 год)	ССП (2 года)	ССП (3 года)	ССП (4 года)	ССП (5 лет)
Взнос, обеспечивающий покупку 50 кв. м., тыс. руб.	22 330	18020	14610	11860	10000
Доля вкладчиков на тарифном плане, %	18,8	13,4	18,8	24,7	24,3
Ставка субсидии на сбережения, %	0	7	15	24	30
Процентные ставки по вкладу/кредиту, %	5 / 13,5	5/12,5	4,5/11	3,5 / 8,5	2/6
Отношение размера кредита к накоплению вкладчика %	4,58	2,16	1,39	1,02	0,89
Доля накоплений и субсидий в цене квартиры, %	17,94	31,66	41,87	48,74	52,87
Совокупный выигрыш потребителя, млн. руб.	5,00	11,07	12,72	12,94	11,41

построена трехмерная сетка из параметров, где субсидии варьировали с шагом 1%, проценты по вкладам и кредитам — с шагом 0,25%. На такой сетке рассматривались всевозможные линейки планов от двух до четырех лет, которые при добавлении к исходной бинарной линейки на один год и пять лет образуют линейку, удовлетворяющую свойствам (1—3). Далее проверялась локальная эффективность: рассматривались сдвиги на 0,01% для всевозможных наборов из 12 параметров (проценты по субсидиям, взносам и кредитам для линеек на один-четыре года) и проверялось, можно ли одновременно улучшить положение государства, банка и потребителя.

Пример эффективной линейки представлен в табл. 4.

Распределение вкладчиков по тарифным планам в линейке табл. 4 существенно отличается от краснодарского распределения из табл. 2. Это вызвано рядом обстоятельств. Самое главное: в краснодарском эксперименте вкладчики, выполнившие пятилетний план накопления, имеют право получить вклад с процентами и субсидией, даже если они отказываются от покупки квартиры. Участники, копившие меньший срок, не признаются «друзьями» вкладчиков. Этим обусловлена особая привлекательность пятилетнего вклада. Наш расчет эффективной линейки этот важный фактор не учитывает. Все тарифные планы краснодарской линейки предусматривали высокую премию на сбережения и низкие проценты по кредиту. Привлекательность краткосрочных вкладов в краснодарском варианте снижена из-за низкого уровня дотируемого вклада, малого объема кредита и короткого срока кредитования.

Совокупный прирост выигрыша потребителей от линейки по сравнению с бинарной системой, прирост прибыли банка, снижение расходов государства является весьма существенным.

В системе с новой линейкой промежуточных планов в стационаре в год прибыль банка от обслуживания того же притока вкладчиков (100 участников в месяц) увеличивается на 35% (до 189,4 млн вместо 140,5 млн руб.). Расходы бюджета снижаются на 34% (со 175,3 млн до 115,6 млн руб.). В динамике интегральная прибыль банка увеличивается на 20% (до 1,812 млрд вместо 1,506 млрд руб.), расходы бюджета снижаются на 33% (с 1,816 млрд до 1,234 млрд руб.). Совокупный прирост выигрышей потребителей составляет 3,5% по сравнению с бинарной системой (133,1 млн вместо 128,6 млн руб. при полезности жилья в 22 тыс. руб. в месяц). При переходе с пятилетнего плана на четырехлетний прирост выигрыша потребителя составляет 62 тыс. руб., на трехлетний план — 85 тыс., на двухлетний — 106 тыс. руб. По мере роста дохода потребителям выгодно переходить на ускоренные планы, благодаря этому найденная линейка является сплошной. Средневзвешенный срок покупки жилья потребителями снизился на год — с 4,25 до 3,22 лет.

Серия расчетов показала, что предложенная линейка является также правильной: исключение любого подмножества промежуточных планов ведет к снижению её эффективности для каждого участника.

Отметим также еще одно свойство построенной линейки: совокупный объем субсидий по тарифному плану с увеличением взноса падает, так что более богатым группам вкладчиков достается меньше государственных средств.

Примерная линейка не является единственной эффективной. Важно, что она демонстрирует возможность улучшить состояние одновременно всех участников. Выбор конкретной линейки является предметом торга между государством (которое выступает от лица потребителей) и банком. Возможны ситуации, когда один из участников обладает большей переговорной силой и пытается добиться одностороннего улучшения условий в свою пользу. Варьируя параметры, можно добиться улучшения условий для одного из участников ССП (государства, банка или потребителя). Однако варианты линеек, в которых один участник добивается максимума, скорее всего трудно реализовать.

Задача построения и исследования Парето-оптимальной области линеек, благодаря которым все участники улучшают свое положение, важна для облегчения переговоров государства и банков. Некоторые шаги в этом направлении сделаны в Главе 4.

Расширение линейки тарифных планов при помощи добавления плана на шесть лет[10] оказывает не менее серьезное влияние на повышение спроса на ипотеку и благосостояние участников, чем введение промежуточных планов. Дополнительные субсидии выделяются за счет экономии средств бюджета от формирования линейки.

Линейка из шести программ увеличивает прибыль банка в стационаре на 55,6% по сравнению с бинарной системой (218,5 млн вместо 140,5 млн руб.), в динамике — на 42,6% (2,148 млрд вместо 1,506 млрд руб.). Бюджетные расходы при этом близки к уровню расходов в бинарной системе (174,4 млн вместо 175,3 млн руб. — в стационаре; 1,821 млрд вместо 1,815 млрд руб. — в динамике; нужно учесть, что бинарная система не предусматривала расходов на тарифный план на шесть лет). Если в бинарной системе могли участвовать лишь 30,4% населения, то в линейке ССП из шести планов — 38,5% населения (на 26,8% больше).

В следующем разделе мы оценим, как влияют на прибыль ССП и объем субсидий уровень процентной ставки по депозиту и кредиту, размер дотации и маржи.

3.4 Влияние параметров линейки на целевые функции участников

Уровень процентных ставок. Повышение уровня ставок при одинаковой марже приводит к резкому росту интегральной прибыли ССП. Основная причина состоит в особенности исчисления аннуитетного платежа за кредит. Чем выше ставка по кредиту (при одинаковой марже), тем выше процентный доход банка. При этом издержки потребителя реагируют на повышение ставки по кредиту при сохранении маржи гораздо слабее, поскольку одновременно растет и ставка по вкладу. Наибольшее же влияние на платеж оказывают маржа и срок кредита. Поскольку с повышением процентных ставок платеж все же повышается, основная масса вкладчиков остается на более длительных планах с высокой премией; в результате растут расходы бюджета.

Ставка субсидии на сбережения. Со снижением размера дотации на промежуточном плане растут взносы потребителя, соответственно, снижается доля населения, способная за меньшее время накопить на жилье, и увеличивается доля населения на более длительных планах. Банк лишается деше-

[10] Параметры плана на 6 лет аналогичны пятилетней программе (кроме срока кредита, который в новом плане равен 9 годам, так как сохраняется соотношение между сроками вклада и кредита, характерное для пятилетней программы и равное 1,5). Платеж на плане будет равен 8460 руб. в месяц. Приток вкладчиков в расчете увеличивается со 100 до 127 вкладчиков в месяц, что соответствует увеличению доли населения, участвующей в системе, с 30,4 до 38,5% от населения.

вых ресурсов, и его прибыль падает[11].

При выборе промежуточных тарифных планов необходимо следить за эффективной годовой доходностью вкладов. Если тарифный план обеспечивает небольшие бюджетные расходы, но при этом эффективной ставки доходности оказывается недостаточно, чтобы привлечь вкладчиков, то размер премии на сбережения приходится повышать.

Маржа. Рост маржи на промежуточном плане приводит к росту прибыли банка и затрат бюджета. Затраты растут вследствие вытеснения вкладчиков из коротких тарифных планов в длинные, где субсидия больше.

Одновременное изменение процентных ставок, субсидии и маржи. Одновременное снижение ставки субсидии, повышение уровня процентных ставок по депозиту и кредиту и увеличение маржи означает приближение планов к рыночным программам банков. Потребители могли бы сами использовать вклады и кредиты в банке как связанные между собой продукты одного тарифного плана. Попытки создать подобные продукты уже предпринималась на рынке, но без участия государства, поэтому они оказались невостребованными[12]. Тем не менее интересно сопоставить гипотетическую рыночную линейку и эффективную линейку ССП.

Расчеты показывают, что убирая субсидии на промежуточных планах и вводя рыночные ставки по вкладам и кредитам, мы ухудшаем положение и банка, и потребителя. Поэтому линейка, состоящая из одних рыночных планов или включающая часть рыночных промежуточных планов вместо субсидируемых, оказывается менее выгодной для обоих агентов. Однако по мере уменьшения коммерческой кредитной ставки и сокращения рыночной маржи различие между обеими схемами для банка нивелируется, и, чтобы сделать его значимым, необходимо увеличивать субсидии на всех тарифных планах.

[11] Необходимый уровень субсидий зависит от соотношения доходов населения и цены жилья. Поэтому в некоторых регионах имеет смысл рассматривать линейки с 50%-ной субсидией, которая может софинансироваться регионом и федеральным центром. Однако обеспечение доступности жилья только лишь за счет повышения доступности ипотеки может слишком дорого обойтись бюджету. Одновременно с формированием ССП необходима масштабная программа строительства дешевого жилья (см. Полтерович, Старков (2010)).

[12] Наиболее близкой к идее промежуточных планов была линейка накопительной программы банка ВТБ-24, однако она была отменена с октября 2012 г. Её параметры были близки к найденным нами параметрам линейки ССП, но дотации государства отсутствовали.

4. Свойства линеек ссудо-сберегательных планов

4.1 Введение.

В этой главе мы изучим свойства линеек ссудо-сберегательных планов более подробно. А именно, найдём некоторые зависимости между разными свойствами, а также зависимость свойств от параметров при незначительных ограничениях на модель.

4.2 Тарифные планы

В этом разделе мы напомним определение тарифного плана, введённого в предыдущей главе.

Тарифным планом называется следующий набор параметров: срок накопления τ, ставка по депозиту p, величина премии на сбережения в процентах s, максимальная $P_{\max}$ и минимальные $P_{\min}$ величины ежемесячного взноса, на которые начисляется премия, срок кредита $\tau_{\text{кр}}$, отношение объема кредита к накопленной сумме Λ, ставка по кредиту c.

Напомним наши ограничения на параметры. Во-первых, будем считать, что потребители планируют приобрести квартиры одинаковой площади и стоимости K. K выражается через параметры тарифного плана и параметры потребителя следующим образом (см. формулу (3.4)):

$$P \cdot \left[((1+p)^{\tau} - 1) \cdot \frac{1+p}{p} + s \cdot \tau \right] + B \cdot \left[\frac{1}{c} \cdot \frac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}} - 1}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}} \right] = K. \tag{4.1}$$

Здесь первое слагаемое — объём накоплений потребителя, второе — размер кредита, P и B — размеры взноса и накопления соответственно. Тогда размер взноса P должен быть зафиксирован. Естественно предположить, что он совпадает с максимальной величиной $P_{\max}$ ежемесячного взноса, на которые начисляется премия.

Во-вторых, мы предполагаем, что ежемесячные взносы участника P равны его ежемесячным платежам по кредиту B. Если платеж больше взносов, то банк несет дополнительный риск, а если меньше, то возможности заёмщика недооценены, и вполне вероятно, что он будет стремиться вернуть кредит раньше предусмотренного планом срока. Эти соображения актуальны, когда речь идет о длительных сроках накопления, но мы их используем во всех случаях.

При описанных выше ограничениях $P = B = P_{\max}$ тарифный план задаётся всего пятью параметрами: сроками накопления τ и кредитования $\tau_{\text{кр}}$, ставками по депозиту p, по кредиту c и величиной премии на сбережения в процентах s. Действительно, тогда $P_{\max} = P$ находится по формуле 4.1, параметр Λ находится исходя из соотношения

$$\Lambda = \frac{\frac{1}{c} \cdot \frac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}-1}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}}}{((1+p)^{\tau}-1) \cdot \frac{1+p}{p} + s \cdot \tau}.$$

Зафиксируем тарифный план $\{\tau, \tau_{\text{кр}}, p, s, c\}$. Тарифный план задаётся банком. Чтобы определить выигрыши банка, государства и потребителя, необходимо понять, сколько потребителей могут и будут использовать данный тарифный план. Это довольно сложный вопрос, выходящий за рамки моделирования ССП. Возможности потребителей зависят от внешних экономических условий: доходов, цен на жильё и другие товары, банковские ставки по депозитам и кредитам и др. Будем рассматривать максимально простую ситуацию.

Каждый потребитель представляет семью, которая способна откладывать в месяц от 20 до 30% своего месячного дохода для ипотечного кредитования (процент зависит от уровня дохода). Таким образом, каждый потребитель способен тратить на ССП в месяц не больше определённой суммы, называемой *максимально допустимой величиной взноса*.

В нашей модели будем считать, что приток потребителей и распределение этого притока по максимально возможной величине взноса не зависит от набора ТП и постоянен во времени. Как было указано выше, будем считать, что потребители хотят приобрести квартиру одинаковой площади и стоимости K.

Будет ли использовать потребитель данный тарифный план или нет? Это зависит от того, есть ли у него более выгодные тарифные планы, чем данный. Пусть дан конечный набор тарифных планов. Тогда естественно предположить, что потребитель выбирает из всех допустимых для него планов план с максимальным выигрышем. Если планов с максимальным выигрышем несколько, то логично считать, что потребитель выберет из них план с минимальным временем накопления для более раннего получения квартиры.

При таких предположениях часть планов может стать невыгодной для всех потребителей. Если выкинуть эти планы из набора, то по оставшейся части легко определить, как распределятся потребители между планами. А именно, данный ТП будут использовать все потребители, для которых этот план допустим, но недопустимы ТП с бóльшим выигрышем.

4.3 Линейки

В данном разделе мы сначала введём общее определение линейки, а потом укажем необходимые нам ограничения на линейку.

В Главе 3 *линейка* — это конечный набор тарифных планов. Какие ограничения разумно ввести на этот набор?

Прежде всего, мы хотим исследовать переход от ССП к коммерческой ипотеке. Поэтому для любой линейки параметры *крайних* планов: с максимальным и минимальным временем накопления должны соответствовать ТП ССП и коммерческой ипотеки соответственно. У остальных планов время накопления расположено между указанными, такие ТП будем называть *промежуточными*.

Для того, чтобы существовали эффективные (Парето-оптимальные) линейки, множество рассматриваемых линеек должно быть замкнутым. Отсюда следует, что параметры тарифных планов должны быть ограничены сверху и снизу. Кроме того, должно быть введено ограничение на количество тарифных планов, иначе возможна ситуация, когда каждую линейку можно «улучшить», добавив ещё один тарифный план. Исходя из того, что банк обычно рассчитывает на конкретные сроки накопления и кредитования, будем считать, что они заранее заданы.

Для удобства будем считать, что все тарифные планы в линейке используются по крайней мере одним потребителем. Это несущественное ограничение: из каждого набора тарифных планов можно выкинуть все ТП, которые не используются потребителями. Кроме этого, будем считать, что в линейке на плане с бóльшим временем накопления время кредитования не меньше. Это разумное предположение: у потребителей с бóльшим временем накопления тогда будет меньший взнос. Вместе с тем оно сильно упрощает выкладки и позволит доказать необходимые утверждения.

Подытожим наши ограничения. Под линейкой мы будем подразумевать набор тарифных планов, в котором

- параметры крайних тарифных планов зафиксированы[1] (и соответствуют ССП и коммерческой ипотеке);

[1] Мы фиксируем параметры крайних тарифных планов. Если не делать для них органичений, то тогда в эффективных линейках данные планы уже не будут соответствовать коммерческой ипотеке. К примеру, если рассматривать линейки с наибольшим выигрышем потребителя (они, очевидно, будут эффективными), то в них взносы должны быть как можно ниже. Отсюда следует, что процентные ставки по кредитам

- время накопления и кредитования выбираются из заранее заданного списка, при этом при увеличении времени накопления время кредитования не уменьшается;
- ставки по кредиту, взносу и субсидиям ограничены;
- каждый тарифный план используется хотя бы одним потребителем.

В качестве основного примера рассмотрим класс линеек, описанный в предыдущей главе. Тарифный план ССП построен на основе программы в Краснодаре: годовая ставка по вкладу 2%, по кредиту 6%, субсидии — 30%, срок накопления 5 лет, срок кредитования 7,5 лет. Для коммерческого тарифного плана берутся существующие процентные ставки на рынке: годовая ставка по вкладу 5%, по кредиту 12,5%, субсидии — 0%. Срок накопления — 1 год, срок кредитования возьмём такой же, как и в ССП — 7,5 лет. В качестве промежуточных тарифных планов рассматриваем планы, в которых срок кредитования также 7,5 лет, а срок накопления — 2,3 или 4 года. Таким образом, линейка может содержать от 2 до 5 тарифных планов. Линейки такого вида будем называть *краснодарскими.*

Обозначения для линейки.

Введём удобные обозначения для линеек. Пусть дана линейка $\mathcal{A}$. Параметры тарифных планов в линейке $\mathcal{A}$ будем нумеровать по возрастанию сроков накопления и кредитования. Точнее, пусть заданы $(\tau_1, s_1, c_1, p_1, \tau_{\text{кр},1})$ и $(\tau_n, s_n, c_n, p_n, \tau_{\text{кр},n})$ — крайние тарифные планы коммерческой ипотеки и ССП соответственно. Кроме этого, имеются промежуточные значения сроков накопления и кредитования $\tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$, $\tau_{\text{кр},2}$, $\ldots$, $\tau_{\text{кр},n-1}$, где $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$, $\tau_{\text{кр},1} \le \tau_{\text{кр},2} \le \ldots \le \tau_{\text{кр},n}$.

Формальное определение линейки выглядит следующим образом.

Линейкой с заданными крайними тарифными планами $(\tau_1, s_1, c_1, p_1, \tau_{\text{кр},1})$ и $(\tau_n, s_n, c_n, p_n, \tau_{\text{кр},n})$ и промежуточными значениями $\tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$, $\tau_{\text{кр},2}$, $\ldots$, $\tau_{\text{кр},n-1}$, где $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$, $\tau_{\text{кр},1} \le \tau_{\text{кр},2} \le \ldots \le \tau_{\text{кр},n}$, называется множество индексов $S \subset \{2, \ldots, n-1\}$ и набор параметров тарифных планов s_i, c_i, p_i при всех $i \in S$. На параметры накладываются следующие ограничения:

(1) выполнены неравенства

$$s_1 \le s_i \le s_n,\ c_1 \ge c_i \ge c_n,\ p_1 \ge p_i \ge p_n \text{ при всех } i \in S.$$[2]

будут минимальными, а ставки по взносам и субсидии — максимальными, что не соответствует нашим представлениям о крайнем коммерческом плане.

[2] Логично предположить, что экстремальные значения параметров достигаются на крайних планах: при любых ограничениях на параметры можно считать, что крайние планы будут использовать минимальные или максимально возможные допустимые значения.

(2) при данных параметрах каждый тарифный план $i \in S$ используется по крайней мере одним потребителем.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех линеек, которые задаваются набором параметров $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \tau_{\text{кр},1}, \tau_{\text{кр},2}, \dots, \tau_{\text{кр},n}, s_1, c_1, p_1, s_n, c_n, p_n$. Поймём, как в данных обозначениях переписываются свойства линеек, определённые в разделе 4.8.

По определению, линейка является сплошной тогда и только тогда, когда содержит все доступные промежуточные тарифные планы, то есть $S = \{2, \dots, n-1\}$. Справедливость линейки означает, что для всех $i \leq j$, $i, j \in S$ выполняются неравенства $s_i \leq s_j$, $p_i \geq p_j$, $c_i \geq c_j$.

Для каждого подмножества $S' \subset S$ можно определить линейку $\mathcal{A}|'_S$, получаемую из линейки $\mathcal{A}$ выбрасыванием всех тарифных планов, номера которых не входят в S'.

Если обозначить выигрыши банка, государства и потребителя от использования данной линейки через $\mathcal{D}_\mathcal{A}$, $G_\mathcal{A}$ и $\mathcal{Q}_\mathcal{A}$ соответственно, то линейка является правильной (локально правильной) в том и только в том случае, когда $G_\mathcal{A} \geq G_\mathcal{A}|'_S$, $\mathcal{D}_\mathcal{A} \geq \mathcal{D}_\mathcal{A}|'_S$, $\mathcal{Q}_\mathcal{A} \geq \mathcal{Q}_\mathcal{A}|'_S$ для любого подмножества $S' \subset S$ (соответственно, для любого подмножества $S' \subset S$, где $|S'| = |S| - 1$).

Наконец, линейка $\mathcal{A}$ эффективна тогда и только тогда, когда не существует такой линейки $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$, что выполнены неравенства $\mathcal{D}_\mathcal{B} \geq \mathcal{D}_\mathcal{A}$, $G_\mathcal{B} \geq G_\mathcal{A}$, $\mathcal{Q}_\mathcal{B} \geq \mathcal{Q}_\mathcal{A}$, и при этом хотя бы одно из неравенств строгое.

В следующем разделе мы объясним, как определять выигрыш банка, государства и потребителя от использовании отдельного тарифного плана, а также докажем закон сохранения.

4.4 Выигрыши агентов от тарифного плана и закон сохранения

Зафиксируем тарифный план $(\tau_i, s_i, c_i, p_i, \tau_{\text{кр},i})$. Выигрыши агентов от данного ТП рассчитываются при помощи динамической модели, описанной в Главе 2, с учётом наших ограничений. В каждый момент времени в систему вступает один потребитель с параметрами данного ТП. Первые τ_i периодов он приносит в банк взнос в размере P_i. Государство выплачивает субсидии в размере $s_i \cdot P_i$. Банк начисляет процент p_i на остаток средств на счёте. После окончания накопления потребитель получает контрактную сумму K, и в течение $\tau_{\text{кр},i}$ периодов выплачивает кредит на оставшуюся часть контракта по аннуитету со ставкой c_i, внося каждый момент времени P_i средств. После выплаты кредита он выходит из системы.

Для расчёта полезностей потребителя, издержек государства и прибыли банка введём норму дисконтирования λ. Тогда стоимость L средств в момент времени t составит $L\delta^t$, где $\delta = \frac{1}{1+\lambda}$ (то есть потребитель каждый период времени теряет полезность $L(1-\delta)$).

Действия банка выглядят следующим образом. Каждый момент времени банк собирает *кредитную массу*, то есть средства со всех потребителей, находящихся в системе (взносы, выплаты по кредитам), а также субсидии на взносы от государства. Кроме того, в кредитную массу добавляется остаток средств с предыдущего периода (который может быть как положительным, так и отрицательным). Часть собранных процентов считается прибылью банка, остальное образует остаток кредитной массы. Если остаток положительный, банк использует его для получения инвестиций по ставке u. Если остаток кредитной массы отрицательный, банк берёт займ по ставке z на недостающую сумму[3].

Общей прибылью банка назовём дисконтированную сумму прибылей за каждый период. Ключевой вопрос — как банк будет распределять прибыль с учётом соотношения коэффициентов λ, u и z. В случае их равенства банку всё равно, как распределять средства между прибылью и остатком кредитной массы. Если же эти коэффициенты не равны, то банк может либо стремиться забирать средства из системы как можно раньше, либо, наоборот, оставлять средства в системе как можно дольше. Таким образом, банк получает больше стимулов для манипуляций параметров.

Положим для простоты, что $\lambda = u = z$. Докажем в этом случае следующее утверждение.

Теорема 3 (Общий закон сохранения)**.** *Дисконтированная сумма чистых издержек потребителя и государства равна прибыли банка (всё в расчёте на одного потребителя).*

Доказательство. В наших условиях (при $\lambda = u = z$) для банка нет никакой разницы между тем, чтобы забрать средства в данный момент времени или оставить их в системе, не трогая их и каждый раз получать с них проценты. А если понадобятся новые средства, то банк можем взять заём, и бесконечное количество периодов гасить проценты. Или погасить заём и не получать инвестиции с погашенной части. В результате общая прибыль банка равна сумме прибылей, которую банк получает от каждого потребителя по отдельности с учётом дисконта.

Давайте вычислим прибыль банка от одного потребителя. Потребитель в течение $\tau_i + \tau_{\text{кр},i}$ периодов вносит в банк P_i средств, государство выплачивает субсидии в размере $s_i \cdot P_i$ на стадии накопления, то есть первые τ_i периодов

[3]Здесь мы не учитываем издержек банка на обслуживание счетов, страхования, инфляции, и.т.п.

после вступления потребителя в систему. Таким образом, с учётом дисконта банк получает средства в размере

$$P_i(1+\delta+\ldots+\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}-1})+s_iP_i(1+\delta+\ldots+\delta^{\tau_i-1}).$$

При этом банк выдаёт потребителю контракт K через τ_i периодов после вступления потребителя в систему. Таким образом, преобразовывая выражение, мы получаем, что банк получает прибыль в размере

$$\frac{1}{1-\delta}(P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}})+s_i(1-\delta^{\tau_i}))-K\delta^{\tau_i}$$

.

При этом $s_iP_i(1+\delta+\ldots+\delta^{\tau_i-1})$ — это в точности издержки государства на потребителя, а $P_i(1+\delta+\ldots+\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}-1})-K\delta^{\tau_i}$ — чистые издержки потребителя на покупку квартиры. Отсюда дисконтированная сумма чистых издержек потребителя и государства равна прибыли банка. Утверждение доказано. □

Определим прибыль банка $\mathcal{D}_i$ и издержки государства G_i в расчёте на одного потребителя. Используя формулы, показанные в доказательстве Теоремы 3, мы получаем:

$$G_i=-\frac{1}{1-\delta}s_iP_i(1-\delta^{\tau_i}). \tag{4.2}$$

$$\mathcal{D}_i=\frac{1}{1-\delta}(P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}})+s_i(1-\delta^{\tau_i}))-K\delta^{\tau_i}. \tag{4.3}$$

При этом полезность $\mathcal{Q}_i$ одного потребителя от ТП i не совпадает с чистыми издержками на её приобретение, а ещё и учитывает полезность от владения квартиры. А именно, полезность от владения квартирой — это дисконтированная сумма полезностей A с момента её получения.[4] Тогда полезность $\mathcal{Q}_i$ находится по формуле

$$\mathcal{Q}_i=A(\delta^{\tau_i}+\delta^{\tau_i+1}+\ldots)-P_i(1+\delta+\delta^2+\ldots+\delta^{\tau_i-1})-P_i(\delta^{\tau_i}+\ldots+\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}-1}),$$

где первое слагаемое соответствует полезности от владения квартирой, а второе и третье — издержки от покупки квартиры на стадии накопления и кредитования соответственно. Преобразуем выражение в правой части равенства:

$$A(\delta^{\tau_i}+\delta^{\tau_i+1}+\ldots)-P_i(1+\delta+\delta^2+\ldots+\delta^{\tau_i-1})-P_i(\delta^{\tau_i}+\ldots+\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}-1})=$$

[4] Полезность A ассоциируется с экономией средств от аренды квартиры. То есть предполагается, что первые τ_i периодов нахождения в системе потребитель арендует квартиру по стоимости A, а после получения квартиры ему не нужно тратить на неё средства.

$$= \frac{1}{1-\delta}[A\delta^{\tau_i} - P_i(1-\delta^{\tau_i}) + P_i \cdot \delta^{\tau_i}(1-\delta^{\tau_{\text{кр},i}})] =$$

$$= \frac{1}{1-\delta}[A\delta^{\tau_i} - P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}})].$$

Таким образом, получаем следующую формулу для нахождения полезности потребителя $\mathcal{Q}_i$ от ТП:

$$\mathcal{Q}_i = \frac{1}{1-\delta}[A\delta^{\tau_i} - P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}})]. \tag{4.4}$$

Из Теоремы 3 непосредственно следует следующее соотношение для выигрышей $\mathcal{D}_i$, G_i и $\mathcal{Q}_i$:

$$\mathcal{D}_i + G_i + \mathcal{Q}_i = (\frac{A}{1-\delta} - K)\delta^{\tau_i}. \tag{4.5}$$

Действительно, по нашим определениям, полезность потребителя не совпадает с его чистыми издержками: он получает не средства в размере K, а полезность от владения квартирой $\frac{A}{1-\delta}$. Что и отражено в формуле.

Мы нашли прибыль банка D_i, издержки государства G_i, полезность потребителя Q_i от использования данного тарифного плана $(\tau_i, s_i, c_i, p_i, \tau_{\text{кр},i})$ линейки $\mathcal{A}$ в расчёте на одного потребителя. Вообще говоря, прибыль банка и издержки государства рассчитывается на всех потребителей одновременно. Однако ввиду однородности формул прибыль участников системы от всей линейки равна сумме прибылей по каждому тарифному плану в отдельности. Это позволяет найти явную формулу для их выигрышей. Для этого необходимо использовать распределение потребителей по тарифным планам.

4.5 Монотонность взносов

Для того, чтобы понять, как распределяются потребители по тарифным планам, докажем полезное утверждение:

Теорема 4. *Если для двух тарифных планов из линейки $\mathcal{A}$ время накопления на первом плане меньше, то выигрыш потребителя не меньше, а взнос потребителя больше на первом плане. В данных выше обозначениях, если $i, j \in S$ и $i < j$, то $\mathcal{Q}_i \geq \mathcal{Q}_j$, $P_i > P_j$.*

Сначала докажем следующую лемму:

Лемма 3. *Если у двух тарифных планов $i, j \in S$ на первом плане выигрыш потребителя больше ($\mathcal{Q}_i > \mathcal{Q}_j$), то и взнос больше ($P_i > P_j$). В обратную сторону выполнено нестрогое неравенство: если $P_i > P_j$, то $\mathcal{Q}_i \geq \mathcal{Q}_j$.*

Доказательство. (Леммы 3) Если для двух планов $i, j \in S$, план с большим выигрышем $\mathcal{Q}_i$ имеет меньший или равный взнос P_i, чем на другом плане, т.е. $\mathcal{Q}_i > \mathcal{Q}_j$, $P_i \leq P_j$, то план j невыгодно использовать ни одному из потребителей.

Но по определению линейки, каждый тарифный план используется по крайней мере одним потребителем. Поэтому данная ситуация невозможна, и при $\mathcal{Q}_i > \mathcal{Q}_j$ должно быть выполнено неравенство $P_i > P_j$.

В обратную сторону утверждение легко доказывается от противного. □

Доказательство. (Теоремы 4) В силу второй части леммы 3 достаточно доказать неравенство $P_i > P_j$. Предположим, что оно неверно, и $P_i \leq P_j$. Покажем, используя формулу 4.4, что $\mathcal{Q}_i > \mathcal{Q}_j$.

Параметр дисконтирования λ положителен, а значит, $\delta = \frac{1}{1+\lambda} < 1$. Поэтому функция δ^k монотонно убывает с увеличением k. Используя это, а также неравенство $\tau_i + \tau_{\text{кр},i} < \tau_j + \tau_{\text{кр},j}$, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\mathcal{Q}_i(1-\delta) = A\delta^{\tau_i} - P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}) = A\delta^{\tau_i} + P_i\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}} - P_i >$$
$$> A\delta^{\tau_j} + P_i\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}} - P_i = A\delta^{\tau_j} - P_i(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}}) \geq$$
$$\geq A\delta^{\tau_j} - P_j(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}}) = \mathcal{Q}_j(1-\delta),$$

откуда $\mathcal{Q}_i > \mathcal{Q}_j$ и в силу леммы 3 выполнено неравенство $P_i > P_j$, что противоречит нашему предположению. □

Следствие 4. *С ростом времени накопления взносы по тарифным планам в линейке уменьшаются, выигрыши потребителей не увеличиваются:* $P_1 > \ldots > P_i > \ldots > P_n$, $\mathcal{Q}_1 \geq \ldots \geq \mathcal{Q}_i \geq \ldots \geq \mathcal{Q}_n$.

Также отметим, что согласно следствию, тарифным планом $i \in S$ воспользуются те потребители, которые готовы платить P_i средств, но не готовы платить следующую по порядку величину взноса в линейке.

4.6 Выгрыши агентов от линейки

Мы готовы определить выигрыши агентов от всей линейки. Допустим, задана линейка $\mathcal{A}$ в обозначениях, данных в разделе 4.3.

Пусть f — заданная функция распределения потребителей по величине допустимого семейного платежа. Её можно вычислить, исходя из данных по семейному доходу домашних хозяйств (аналогично 5). Из сказанного выше следует, что долю α_i потребителей, участвующих в тарифном плане i, можно найти по следующей формуле. А именно, пусть $S = \{i_2, \ldots, i_{m-1}\}$, $i_1 = 1$, $i_m = n$, причём $i_2 < \ldots < i_{m-1}$. Тогда

$$\alpha_{i_k} = \begin{cases} f(P_1), & k = 1 \\ f(P_{i_k}) - f(P_{i_{k-1}}), & 1 < k \leq m. \end{cases} \tag{4.6}$$

Считая, что каждый период приходят 100 новых потребителей, распределённых по величине допустимого семейного платежа в соответствии с функцией распределения f, количество β_k потребителей, использующих тарифный план $k \in S \cup \{1, n\}$, задаётся следующим образом:

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{j \in S \cup \{1,n\}} \alpha_j} \cdot 100. \tag{4.7}$$

Отсюда выигрыши агентов от использования линейки $\mathcal{A}$ можно найти по следующим формулам[5]:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \sum_{j \in S \cup \{1,n\}} \beta_j \mathcal{D}_j,\ \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} = \sum_{j \in S \cup \{1,n\}} \beta_j \mathcal{Q}_j,\ G_{\mathcal{A}} = \sum_{j \in S \cup \{1,n\}} \beta_j G_j.$$

Очевидно, что соотношение 4.5 переписывается для линеек следующим образом:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} + G_{\mathcal{A}} + \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} = (\frac{A}{1-\delta} - K) \sum_{j \in S \cup \{1,n\}} \beta_j \delta^{\tau_j}. \tag{4.8}$$

Мы ввели определение линейки, выигрышей участников системы, показали монотонность взносов и закон сохранения. Теперь поговорим о том, как полезные свойства линейки связаны между собой. В следующем разделе мы покажем, что понятия правильной и локально правильной линейки эквивалентны.

4.7 Правильные линейки

Везде в этом разделе мы предполагаем, что задана линейка $\mathcal{A}$ с набором промежуточных тарифных планов $S = \{i_2, \ldots, i_{m-1}\}$, где $i_1 = 1$, $i_m = n$, $i_2 < \ldots < i_{m-1}$.

Основное утверждение это раздела выглядят следующим образом:

[5]Отметим, что в Главе 3 прибыль банка определялась не для тарифного плана, а для всей линейки сразу. Однако, как несложно показать, в данных нами ограничениях формула будет одинаковая: сумма взвешенной прибыли со всех тарифных планов и прибыль от данного набора тарифных планов будет по сути одна и та же.

4.8 Основные определения и результаты главы

Теорема 5. *Для линейки $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) линейка $\mathcal{A}$ является правильной;

(2) линейка $\mathcal{A}$ является локально правильной;

(3) выигрыши банка и государства монотонно убывают с увеличением времени накопления.

В данных выше обозначениях для последнее условие записывается следующим образом:

$$\mathcal{D}_{i_1} \geq \ldots \geq \mathcal{D}_{i_k} \geq \ldots \geq \mathcal{D}_{i_m}, G_{i_1} \geq \ldots \geq G_{i_k} \geq \ldots \geq G_{i_m}. \tag{4.9}$$

Напомним, что линейка называется правильной, если при удалении любого количества промежуточных тарифных планов всем участникам (государству, банку и потребителю) становится хуже, и локально правильной, если это верно при удалении одного (любого) промежуточного тарифного плана. Ясно, что правильная линейка является локально правильной. То есть из условия (1) теоремы следует условие (2). Докажем, что из условия (2) следует (3), а из условия (3) условие (1).

Будем придерживаться обозначений, приведённых выше. Докажем сначала вспомогательную лемму:

Лемма 4. *Выкидывание тарифного плана $i_k \neq n$ из линейки $\mathcal{A}$ не выгодно ни для кого из агентов тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}_{i_{k+1}} \leq \mathcal{D}_{i_k}$, $G_{i_{k+1}} \leq G_{i_k}$.*

Доказательство. Действительно, пусть мы исключили тарифный план i_k, получив новую линейку $\mathcal{B}$. Потребители выбирают план с наибольшим допустимым По Теореме 4 взносы монотонны: $P_{i_1} > \ldots > P_{i_k} > \ldots > P_{i_m}$. Тогда все потребители, использующие тарифный план i_k, станут использовать тарифный план i_{k+1}, а остальные потребители останутся на своих тарифных планах. Следовательно, выигрыши агентов при новой линейке $\mathcal{B}$ выглядят так:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \beta_1 \mathcal{D}_{i_1} + \ldots + \beta_{i_{k-1}} \mathcal{D}_{i_{k-1}} + (\beta_{i_k} + \beta_{i_{k+1}}) \mathcal{D}_{i_{k+1}} + \ldots + \beta_n \mathcal{D}_{i_m} =$$

$$= \mathcal{D}_{\mathcal{A}} - \beta_{i_k} \mathcal{D}_{i_k} + \beta_{i_k} \mathcal{D}_{i_{k+1}} = \mathcal{D}_{\mathcal{A}} + \beta_{i_k} (\mathcal{D}_{i_{k+1}} - \mathcal{D}_{i_k}).$$

Отсюда $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \mathcal{D}_{i_{k+1}} \leq \mathcal{D}_{i_k}$.

Аналогично, $G_{\mathcal{B}} \leq G_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow G_{i_{k+1}} \leq G_{i_k}$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \mathcal{Q}_{i_{k+1}} \leq \mathcal{Q}_{i_k}$. Осталось заметить, что неравенство $\mathcal{Q}_{i_{k+1}} \leq \mathcal{Q}_{i_k}$ выполнено всегда в силу теоремы 4.

Поэтому достаточно потребовать выполнения неравенств $\mathcal{D}_{i_{k+1}} \leq \mathcal{D}_{i_k}$, $G_{i_{k+1}} \leq G_{i_k}$.

$\square$

Доказательство. (Теоремы 5, (2) $\Rightarrow$ (3)) Предположим, что линейка $\mathcal{A}$ локально правильная. Тогда для каждого промежуточного плана его выкидывание не улучшит ситуацию ни для кого из агентов. По лемме 4 это утверждение равносильно тому, что выполнены неравенства 4.9.

(Теоремы 5, (3) $\Rightarrow$ (1))

Предположим, что выполнены неравенства 4.9. По теореме 4 выполнены неравенства

$$\mathcal{Q}_{i_1} \geq \ldots \geq \mathcal{Q}_{i_k} \geq \ldots \geq \mathcal{Q}_{i_m}.$$

Предположим, что мы хотим убрать набор промежуточных тарифных планов $S' \subset S$. Будем убирать их по очереди. На каждом шаге значения $\mathcal{D}_j, G_j, \mathcal{Q}_j$ не меняются. Так как для любого шага выполнено условие леммы 4, то на каждом шаге ситуация для всех агентов не улучшается. Значит, и после удаления всех планов она не улучшится. Таким образом, линейка является правильной. $\square$

Таким образом, мы не только доказали, что правильная линейка является локально правильной, но и указали критерий проверки правильности линейки. Теперь перейдём к изучению эффективных линеек. Сначала поговорим о том, можно ли поменять параметры линейки (не меняя выигрыш агентов) так, чтобы получить справедливую линейку.

4.9 Справедливые линейки

Сначала отметим очевидное, но очень важное следствие соотношений 4.2, 4.3, 4.4.

Утверждение 5. [6] *Выигрыши потребителя, банка и государства данного тарифного плана i зависят от значений P_i, s_i, τ_i, $\tau_{кр,i}$ и не зависят от конкретных значений ставок по взносам p_i и кредитам c_i.*

[6] На самом деле ставки p_i и c_i не могут быть выбраны совсем произвольно. Банк в момент получения потребителями первых контрактов теряет больше, чем получает (выплат по кредитам не хватает, он выдаёт контракты засчёт накопления других вкладчиков). Данное состояние называется *кассовым разрывом.* Для его «сглаживания» банку выгодно привлечь т.н. *друзей вкладчиков*, которые будут только накапливать средства, но не получать кредит. Друзей вкладчиков не может быть много, так как государство не будет тратить много средств на них. В результате компромисса между банком, государством и потребителям устанавливается значение p_i (а значит, и c_i).

Из этого утверждения следует, что ставки по взносам и кредитам можно изменять внутри одного тарифного плана, не меняя при этом выигрыш агентов. А именно, для данного тарифного плана i можно заменить на p_i на $\widetilde{p}_i$, c_i на $\widetilde{c}_i$ так, чтобы сохранилось соотношение

$$K = P_i \left(s_i\tau_i + \frac{1+\widetilde{p}_i}{\widetilde{p}_i}((1+\widetilde{p}_i)^{\tau_i} - 1) + \frac{1}{\widetilde{c}_i}\frac{(1+\widetilde{c}_i)^{\tau_{\text{кр},i}} - 1}{(1+\widetilde{c}_i)^{\tau_{\text{кр},i}}} \right). \tag{4.10}$$

Несложно понять, что при фиксированных параметрах $P_i, s_i, \tau_i, \tau_{\text{кр},i}$ увеличение ставки на взнос приведёт к увеличению ставки на кредит. Таким образом, в пределах одного тарифного плана пару $(\widetilde{p}_i, \widetilde{c}_i)$ можно увеличивать (уменьшать) с сохранением соотношения 4.10 пока один из параметров не станет максимальным (минимальным).

Отсюда понятно, что эффективная линейка не обязана быть справедливой: взяв эффективную линейку, можно менять параметры внутри разных тарифных планов так, чтобы они перестали неубывать с увеличением времени накопления. С другой стороны, банк, государство и агент заинтересованы прежде всего в значении собственного выигрыша. Если для данной эффективной линейки можно предложить справедливую линейку с теми же выигрышами (а значит, тоже эффективную), то агентам нет причин отказываться от использования более «привлекательно» выглядещей линейки.

Логично ввести следующее определение. Назовём две линейки $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ *эквивалентными*, если они одинаковы с точки зрения выигрышей агентов системы, то есть $\mathcal{D}_\mathcal{A} = \mathcal{D}_\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}_\mathcal{A} = \mathcal{Q}_\mathcal{B}$, $G_\mathcal{A} = G_\mathcal{B}$. Очевидно, что линейка, эквивалентная эффективной линейке является эффективной.

Докажем, что любая линейка эквивалентна некоторой справедливой линейке.

Теорема 6. *Для каждой линейки существует эквивалентная ей справедливая линейка.*

Данная теорема следует из следующей леммы.

Лемма 5. *Для линейки $\mathcal{A}$ с набором промежуточных тарифных планов $S = \{i_2, \ldots, i_{m-1}\}$ существует эквивалентная ей линейка $\mathcal{B}$, в которой ставки субсидий не увеличиваются с ростом времени накопления: $s_{i_1} \leq \ldots \leq s_{i_m}$.*

Доказательство. (Доказательство теоремы 6)

Пусть Лемма 5 доказана. Тогда можно считать, что в линейке $\mathcal{A}$ с набором промежуточных тарифных планов $S = \{i_2, \ldots, i_{m-1}\}$ ставки субсидий не уменьшаются с ростом времени накопления. Таким образом, достаточно добиться того, чтобы ставки по взносам и кредитам не увеличивались с ростом времени накопления.

Как было показано выше, если в промежуточном тарифным плане изменить ставки по взносу и кредиту так, чтобы взнос остался неизменным, то мы получим линейку, эквивалентную данной.

Будем делать это последовательно. Рассмотрим цепочку переходов $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2 \to \ldots \to \mathcal{A}_m$ к эквивалентным линейкам. На k-ом шаге мы будем изменять параметры только тарифного плана i_k. А именно, будем непрерывно увеличивать ставки по взносу p_{i_k} и кредиту c_{i_k}, не изменяя взнос P_{i_k}, пока один из параметров не станет равен значению соответствующего параметра из тарифного плана i_{k-1}.

К примеру, при переходе $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_2$ на тарифном плане i_2 мы будем увеличивать ставки по взносу и кредиту, не меняя P_2, пока один из параметров не станет максимальным. Далее, мы увеличим ставки по взносу и кредиту на тарифном плане i_3, пока один из параметров не совпадёт с (p_{i_2}, c_{i_2}). И так далее.

Таким образом, на каждом шаге мы меняем параметры так, чтобы они изменялись монотонно: по нашему построению $p_{i_1} \geq p_{i_2} \geq \ldots$, $c_{i_1} \geq c_{i_2} \geq \ldots$. Поэтому линейка $\mathcal{A}_m$ будет справедливой, и будет эквивалентна линейке $\mathcal{A}$.

□

Доказательство. (Доказательство Леммы 5)

Основная идея аналогична доказательству теоремы, однако мы уже не можем свободно изменять ставку субсидий, поскольку от неё напрямую зависит прибыль государства и банка. Поэтому мы поступим следующим образом: будем менять ставки взноса, кредита и субсидий на двух соседних промежуточных тарифных планах так, чтобы выполнились следующие условия: взнос не поменялся, получилась линейка, эквивалентная данной, но при этом ставка субсидий на плане с большим временем накопления была не меньше. Путём аккуратного изменения ставки субсидий на всех соседних промежуточных планах мы получим линейку, у которой ставки субсидий не уменьшаются с увеличением времени накопления.

Разобьём доказательство на две части. Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение

Лемма 6. *Рассмотрим линейку $\mathcal{A}$ и два соседних промежуточных тарифных плана $i, j \in S$, причём $\tau_i < \tau_j$, а $s_i > s_j$. Тогда можно так изменить параметры данных ТП, чтобы взносы P_i, P_j и функции выигрыша $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, $G_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$ не поменялись, но при этом s_i уменьшилось, а s_j увеличилось.*

Доказательство. Заметим, что выигрыш потребителя от одной линейки не зависит от ставки субсидий, а зависит лишь от взноса. Поэтому нас интересует лишь выигрыши государства и банка. Исходя из соотношения 4.8, выполнено следующее равенство:

$$\mathcal{D}_i + G_i = \frac{1}{1-\delta} P_i (1 - \delta^{\tau_i + \tau_{\text{кр},i}}) - K\delta^{\tau_i},$$

и следовательно,

$$\beta_i(\mathcal{D}_i + G_i) + \beta_j(\mathcal{D}_j + G_j) = \beta_i(\frac{1}{1-\delta} P_i (1 - \delta^{\tau_i + \tau_{\text{кр},i}}) - K\delta^{\tau_i}) +$$

$$+\beta_j(\frac{1}{1-\delta} P_j (1 - \delta^{\tau_j + \tau_{\text{кр},j}}) - K\delta^{\tau_i}).$$

Предположим теперь, что мы так изменили ставки $p_i, s_i, c_i, p_j, s_j, c_j$, что взносы P_i и P_j, а также сумма $\beta_i G_i + \beta_j G_j$ не поменялась. Из равенства выше следует, что величина $\beta_i \mathcal{D}_i + \beta_j \mathcal{D}_j$ также останется неизменной. Так как изменения коснулись только тарифных планов i и j, на остальных планах выигрыши агентов остались неизменными. Следовательно, мы получили эквивалентную линейку.

Таким образом, наша цель — понять, как мы можем менять параметры $p_i, s_i, c_i, p_j, s_j, c_j$, с условием сохранения величин P_i, P_j, $\beta_i G_i + \beta_j G_j$ при заданных ограничениях. Другими словами, мы решаем задачу минимизации функции $s_i - s_j$ при заданных ограничениях:

$$p_{\min} \le p_i \le p_{\max}, p_{\min} \le p_j \le p_{\max}, c_{\min} \le c_i \le c_{\max}, c_{\min} \le c_j \le c_{\max},$$

$$P_i = const, P_j = const, \beta_i G_i + \beta_j G_j = const.$$

Понятно, что при уменьшении (увеличении) ставки субсидий и сохранении взноса необходимо увеличивать (уменьшать) ставки по взносам или кредитам. Также понятно, что при уменьшении s_i или s_j увеличивается выигрыш государства $\beta_i G_i + \beta_j G_j$.

Проделаем следующие шаги:

(1) если $c_i < c_{\max}$, $c_j > c_{\min}$, то: уменьшим s_i, увеличим c_i, уменьшим c_j, увеличим s_j так, чтобы $P_i, P_j, \beta_i G_i + \beta_j G_j$ не изменились;

(2) если $c_i = c_{\max}$, то уменьшим параметры p_i, c_i так, чтобы остальные параметры: $s_i, P_i, \beta_i G_i$ не изменились и применим шаг (1);

(3) если $c_j = c_{\min}$, то увеличим параметры p_j, c_j так, чтобы остальные параметры: $s_j, P_j, \beta_j G_j$ не изменились и применим шаг (1).

Шаг (1) можно проделать в силу непрерывности функций P_i, P_j, $\beta_i G_i + \beta_j G_j$: для каждой из них можно немного изменить указанные параметры так, чтобы сами функции не поменяли своё значение.

Шаг (2) и (3) можно сделать в силу непрерывности функции P_i, а также тому условию, что $c_{\min} < c_{\max}$, $p_{\min} < p_{\max}$.

Отсюда мы получаем требуемое: сделав шаг 1 мы уменьшим s_i и увеличим s_j.

$\square$

Докажем теперь требуемое утверждение. Рассмотрим линейку $\mathcal{A}$ и определим множество $\mathcal{M}$ как множество линеек, которые

(1) эквивалентны линейке $\mathcal{A}$;

(2) имеют тот же набор промежуточных тарифных планов $S = \{i_2, \ldots, i_{m-1}\}$;

(3) имеют те же взносы, что и у линейки $\mathcal{A}$.

Так как множество данных линеек задаётся нестрогими неравенствами и равенствами на параметры и целевые функции, множество параметров в $\mathcal{M}$ является замкнутым. Значит, найдётся линейка с минимальным значением (среди всех возможных в $\mathcal{M}_1$) ставки субсидий на тарифном плане i_2. Обозначим через $\mathcal{M}_1$ множество таких линеек. Выберем в $\mathcal{M}_1$ подмножество линеек $\mathcal{M}_2$, у которых значение s_{i_2} минимально среди всех линеек из $\mathcal{M}_1$. По доказанной Лемме, $s_{i_2} \geq s_{i_1}$, так как в противном случае существует линейка из $\mathcal{M}$, у которой ставка субсидий на плане i_1 меньше s_{i_1}, что противоречит минимальности s_{i_1}.

Далее, рассмотрим $\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{M}_2$, у которой s_{i_3} минимальное среди всех возможных, и.т.д. На j-ом шаге мы получаем непустое множество линеек, у которых первые j ставок субсидий неубывают. Таким образом, по индукции мы получаем линейку, у которой ставки субсидий неубывают.

$\square$

Главный вывод данного раздела — для изучения значений выигрышей эффективных линеек достаточно рассмотреть справедливые эффективные линейки.

4.10 Сплошность и правильность эффективных линеек

В прошлом разделе мы получили, что, хоть и не каждая эффективная линейка является справедливой, однако заменой параметров, не меняющих выигрыш агентов, можно получить справедливую эффективную линейку. Естественный вопрос: можно ли проделать тоже самое с остальными хорошими свойствами линеек.

К примеру, рассмотрим следующий вопрос: верно ли, что любая эффективная линейка является сплошной, то есть содержит все промежуточные тарифные планы? Какие к этому есть предпосылки? Согласно соотношению 4.8 для суммы выигрышей агентов линейки $\mathcal{A}$ с набором промежуточных ТП $S = \{i_2, \ldots, i_{m-1}\}$, где $i_1 = 1$, $i_m = n$, $i_2 < i_3 < \ldots < i_{m-1}$ выполнено следующее соотношение:

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} + G_{\mathcal{A}} + \mathcal{D}_{\mathcal{A}} = (\frac{A}{1-\delta} - K)(\beta_{i_1}\delta^{\tau_{i_1}} + \beta_{i_2}\delta^{\tau_{i_2}} + \ldots + \beta_{i_m}\delta^{\tau_{i_m}}),$$

где $i_1 = 1, \ldots, i_m = n$ — индексы тарифных планов.

Ясно, что добавление ещё одного промежуточного плана j увеличит суммарный выигрыш: если следующий за ним план имеет номер i_k, то в сумме в правой части выражения 4.5 слагаемое $\beta_{i_k}\delta^{\tau_{i_k}}$ заменится на $\beta_j\delta^{\tau_j} + (\beta_{i_k} - \beta_j)\delta^{\tau_{i_k}} > \beta_{i_k}\delta^{\tau_{i_k}}$, и общая сумма увеличится.

Поэтому, в целом, добавление тарифного плана увеличивает общий выигрыш. Однако совершенно не очевидно, почему добавление нового тарифного плана улучшит положение для одного из агентов, не ухудшив его для остальных. Ясно, что ответ зависит от соотношения параметров системы. Мы выпишем достаточные условие на наличие сплошной эффективной линейки, эквивалентной данной и продемонстируем, как их проверять для случая краснодарской линейки.

Теперь перейдём к свойству правильности. В силу Теоремы 5, правильность равносильна тому, что выигрыши агентов не увеличиваются с ростом времени накопления. Более того, у потребителя выигрыши обязаны уменьшаться. Будет ли эффективная линейка правильной? Опять же, это выглядит логично: на линейках с меньшим сроком накопления суммарный выигрыш агентов больше, и возможно, удастся так распределить выигрыши агентов между тарифными планами, чтобы они не увеличивались. Однако, так как речь идёт только о государстве и банке, их суммарный выигрыш может быть и меньше на линейках с меньшим сроком накопления. В следующем разделе мы приведём пример эффективной неправильной линейки, для которой не существует эквивалентной ей правильной линейки.

4.11 Краснодарские линейки

Опишем краснодарские линейки, определённой в разделе 4.3. Напомним, что имеется ввиду. Тарифный план ССП построен на основе программы в Краснодаре: годовая ставка по вкладу 2%, по кредиту 6%, субсидии — 30%, срок накопления 5 лет, срок кредитования 7,5 лет. Для коммерческого тарифного плана берутся существующие процентные ставки на рынке: годовая ставка по вкладу 5%, по кредиту 12,5%, субсидии — 0%. Срок накопления — 1 год, срок кредитования возьмём такой же, как и в ССП — 7,5 лет. В качестве промежуточных тарифных планов рассматриваем планы, в которых срок кредитования также 7,5 лет, а срок накопления — 2,3 или 4 года.

В качестве единицы измерения времени возьмём месяц. Если q — годовая ставка процента, будем считать $q/12$ месячной ставкой. Тогда краснодарская линейка состоит из крайних планов: $(12, 0, \frac{0{,}05}{12}, \frac{0{,}135}{12}, 90)$ для коммерческого ТП и $(60, 30, \frac{0{,}02}{12}, \frac{0{,}06}{12}, 90)$ для субсидируемого тарифного плана, на промежуточных тарифных планах срок кредитования равен 7,5 годам (то есть 90 периодов), срок накопления составляет 2, 3 или 4 года (соотв. $24, 36$ или 48). Таким образом, $n = 5$, заданы тарифные планы $(\tau_i, s_i, c_i, p_1, \tau_{\text{кр},i})$ для $i = 1, 5$ и время накопления и кредитования для промежуточных тарифных планов. Множество промежуточных тарифных планов задаётся множеством индексов $S \subset \{2, 3, 4\}$.

Зафиксируем контракт $K = 1,535$ миллиона рублей, и рассчитаем взносы на крайних тарифных планах P_1 и P_5 при помощи формулы 4.1 (напомним, что взносы и выплаты по кредитам у нас совпадают).

Мы получим (будем округлять до целого числа), что $P_1 = 22300$, $P_5 = 10000$.

Рассчитаем выигрыши агентов, исходя из оценочных параметров аренды $A = 22000$ (аналогично разделу 3.3.2) и дисконта $\lambda = \frac{0{,}08}{12}$. Из параметров крайних тарифные планы, находим по формуле 4.4 $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_5$. По теореме 4 для $i = 2, 3, 4$ выполнены неравенства $\mathcal{Q}_1 < \mathcal{Q}_i < \mathcal{Q}_5$. Исходя из этих неравенств, можно найти ограничения на P_2, P_3, P_4. А именно, мы получаем следующие неравенства:

$$11087 \leq P_4 \leq 12552; \;\; 14076 \leq P_3 \leq 15627; \;\; 17735 \leq P_2 \leq 19390.$$

Кроме этого, покажем вспомогательное утверждение: для любого достижимого значения P_i, где $i = 2, 3$, можно так подобрать параметры s_i, c_i, p_i, чтобы $s_i = 0$. Так как при изменении параметров P_i меняется непрерывно, покажем, что все возможные значения P_i достигаются.

В таблице 5 приведены значения взноса при $s_i = 0$, $c_i = c_{\max}$ или $c_{\min}$ и $p = p_{\min}$ (для удобства указаны годовые ставки) . В первой и третьей строчке мы получили максимальное возможное значение взноса при данных ограничениях параметров. Действительно, взнос максимален при минимальных субсдиях и ставки по взносу и максимальной ставке по кредиту.

Значение взноса во второй и четвёртой строчках меньше, чем допустимые

Таблица 5: Границы для значений P_i при $s_i = 0$.

i	Взнос	τ	p_i,год	c_i,год	s_i
2	18970	24	2%	13,5%	0%
2	15851	24	2%	6%	0%
3	16409	36	2%	13,5%	0%
3	14023	36	2%	6%	0%

границы: 14076 для 3-летнего плана, и 17735 для 2-летнего. Это означает, что для любого допустимого значения взноса можно подобрать параметры так, чтобы ставка субсидий была равна 0.

Кроме этого факта, приведём следующий пример.

Пример эффективной неправильной линейки

Рассмотрим линейку $\mathcal{A}$ с максимальным выигрышем потребителя среди всех возможных линеек. Очевидно, она является эффективной. Как она устроена? Ясно, что на каждом тарифном плане мы рассматриваем максимальный выигрыш потребителя. По нашему условию, он не может быть больше $\mathcal{Q}_1$.

В частности, рассмотрим тарифный план на 4 года с таким взносом P_4, что выполнено равенство $\mathcal{Q}_4 = \mathcal{Q}_1$. Подставляя известные нам значения параметров, получаем, что $P_4 = 11087$. Тогда выигрыш потребителя от линейки $\mathcal{A}$, содержащей крайние планы и данный план на 4 года, равен $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} = \beta_1\mathcal{Q}_1 + \beta_4\mathcal{Q}_4 + \beta_5\mathcal{Q}_5 = (\beta_1 + \beta_4)\mathcal{Q}_4 + \beta_5\mathcal{Q}_5$. Так как $\mathcal{Q}_j$ и β_j увеличиваются при уменьшении P_i, мы получаем, что большего выигрыша нам не достичь: мы взяли максимальное возможное количество потребителей, которые могут получить полезность $\mathcal{Q}_1$ (которая является максимально возможной).

Заметим, что в любой линейке, эквивалентной данной, взнос P_4 должен оставаться таким же. Действительно, мы не можем его увеличить, так как тогда полезность потребителя $\mathcal{Q}_4$ станет больше $\mathcal{Q}_1$, что противоречит определению линейки. Если же мы его уменьшим, что уменьшится и выигрыш потребителя на всей линейке, и тогда получившаяся линейка будет неэквивалентна данной.

Так как взнос P_4 не меняется, суммарный выигрыш государства и банка на этом ТП фиксирован. Подставляя значения параметров, получаем: $G_4 + \mathcal{D}_4 = -734 < G_5 + \mathcal{D}_5 = -514$. Отсюда выигрыш либо государства либо банка на ТП с номером 4 меньше, чем на ТП с номером 5. Следовательно, любая линейка, эквивалентная данной является неправильной. Мы получили эффективную линейку, у которой нет эквивалентных правильных линеек.

4.12 Сплошность эффективной линейки

Для полноты описания, мы выпишем достаточное условие на сплошность эффективной линейки, а потом рассмотрим случай краснодарской линейки.

Нам необходимо понять, когда к линейке можно добавить тарифный план, которого нет в этой линейке так, чтобы выигрыш всех агентов не уменьшился. Обозначим через i номер тарифного плана, которого нет в линейке $\mathcal{A}$, а через j и k обозначим ближайшие к i тарифные планы из $\mathcal{A}$. Будем считать, что $k < j$. Нам надо понять, можно ли добавить тарифный план i, и при каком ограничении на параметры линейка с добавленным тарифным планом будет не хуже для всех агентов.

В первую очередь необходимо проверить, что к линейке $\mathcal{A}$ можно добавить хотя бы один тарифный план с номером i так, чтобы ТП i использовал хотя бы один потребитель.

Лемма 7. *В данных выше обозначениях всегда найдутся такие параметры p_i, s_i, c_i, удовлетворяющие необходимым ограничениям, что при добавлении к линейке $\mathcal{A}$ тарифного плана $(\tau_i, \tau_{\text{кр},i}, p_i, s_i, c_i)$ этот план будет использовать хотя бы один потребитель.*

Доказательство. Заметим, что достаточно найти ТП i при котором выполняются неравенства $\mathcal{Q}_k \geq \mathcal{Q}_i \geq \mathcal{Q}_j$. Заметим, что $\mathcal{Q}_k \geq \mathcal{Q}_j$ и $P_k > P_j$ по Лемме 3. Используя формулу для $\mathcal{Q}_k, \mathcal{Q}_j$, получаем следующее неравенство:

$$A\delta^{\tau_k} - P_k(1 - \delta^{\tau_k + \tau_{\text{кр},k}}) \geq A\delta^{\tau_j} - P_j(1 - \delta^{\tau_j + \tau_{\text{кр},j}}).$$

Используя очевидные неравенства $A\delta^{\tau_k} > A\delta^{\tau_i} > A\delta^{\tau_j}$, и $\delta^{\tau_k+\tau_{\text{кр},k}} \geq \delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}} \geq \delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},i}}$, мы получаем, что выполнены следующие неравенства:

$$A\delta^{\tau_k} - P_k(1 - \delta^{\tau_k + \tau_{\text{кр},k}}) \geq A\delta^{\tau_i} - P_k(1 - \delta^{\tau_i + \tau_{\text{кр},i}}),$$

$$A\delta^{\tau_i} - P_j(1 - \delta^{\tau_i + \tau_{\text{кр},i}}) \geq A\delta^{\tau_j} - P_j(1 - \delta^{\tau_j + \tau_{\text{кр},j}}).$$

Так как функция

$$f(x) = A\delta^{\tau_i} - x(1 - \delta^{\tau_i + \tau_{\text{кр},i}})$$

непрерывна по x и убывает при увеличении x, причём $f(P_j) \geq \mathcal{Q}_j$, $\mathcal{Q}_k \geq f(P_k)$, то найдётся такое $x_0 \in (P_k, P_j)$, что $\mathcal{Q}_k \geq f(x_0) \geq \mathcal{Q}_j$. Следовательно, можно взять $P_i = x_0$.

Осталось заметить, что $P_i \in (P_k, P_j)$. Так как P_i непрерывно зависит от параметров p_i, s_i, c_i, то можно подобрать значения p_i, s_i, c_i, которые расположены между соответствующими значениями ТП j и k, и поэтому они удовлетворяют необходимым ограничениям.

$\square$

Найдём требуемые неравенства. После добавления тарифного плана i согласно доказательству Леммы 4, выигрыши агентов изменятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} &= \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} + \beta_i(\mathcal{Q}_i - \mathcal{Q}_j),\\
G_{\mathcal{B}} &= G_{\mathcal{A}} + \beta_i(G_i - G_j),\\
\mathcal{D}_{\mathcal{B}} &= \mathcal{D}_{\mathcal{A}} + \beta_i(\mathcal{D}_i - \mathcal{D}_j),
\end{aligned}$$

где через $\mathcal{B}$ обозначена линейка $\mathcal{A}$ с добавленным тарифным планом i.

Линейка $\mathcal{B}$ не хуже линейки $\mathcal{A}$ для всех агентов в том и только в том случае, когда выполнены неравенства $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \geq \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$, $G_{\mathcal{B}} \geq G_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \geq \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, что равносильно выполнению неравенств $\mathcal{Q}_i \geq \mathcal{Q}_j$, $G_i \geq G_j$, $\mathcal{D}_i \geq \mathcal{D}_j$. Первое неравенство выполнено из условия допустимости тарифного плана i. Таким образом, достаточно показать, что параметры тарифного плана i можно подобрать таким образом, что $G_i \geq G_j$, $\mathcal{D}_i \geq \mathcal{D}_j$. Выигрыши государства и банка зависят от P_i и s_i. Выписывая явные формулы для выигрыша государства и банка, мы можем сформулировать следующее утверждение:

Утверждение 6. *Пусть дана линейка $\mathcal{A}$, не содержащая тарифный план i, а $j,k \in S$, где $j > k$ — номера ближайших тарифных планов к i. Если найдётся тарифный план i с взносом P_i и величиной социальных субсидий s_i, которые удовлетворяют неравенствам:*

$$A\delta^{\tau_k} - P_k(1-\delta^{\tau_k+\tau_{\text{кр},k}}) \geq A\delta^{\tau_i} - P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}) \geq A\delta^{\tau_j} - P_j(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}}),$$

$$P_i s_i(1-\delta^{\tau_i}) \leq P_j s_j(1-\delta^{\tau_j}),$$

$$P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}+s_i(1-\delta^{\tau_i}))-K(1-\delta)\delta^{\tau_i} \geq P_j(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}}+s_j(1-\delta^{\tau_j}))-K(1-\delta)\delta^{\tau_j},$$

то к линейке $\mathcal{A}$ можно добавить данный тарифный план i, не уменьшив выигрыши всех агентов.

Заметим, что, хоть выигрыш государства и банка зависит от ставки субсидий, суммарный выигрыш от неё не зависит. При этом очевидно, что для выполнения неравенств необходимо, чтобы суммарный выигрыш банка и государства на тарифном плане i был не меньше аналогичного выигрыша на тарифном плане j:

$$P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}) - K(1-\delta)\delta^{\tau_i} \geq P_j(1-\delta^{\tau_j+\tau_{\text{кр},j}}) - K(1-\delta)\delta^{\tau_j}.$$

Отметим следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 8. *Функция $\mathcal{D} = P(1-\delta^{\tau+\tau_{\text{кр}}} + s(1-\delta^{\tau})) - K(1-\delta)\delta^{\tau}$ при ограничениях $P_{\min} \leq P \leq P_{\max}$, $s_{\min} \leq s \leq s_{\max}$ достигает своего минимального (максимального) значения при $P = P_{\min}(P_{\max})$, $s = s_{\min}$ или $s_{\max}$.*

Доказательство. Прежде всего, данная функция непрерывно зависит от параметров. Кроме того, коэффициент при P положительный, а значит экстремального значения функция достигнет при граничном значении P.

Зависимость от s не столь очевидна, так как P само зависит от s. Если использовать формулу для взноса P, то мы получим следующее равенство:

$$\mathcal{D} = K\frac{1-\delta^{\tau+\tau_{\text{кр}}}+s(1-\delta^{\tau})}{s\cdot\tau+\frac{1+p}{p}((1+p)^{\tau}-1)+\frac{1}{c}\frac{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}-1}{(1+c)^{\tau_{\text{кр}}}}} - K(1-\delta)\delta^{\tau}.$$

Отсюда ясно, что данная функция также будет монотонно зависить от s. При разных значениях $p, c, \tau, \tau_{\text{кр}}$ функция может как монотонно убывать, так и монотонно возрастать, но в любом случае экстремальное значение принимается на границе допустимых значений. $\square$

Зафиксируем взнос P_i на тарифном плане i и введём следующие обозначения. Через S_i обозначим множество возможных значений s_i при данном значении P_i. Так как S_i ограничено и замкнуто, то в нём существует минимальный и максимальный элементы — обозначим их через $\underline{s}_i$ и $\overline{s}_i$ соответственно.

Определим максимальное значение выигрышей банка и государства от тарифного плана i при фиксированном взносе P_i:

$$\widetilde{D}(P_i) = \max_{s_i\in S_i}\{P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{\text{кр},i}}+s_i(1-\delta^{\tau_i}))-K(1-\delta)\delta^{\tau_i}\},$$
$$\widetilde{G}(P_i) = \max_{s_i\in S_i}\{-P_i s_i(1-\delta^{\tau_i})\}.$$

Из предыдущей Леммы и очевидной монотонности функции $\widetilde{G}(P_i)$ следует утверждение, показывающее, как найти значения $\widetilde{D}(P_i)$, $\widetilde{G}(P_i)$:

Утверждение 7. $\widetilde{D}(P_i) = \max\{P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{кр,i}}+\overline{s}_i(1-\delta^{\tau_i}))-K(1-\delta)\delta^{\tau_i}, P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{кр,i}}+\underline{s}_i(1-\delta^{\tau_i}))-K(1-\delta)\delta^{\tau_i}\}$,
$\widetilde{G}(P_i) = -P_i\underline{s}_i(1-\delta^{\tau_i})$.

Мы готовы сформулировать критерий для нахождения нового тарифного плана i:

Утверждение 8. *Предположим что в данных выше обозначениях найдётся тарифный план с номером i и взносом P_i так, что выполнены следующие неравенства:*

(1) $A\delta^{\tau_k}-P_k(1-\delta^{\tau_k+\tau_{кр,k}}) \geq A\delta^{\tau_i}-P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{кр,i}}) \geq A\delta^{\tau_j}-P_j(1-\delta^{\tau_j+\tau_{кр,j}})$,

$$P_i(1-\delta^{\tau_i+\tau_{кр,i}})-K(1-\delta)\delta^{\tau_i} \geq P_j(1-\delta^{\tau_j+\tau_{кр,j}})-K(1-\delta)\delta^{\tau_j},$$

(2) $\widetilde{\mathcal{D}}(P_i) \geq \widetilde{\mathcal{D}}(P_j)$*;*

(3) $\widetilde{G}(P_i) \geq \widetilde{G}(P_j)$*.*

Тогда найдётся тарифный план i*, при добавлении которого к линейке* $\mathcal{A}$ *ни один из агентов не проиграет.*

Доказательство. Прежде всего, из условия (1) следует два факта. Во-первых, все возможные тарифные планы с номером i и взносом P_i допустимы. Во-вторых, для всех таких планов суммарный выигрыш банка и государства больше, чем для любого тарифного плана с номером j и взносом P_j.

Рассмотрим план с номером i, взносом P_i, на котором достигается выигрыш банка $\widetilde{\mathcal{D}}(P_i)$. Согласно Утверждению 7 субсидии на этом плане равны $\overline{s}_i$ или $\underline{s}_i$. Во втором случае в качестве искомого плана подойдёт план с субсидиями $\underline{s}_i$: на нём выигрыши банка и государства больше.

Рассмотрим оставшийся случай: на плане с номером i, взносом P_i и максимальным выигрышем банка субсидии равны $\overline{s}_i$. Если на этом плане выигрыш государства также больше $\widetilde{G}(P_j)$, то в можно взять данный план в качестве искомого. Пусть теперь выигрыш государства на этом плане i меньше, чем $\widetilde{G}(P_j)$. Тогда будем непрерывно уменьшать субсидии на плане i, не меняя взнос. В силу непрерывности найдётся такое значение s_i субсидий, что выполняется равенство

$$G_i = -P_i s_i (1 - \delta^{\tau_i}) = \widetilde{G}(P_j).$$

Но так как $G_i + \mathcal{D}_i \geqslant \widetilde{G}(P_j) + \widetilde{\mathcal{D}}(P_j)$ по условию (1), мы получаем, что $\mathcal{D}_i \geq \widetilde{\mathcal{D}}(P_j)$. Отсюда в качестве искомого можно взять план с взносом P_i и значением субсидий s_i.

□

Покажем, как применять Утверждение 8 на примере краснодарских линеек. Отметим некоторые значения выигрышей агентов при данных значениях.

В таблице 6 указаны следующие данные: для некоторых значений «крайних» взносов P приведены время накопления τ, общий выигрыш государства и агента $\widetilde{\mathcal{D}}+\widetilde{G}$. В столбце $\widetilde{\mathcal{D}}$ указано максимальное значение выигрыша банка при данном взносе и времени накопление. Далее указан выигрыш потребителя $\mathcal{Q}$. В последних трёх столбцах указаны значения параметров, при котором реализуется данный тарифный план (для удобства указаны годовые ставки по взносу и кредиту).

Утверждение 9. *Для несплошной краснодарской линейки можно добавить недостающий тарифный план так, чтобы выигрыши всех агентов не уменьшились.*

Таблица 6: Данные для конкретного значения взноса.

Номер	Взнос	τ	$\widetilde{\mathcal{D}}+\widetilde{G}$	$\widetilde{\mathcal{D}}$	$\mathcal{Q}$	$p_{\text{год}}$	$c_{\text{год}}$	s
1.	18900	24	1371	1371	8718	2%	13,5%	0,005%
2.	17735	24	752	1347	9337	2%	13,5%	22,7%
3.	15627	36	858	1275	8457	2%	13,5%	12,5%
4.	15400	36	730	1272	8586	2%	13,5%	16,5%
5.	15000	36	503	1263	8813	2%	13,5%	23,9%
6.	14076	36	−20	877	9337	2%	11%	30%
7.	12552	48	144	1173	8457	2%	12,7%	30%
8.	12100	48	−126	864	8729	2%	10,4%	30%
9.	10000	60	−514	472	8457	2%	13,5%	30%

Доказательство. Рассмотрим разные случаи:

(1) Добавляем тарифный план на 4 года. Всегда можно взять план с номером 7, то есть с условием $\mathcal{Q}_4 = \mathcal{Q}_5$. Для такого плана $\mathcal{D}_4 + G_4 > \mathcal{D}_5 + G_5$. А так как максимальная прибыль банка больше чем у тарифного плана на 5 лет, то данный план будет выгодней для государства и банка.

(2) Добавляем тарифный план на 3 года. Берём план с минимально возможным взносом, то есть таким, чтобы $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_3$. Докажем, что все агенты не проиграют от этого. Для потребителя это выполнено. Далее есть два варианта:

(2.1) $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_3$, $P_4 < 12100$. Так как $P_3 \geq 14076 > 12100 > P_4$, то $\mathcal{D}_3 + G_3 \geq (\widetilde{\mathcal{D}}+\widetilde{G})(14076) = -20 > -126 = (\widetilde{\mathcal{D}}+\widetilde{G})(12100) > \mathcal{D}_2 + G_2$. С другой стороны, $\mathcal{D}_3 \geq \widetilde{\mathcal{D}}(14076) = 877 > 864 = \widetilde{\mathcal{D}}(12100) > \mathcal{D}_2$. Отсюда по Утверждению 8 новый тарифный план удовлетворяет всем условиям.

(2.2) $P_4 > 12100$. Если тарифный план с $P_3 = 15000$ допустим, то рассмотрим его, иначе возьмём план с минимально допустимым взносом, то есть $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_3$. Тогда последний будет больше 15000. В этом случае $\mathcal{D}_3 + G_3 = (\widetilde{\mathcal{D}}+\widetilde{G})(15000) = 503 > 144 = (\widetilde{\mathcal{D}}+\widetilde{G})(12500) > \mathcal{D}_2 + G_2$. С другой стороны, $\mathcal{D}_3 > \widetilde{\mathcal{D}}(15000) = 1263 > 1173 = \widetilde{\mathcal{D}}(12500) > \mathcal{D}_2$. Опять же по Утверждению 8 новый тарифный план удовлетворяет всем условиям.

(3) Добавляем тарифный план на 2 года. Как и в предыдущем случае, рассмотрим два варианта.

(3.1) $P_3 < 15400$. В этом случае рассмотрим тарифный план с минимально возможным взносом $P_2 = 17735$. Он допустим, так как $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_1$. Тогда $\mathcal{D}_2 + G_2 > (\widetilde{\mathcal{D}}+\widetilde{G})(17735) = 752 > 730 = (\widetilde{\mathcal{D}}+\widetilde{G})(15400) > \mathcal{D}_3 + G_3$, $\mathcal{D}_2 > \widetilde{\mathcal{D}}(17735) = 1347 > 1272 = \widetilde{\mathcal{D}}(15400) > \mathcal{D}_3$. И снова по Утверждению 8 новый тарифный план удовлетворяет всем условиям.

(3.2) Если же $P_3 > 15400$, то возьмём тарифный план с $P_2 = 18900$. Он допустим, так как $\mathcal{Q}_3 \leq 8586 < 8718 = \mathcal{Q}_2$. Далее проверяем те же неравенства, что и в предыдущих случаях: $\mathcal{D}_2+G_2 = 1371 > 858 = (\widetilde{\mathcal{D}}+\widetilde{G})(15627) > \mathcal{D}_3 + G_3$, $\mathcal{D}_2 = 1371 > 1275 = \widetilde{\mathcal{D}}(15627) > \mathcal{D}_3$. Все случаи разобраны.

$\square$

5. Заключение

Сформулируем здесь основные выводы, полученные в результате диссертационного исследования.

1. Построена динамическая модель жилищных накопительных счетов, описывающая работу спецсчетов в соответствии с той или иной программой накопления и кредитования. Она предназначена для исследования, оценки и выбора параметров накопления, кредитования и субсидирования вкладчиков стройсберкасс, жилищных накопительных счетов в банках и любых других институтов, где режим кредитования вкладчиков зависит от параметров выполненной вкладчиком программы накопления средств.

2. Проведённые многочисленные компьютерные расчеты на динамической модели показали, что в российских условиях существуют тарифные планы, которые обеспечивают устойчивую работу спецсчетов в широком диапазоне изменения внешних условий и параметров тарифного плана. Анализ различных ссудно-сберегательных программ и правил работы спецсчетов, проверка их на сбалансированность и устойчивость позволили сформулировать предложения по созданию экспериментальных накопительных программ для граждан Краснодарского края.

3. Разработанная модель составляет основу для создания методологии разработки и анализа тарифных программ строительных сберегательных касс и жилищных накопительных счетов.

4. Показано, что в несовершенной российской институциональной среде формирование линейки промежуточных тарифных планов, соединяющей институты ССП с коммерческой ипотекой, может существенно повысить эффективность ипотечной системы: ускорить приобретение жилья потребителями с невысокими доходами, снизить расходы государства на субсидирование ипотеки и повысить прибыль банка.

5. Сформулированы основные требования к линейкам промежуточных тарифных планов, которые будут выгодны всем участникам ссудо-сбере-

гательной программы: потребителю, банку и государству. Для оценки этой выгоды вводятся выигрыши каждого из агентов ССП на основе динамической модели. Приведен общий принцип конструирования линеек. Введены понятия эффективной, правильной, сплошной и справедливой линейки, предлагается модель для исследования линеек.

6. Построен пример, демонстрирующий, что при нынешних российских условиях существуют линейки, обладающие перечисленными свойствами и включающие, по крайней мере, пять субсидируемых тарифных планов – от однолетнего до пяти-летнего. Отсюда, в частности, следует и существование эффективных линеек. Описано влияние параметров тарифных планов на целевые функции участников ССП.

7. Исследована связь между полезными свойствами линеек ссудо-сберегательных тарифных планов, позволяющая существенно упростить поиск эффективных (Парето-оптимальных) линеек.

Список литературы

1. **Артемова Е.** Ипотека для народа. [Электронный ресурс] Сетевое издание «Интер- факс-Россия». Режим доступа: `http://www.interfax-russia.ru/South/view.asp?id=328529`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: октябрь 2013 г.).

2. В Башкирии собираются доплачивать из бюджета тем, кто копит на квартиру (2014). [Электронный ресурс] Режим доступа: `http://www.regnum.ru/news/polit/1767754.html`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: февраль 2014 г.).

3. В Башкирии начинает действовать ипотечно-накопительная программа [Электронный ресурс] Режим доступа: `http://www.ufanet.ru/news/index.jsp?action=show&id=16153&startnum=0&showcat=6&category=-1`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: апрель 2014 г.).

4. В Башкирии внедряют альтернативу ипотеке (2014) [Электронный ресурс] Режим доступа: `http://fedpress.ru/news/society/news_society/1392622649-v-bashkirii-vnedryayut-alternativu-ipoteke`свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: февраль 2014 г.).

5. В Башкортостане выданы первые ипотечные кредиты под 7% годовых(2017). [Электронный ресурс] Режим доступа: `https://building.bashkortostan.ru/presscenter/news/580457/`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: июнь 2017 г.).

6. В Калужской области будут внедрять механизм накопительной ипотеки (2014). [Электронный ресурс] Режим доступа: `http://ugra-news.ru/frontpageart/38070`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: февраль 2014 г.).

7. Доходы, расходы и потребление домашних хозяйств в 2011 г. [Электронный ресурс] Федеральная служба государственной статистики. Режим доступа: `http://www.gks.ru/bgd/regl/b11_102/Main.htm`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: май 2014 г.).

8. **Гасанов И.И.** Организация ссудно-сберегательной кассы по принципу очереди.// *М.: ВЦ РАН*, 2006. 45 с.

9. **Гасанов И.И., Ерешко Ф.И.** Моделирование ипотечных механизмов с самофинансированием // *Сообщения по прикладной математике ВЦ РАН.* - М.: ВЦ РАН, 2007. 60с.

10. **Ерешко Ф.И., Кочетков А.В., Сытов А.Н.** Механизмы реализации программы ипотечного кредитования // *Четвёртая международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем». Доклады. ИПУ РАН*, 2-4 октября 2010г. т.1, 57-72

11. За февраль в донском регионе выдано более 2 тыс. ипотечных кредитов. (2015) [Электронный ресурс] Аргументы и факты. `http://www.rostov.aif.ru/money/1485116`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: апрель 2015 г.).

12. **Ильинский Д.Г., В. М. Полтерович, О.Ю. Старков** (2012). Моделирование накопительных жилищных счетов в г. Краснодаре. Отчет о научно-исследовательской работе. Договор No 12/01 о проведении научно-исследовательской работы для ОАО «Агентство развития Краснодарского края / Под рук. В.М. Полтеровича. //*М.: Новая экономическая ассоциация.*

13. **Ильинский Д.Г., Лахин А.В., Полтерович В.М., Старков О.Ю.** (2012) Стройсберкасса (жилищные накопительные вклады) // *Свидетельство о государственной регистрации ПрЭВМ, рег. №2012617869 от 10.07.2012. — М.: Роспатент.*

14. **Ильинский Д.Г., Полтерович В.М., Старков О.Ю.** (2014). Разработка и исследование ссудо-сберегательных программ ипотечного кредитования: динамическая модель // *Экономика и математические методы.* Т. 50. No 2. С. 35—57.

15. **Ильинский Д.Г., Полтерович В. М., Старков О. Ю.** (2014-2) Линейки ссудо-сберегательных тарифных планов: обобщение идеи стройсберкасс //*Экономика и математические методы.* Т. 50:4, с 94-111.

16. **Ильинский Д.Г.** Свойства линеек ссудо-сберегательных планов. //*Экономика и математические методы*, 2016, 52:2, 40-59.

17. **Козлов В., Филатова А.** (2011). Кубань испытывает ипотеку народом. [Электронный ресурс] Эксперт Юг. No 39—40 (179). Режим доступа: `http://expert.ru/south/2011/40/`

kuban-ispyitaet-ipoteku-narodom/, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: октябрь 2013 г.)

18. Накопительная ипотека. (2015) [Электронный ресурс] Ипотечное агентство Югры. http://www.ipotekaugra.ru/gosprogrammpage/nakopitel_naya_ipoteka_msmsm/, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: июнь 2015 г.).

19. «Народная ипотека» на Дону принесла первые плоды. [Электронный ресурс] Ростов: Ростов-дом. Режим доступа: http://rostov-dom.info/2013/09/narodnaya-ipoteka-na-donu-prinesla-pervye-plody/, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: октябрь 2013 г.).

20. Народная ипотека в 2016 году.[Электронный ресурс] Режим доступа: http://kreditipo.ru/narodnaya-ipoteka-v-rostove-na-donu-v-2016-godu/, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: май 2016 г.).

21. Перспективы внедрения накопительных жилищных счетов в Краснодаре и Краснодарском крае (2011). Отчет о научно-исследовательской работе. Договор No 12/01 о проведении научно-исследовательской работы для ОАО “Агентство развития Краснодарского края / Под рук. В.М. Полтеровича. // *М.: Новая экономическая ассоциация.*

22. **Полтерович В.М.** (2007). Элементы теории реформ.// *М.: Экономика.*

23. **Полтерович В.М., Старков О.Ю.** (2007). Формирование ипотеки в догоняющих экономиках: проблема трансплантации институтов.// *М.: Наука.* — 196 с.

24. **Полтерович В.М., Старков О.Ю.** (2007). Стратегия формирования ипотечного рынка в России. *Экономика и математические методы.* Т. 43. No 4. С. 3—22.

25. **Полтерович В.М., Старков О.Ю.** (2010). Поэтапное формирование массовой ипотеки и рынка жилья. В кн.: Полтерович В.М. (отв. ред.) Стратегия модернизации российской экономики// *СПб.: Алетейа.*

26. **Полтерович В.М., Старков О.Ю.** (2011). Проектирование выхода из институциональной ловушки (на примере ипотеки в России). http://www.mirkin.ru/index.php?option=com_content&task=view&id=1839&Itemid=270

27. Постановление Правительства Ростовской области от 02.07.2012 года № 563 «Об утверждении Положения о порядке предоставления бюджетных субсидий гражданам, открывающим вклады в кредитных организациях с целью накопления средств для улучшения жилищных условий» (в редакции постановления от 28.11.2013 № 725).

28. Почти 70% россиян оказались не готовы брать жилье в ипотеку. Интерфакс [Электронный ресурс] Режим доступа: `http://www.interfax.ru/russia/472767`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: май 2015 г.).

29. Приказ No 462 Министерства регионального развития Российской Федерации. [Электронный ресурс] «О средней рыночной стоимости 1 квадратного метра общей площади жилья по субъектам Российской Федерации на четвертый квартал 2011 года» от 26 сентября 2011 г. Режим доступа: `http://www.rg.ru/2011/10/12/ploshad-dok.html`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: март 2014 г.).

30. Рустэм Хамитов вручил государственные награды Республики Башкортостан работникам строительного комплекса (2016). [Электронный ресурс] Режим доступа:`http://www.bashinform.ru/news/882304-rustem-khamitov-vruchil-gosudarstvennye-nagrady-\respubliki-bashkortostan-rabotnikam-stroitelnogo-kom/`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: сентябрь 2016 г.).

31. Официальный сайт Агентства Республики Казахстан по статистике — `http://www.stat.gov.kz/istory/`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: апрель 2016 г.).

32. Официальный сайт ЖилстройСбербанка. `http://www.hcsbk.kz/about-the-bank/history/`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: апрель 2016 г.).

33. Официальный сайт программы «Народная ипотека» ОАО «Сберегательного Банка России» — `http://www.sberbank.ru/rostov/ru/person/credits/folkshyp/`

34. Сведения о жилищных кредитах, предоставленных кредитными организациями физическим лицам в рублях. [Электронный ресурс] Режим доступа: `http://www.cbr.ru/statistics/UDStat.aspx\?TblID=4-1&pid=ipoteka&sid=ITM_2357`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: март 2014 г.).

35. С начала года Сбербанк в Башкирии выдал около трех тысяч жилищных кредитов. (2015) [Электронный ресурс] Информационное агенство Башинформ. `http://www.bashinform.ru/news/718345-s-nachala-goda-sberbank-v-bashkirii-vydal-okolo-trekh\-tysyach-zhilishchnykh-kreditov/`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: апрель 2015 г.).

37. **А. Шарафутдинова** С 1 апреля в Башкирии стартует программа жилстройсбережений [Электронный ресурс]— `http://i-gazeta.com/news/znayu_kak/31636.html`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: март 2014 г.).

38. Эффективность и результативность деятельности Департамента по финансовому и фондовому рынку Краснодарского края (2011). [Электронный ресурс] Режим доступа: `http://finmarket.kubangov.ru/departament/drondy/2011/`, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: февраль 2014 г.).

39. **T. Besley, S. Coate and G. Loury** (1994) Rotating Savings and Credit Associations, Credit Markets and Efficiency // *The Review of Economic Studies* 61(4):701-719.

40. **Laux H.** (1978). Grundzuge der Buasparmathematik.// *Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft E.V.*

41. **Laux H.** (1999). Der statische Beharrung stand des bauspar mathematischen Gesamtmodells. //*Blatter der DGVM, Band XXIV*, Heft 3, S. 265-298.

42. **Laux H.** (2002). Weiterfuhrende Untersuchengen zum dynamischen Beharrung stand des Bausparens. //*Blatter der DGVM, Band XXV*, Heft 3, S. 541-583.

43. **Laux H.** (2005). Die Buasparfinanzierung. Die finanziellen Aspekte des Bausparvertrages als Spar- und Kreditinstrument. 7 Auflage. *Frankfurt am Main: VerlagRecht and Wirtschaft GmbH.*

44. **S. Merrill, D. Whiteley**. Establishing Mortgage Guarantee Insurance in Transition and Emerging Markets: A Case Study of Kazakhstan. *The Urban Institute, Washington DC*, 2003.

45 **Pnina O. Plaut, Steven E. Plaut** (2004) The economics of housing saving plans. The *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 28:4, p. 319-337.

46. **Scholten U.** (2000).Rotating Savings and Credit Associations in Developed Countries: The German—Austrian Bausparkassen// *Journal of Comparative Economics.* № 28.

47. **T. Schlueter, S. Sievers and T.Hartmann-Wendels** (2015) Bank funding stability, pricing strategies and the guidance of depositors // *Journal of Banking & Finance*, 51:C, p. 43-61.

Приложение

Распределение потребителей по величине допустимого семейного платежа

В табл. 7 в столбцах 1 и 4 приведены данные о распределении населения России по доходам в IV квартале 2011 г. Используя эти данные, построим функцию распределения населения по доходам F стандартным образом. А именно: для каждого диапазона доходов из таблицы 7 вычисляем среднее и среднеквадратичное отклонение логарифма средних значений, по ним находим логнормальное распределение. В табл. 7 отражены эмпирическая кумулятивная функция распределения по доходам (в столбце 2 заданы доходы, а в столбце 5 — значения эмпирической функции) и построенная функция распределения (столбец 2 — данные, столбец 6 — значения).

Как было указано в п. 3.2.3, сумма, которую готов платить потребитель, считается равной 20% уровня его семейных доходов. Среднее число членов семьи полагаем не зависящим от дохода и равным 2,915. Таким образом, если F — построенная функция распределения населения по доходам, а f — требуемая функция распределения по величине допустимого семейного платежа, то для каждого значения дохода x полагаем $f(x) = F(\frac{5x}{2{,}9})$. В столбце 3 табл. 7 приведены величины допустимых взносов для семьи в концах указанных интервалов по доходам, а в столбцах 5 и 6 табл. 7 — значения кумулятивных эмпирической и расчетной функций распределения по величине допустимого взноса. Эмпирические данные и функция f изображены также на рисунке 8.

Имеющиеся данные об индивидуальных доходах не позволяют достаточно точно оценить функцию распределения в диапазоне свыше 28 000 руб. Видимо, построенная нами функция увеличивает долю богатых людей (ср. табл. 2 и 4). При попытке воспользоваться статистикой семейных доходов также возникают трудности.

Таблица 7: Эмпирическое и расчетное распределение населения по величине допустимого взноса (за месяц) в IV квартале 2011 г.

Доходы, руб.	Конец интервала, руб.	Величина допустимого взноса для семьи, руб.	Доля населения согласно статистике, %	Эмпирическая функция распределения населения по величине взноса	Расчетная функция распределения населения по величине взноса
до 500,0	500	290	0,2	0,002	0
от 500,1 до 2500,0	2500	1450	1,8	0,02	0,021
от 2500,1 до 4500,0	4500	2610	7,1	0,091	0,103
от 4500,1 до 6500,0	6500	3770	11,7	0,208	0,218
от 6500,1 до 8500,0	8500	4930	12,7	0,335	0,336
от 8500,1 до 10500,0	10500	6090	11,6	0,451	0,442
от 10500,1 до 12500,0	12500	7250	9	0,541	0,534
от 12500,1 до 14500,0	14500	8410	7,3	0,614	0,611
от 14500,1 до 16500,0	16500	9570	5,9	0,673	0,670
от 16500,1 до 18500,0	18500	10730	4,4	0,717	0,726
от 18500,1 до 20500,0	20500	11890	3,8	0,755	0,770
от 20500,1 до 22500,0	22500	13050	3	0,785	0,805
от 22500,1 до 24500,0	24500	14210	3,4	0,819	0,835
от 24500,1 до 26500,0	26500	15370	2,3	0,842	0,859
от 26500,1 до 28500,0	28500	16530	2,8	0,870	0,879
от 28500,1 до 47500,0	47500	27550	13	1	0,96
свыше 47500,0			0	1	1

Источник: расчеты сделаны на основе материалов (Доходы, расходы и потребление... (2011)).

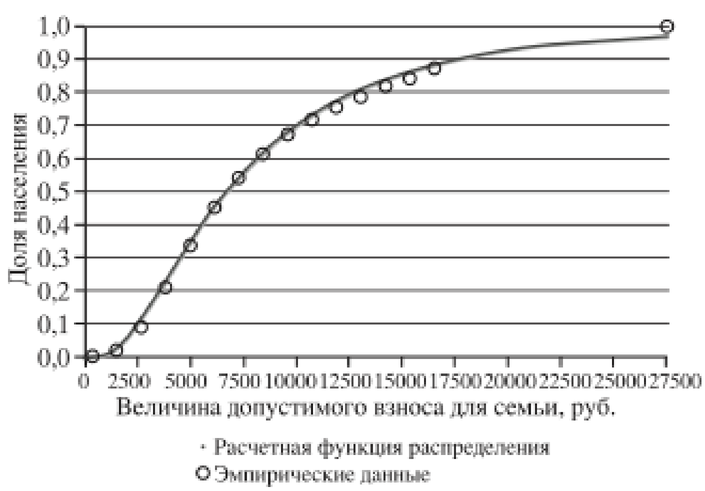

Рис. 8: Эмпирическая и расчетная функции распределения населения по величине допустимого взноса в месяц на IV кв. 2011 г.