

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Балаев Алексей Иванович

**Составление портфелей ценных бумаг на основе прогнозирования
совместной функции распределения доходностей**

Специальность: 08.00.13
«Математические и инструментальные методы экономики»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Профессор, доктор ф.-м. наук
Шведов Алексей Сергеевич

Москва – 2014

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Моделирование многомерных тяжелых хвостов для распределений доходностей фондовых индексов различных стран ...	13
1.1 Постановка задачи	13
1.2 Литература о моделировании многомерных тяжелых хвостов ..	14
1.3 Данные и предварительный анализ.....	16
1.4 Условные распределения доходностей	26
1.5 Сравнение моделей на основе KLIC теста	39
1.6 Выводы.....	45
Глава 2. Моделирование многомерных распределений доходностей и составление портфелей из акций российских компаний	47
2.1 Постановка задачи	47
2.2 Литература о моделировании доходностей и составлении финансовых портфелей	48
2.3 Данные и предварительный анализ.....	51
2.4 Модели и результаты оценивания.....	65
2.5 Оптимизация портфелей	78
2.6 Выводы.....	90
Глава 3. Теоретические свойства многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, используемые при составлении портфелей ценных бумаг.....	92
3.1 Постановка задачи	92
3.2 Стандартизованная форма и моменты.....	93
3.3 Одномерные маргинальные функции плотности	101
3.4 Характеристические функции одномерных маргинальных распределений	107
3.5 Примеры.....	111
3.6 Алгоритм симулирования	115
3.7 Выбор расположения активов в векторе доходностей	118
3.8 Выводы.....	122
Глава 4. Введение скошенности в многомерное t -распределение с вектором степеней свободы	123
4.1 Постановка задачи	123
4.2 Литература о многомерных скошенных распределениях	124
4.3 Построение многомерного скошенного t -распределения	127

4.4	Применение в моделях VAR-MGARCH.....	135
4.5	Выводы.....	137
Глава 5.	t -копула с вектором степеней свободы	139
5.1	Постановка задачи	139
5.2	Литература о классической t -копуле	140
5.3	Построение t -копулы с вектором степеней свободы	147
5.4	Стандартизованная копула	149
5.5	Применение в моделях VAR-MGARCH.....	151
5.6	Симулирование t -копулы с вектором степеней свободы.....	153
5.7	Выводы.....	154
	Заключение	156
	Список литературы	161
	Приложение главы 1	173
П 1.1	Оценки параметров моделей доходностей фондовых индексов на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы	173
П 1.2	Оценки параметров моделей доходностей фондовых индексов на основе многомерного t -распределения со скаляром степеней свободы	178
П 1.3	Оценки параметров моделей доходностей фондовых индексов на основе многомерного обобщенного распределения ошибки	183
П 1.4	Оценки параметров моделей доходностей фондовых индексов на основе многомерного распределения Грама – Шарлье	188
П 1.5	Результаты KLIC теста внутри и вне выборки, использованной для оценки моделей	193
	Приложение главы 2	194
П 2.1	Оценки параметров моделей доходностей акций на основе многомерного нормального распределения.....	194
П 2.2	Оценки параметров моделей доходностей акций на основе многомерного t -распределения со скаляром степеней свободы.....	226
П 2.3	Оценки параметров моделей доходностей акций на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы.....	258
П 2.4	Динамика стоимости AMV, CMV и CME портфелей.....	290

Введение

Составление оптимального портфеля ценных бумаг является важной практической задачей на фондовом рынке. Эта задача всегда сохраняет свою актуальность, поскольку стремление оптимально распределить капитал среди доступных активов является естественным для рационального инвестора.¹ Целями оптимизации финансового портфеля могут быть, в частности, максимизация ожидаемой доходности или минимизация дисперсии доходности с учетом информации, доступной к данному моменту времени и ограничений на торговлю, имеющихся на рынке. С точки зрения портфельной теории² для решения таких задач инвестору может потребоваться знание совместного распределения доходностей имеющихся на рынке активов, учитывающего всю доступную информацию. Однако на практике инвестор таким знанием не обладает, и ему необходимо построить прогноз этого условного распределения. Таким образом, построение прогнозов условных распределений доходностей также является актуальной практической задачей для участников финансовых рынков. Для прогнозирования распределений доходностей применяются различные эконометрические методы. Обзор данных методов применительно к составлению портфелей приведен, например, в книге (Scherer, 2002). Байесовские методы прогнозирования распределений доходностей применительно к задаче портфельного выбора рассматриваются в работах (Winkler, 1973), (Polson, Tew, 2000) и (Gohout, Specht, 2007). Составление портфелей с помощью байесовского подхода на основе

¹ Общие вопросы рационального инвестирования рассматриваются в книгах (Богл, 2013) и (Грэхем, Цвейг, 2007). Задачи и инструментарий инвестиционного анализа детально рассмотрены в фундаментальной книге (Шарп и др., 2010).

² Вопросы портфельной теории рассмотрены, например, в книгах (Винс, 2007), (Гибсон, 2008), (Фабозци, 2000).

методов Монте-Карло с цепями Маркова рассмотрено в работе (Greyserman et al., 2006). Работы (Young, Lenk, 1998) и (Aguilar, West, 2000) посвящены составлению портфелей с помощью факторных моделей.

При составлении финансовых портфелей с помощью эконометрических моделей значительную роль играет выбор многомерного распределения доходностей активов, лежащего в основе модели. Одним из наиболее популярных распределений, применяемых для составления портфелей, является классическое многомерное t -распределение со скалярным параметром степеней свободы (см., например, (Kotz, Nadarajah, 2004; 2008) и (Ku, 2008)), которое приспособлено для учета многомерных тяжелых хвостов (см. (Fiorentini et al., 2003)). Данным свойством обладают также многомерные устойчивые распределения, описанные в работе (Samorodinsky, Taqqu, 1994), ν -сферические распределения, предложенные в (Fernandez et al., 1995), распределение Грама – Шарлье, рассмотренное в (Mauleon, Perote, 1999), эллиптические функции плотности из (Branco, Dey, 2001), а также поли t -распределение из (Dreze, 1978)³. Большое внимание в литературе уделяется также учету асимметрии многомерных распределений финансовых доходностей (см., например, (Vlaar, Palm, 1993), (Jones, 2001; 2002) и (Ferreira, Steel, 2003)). В работе (Bauwens, Laurent, 2005) предложен один из вариантов многомерного скошенного t -распределения со скаляром степеней свободы, которое дает хорошие результаты в задаче предсказания условного распределения доходностей по сравнению с некоторыми другими известными распределениями (см., например, (Балаев, 2011б)). Другой вариант

³ В силу достаточно сложного соотношения параметров и моментов поли t -распределение не находит широкого применения на практике несмотря на более общий вид, чем у классического многомерного t -распределения.

многомерного скошенного t -распределения со скаляром степеней свободы предложен в (Sahu et al., 2003).

Скалярный параметр степеней свободы классического многомерного t -распределения предполагает одинаковую меру эксцесса распределения доходностей для всех активов, однако на практике эксцесс распределений может существенно варьироваться от актива к активу, что продемонстрировано в следующей таблице:

Эксцесс распределений доходностей фондовых индексов*

	S&P 500	FTSE 100	CAC 40	DAX	Hang Seng	Nikkei 225
Эксцесс	7,59	7,32	5,21	5,57	9,45	5,34

* Дневные доходности за период с ноября 1990 г. по октябрь 2012 г.

По этой причине многомерное t -распределение со скалярным параметром степеней свободы является недостаточно гибким для практического применения, что породило одну его специфическую модификацию – многомерное t -распределение с вектором степеней свободы, предложенное в работе (Шведов, 2009)⁴. Данное распределение позволяет учитывать больше информации при моделировании финансовых доходностей и составлении портфелей, чем классическое многомерное t -распределение, за счет наличия индивидуального параметра эксцесса у каждого актива⁵.

Многомерное t -распределение с вектором степеней свободы является новым, и его теоретические и эмпирические свойства еще недостаточно изучены. По этой причине рассмотрение эмпирических приложений данного распределения и исследование его теоретических свойств является актуальной задачей как с позиции практики многомерного моделирования финансовых доходностей и

⁴ Теоретические аспекты данного распределения рассмотрены также в (Шведов, 2010; 2012), эмпирическое приложение – в (Шведов, 2011).

⁵ В работе (Jondeau, Rockinger, 2012) продемонстрирован альтернативный подход к учету индивидуального эксцесса распределения доходности каждого актива.

составления портфелей активов, так и с точки зрения теории многомерных вероятностных распределений. Данная задача решается в настоящей диссертации, что обосновывает ее **актуальность и практическую значимость**. В работе, во-первых, впервые рассмотрено применение многомерного t -распределения с вектором степеней свободы в задачах прогнозирования доходностей мировых фондовых индексов и составления портфелей из российских акций, и во-вторых, исследованы его маргинальные распределения и моменты, предложен алгоритм симулирования, рассмотрена возможная асимметричная модификация данного распределения и построена копула на его основе. В работе также предложен возможный алгоритм выбора расположения активов в векторе доходностей, который моделируется с помощью многомерного t -распределения с вектором степеней свободы.

Объектом исследования в настоящей диссертации является многомерное t -распределение с вектором степеней свободы, а **предметом исследования** – качество соответствия данным и предсказательная способность многомерных моделей доходностей на основе данного распределения, а также эмпирические свойства оптимальных портфелей, составленных с помощью таких моделей. Предметами исследования также являются теоретические аспекты многомерного t -распределения с вектором степеней свободы: его моменты и маргинальные распределения, симулирование данного распределения, выбор расположения активов в векторе доходностей с данным распределением, его модификация с введением параметров асимметрии, а также копула на основе данного распределения.

Основной целью работы является рассмотрение практического применения многомерного t -распределения с вектором степеней свободы для прогнозирования распределений доходностей фондовых

индексов и составления портфелей акций. В работе были также поставлены цели построения асимметричной модификации многомерного t -распределения с вектором степеней свободы и вывод копулы на его основе. К другим целям диссертации относились вывод теоретических свойств данного распределения и построение алгоритма его симулирования, а также алгоритма выбора расположения активов в векторе доходностей с данным распределением. Достижение заявленных целей потребовало решения следующих задач:

1. Разработка методики построения произвольной многомерной GARCH модели на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы.
2. Эмпирическое сравнение многомерного t -распределения с вектором степеней свободы с другими гибкими параметризациями в задаче прогнозирования условного распределения доходностей фондовых индексов.
3. Сравнение эмпирических свойств оптимальных портфелей акций, составленных с помощью модели на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы и моделей на основе других распределений.
4. Вывод общей формулы и условий существования смешанного момента многомерного t -распределения с вектором степеней свободы для составления портфелей акций различных типов.
5. Вывод формул одномерных маргинальных функций плотности и характеристических функций для многомерного t -распределения с вектором степеней свободы.

6. Получение алгоритма симулирования многомерного t -распределения с вектором степеней свободы на основе свойств матричного гамма-распределения Беллмана⁶.
7. Разработка алгоритма выбора расположения активов в векторе доходностей, который моделируется с помощью многомерного t -распределения с вектором степеней свободы.
8. Построение многомерного t -распределения с вектором параметров скошенности и вектором степеней свободы.
9. Построение копулы на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы и ее стандартизованной версии, более удобной с вычислительной точки зрения.

Научная новизна настоящей работы заключается в первом опыте эмпирического применения нового мало изученного многомерного t -распределения с вектором степеней свободы при моделировании доходностей фондовых индексов и составлении различных оптимальных портфелей акций, а также в выводе теоретических свойств данного распределения. Иными словами, в работе решены сформулированные выше задачи 1 – 9, что и составляет ее научную новизну.

Методологической базой настоящей работы выступают модели многомерных временных рядов финансовых доходностей. Основное внимание уделяется моделям вида VAR-MGARCH⁷. В качестве **инструментария** в диссертации использовались методы эконометрики, анализа временных рядов, эмпирических финансов, портфельной теории, теории специальных функций, стохастических процессов, теории вероятностей и математической статистики.

⁶ См. (Bellman, 1956), (Gupta, Nagar, 1999).

⁷ См., например, (Ку, 2008).

Теоретическая значимость работы состоит в том, что выведенные свойства многомерного t -распределения с вектором степеней свободы и объекты, построенные на его основе, обладают некоторыми привлекательными свойствами и с их помощью развиваются существующие эконометрические модели и строятся новые. Теоретические факты о многомерном t -распределении с вектором степеней свободы, полученные в данной работе, дают возможность использовать данное распределение в широком спектре приложений, в первую очередь в эконометрических моделях для финансовых доходностей, и в этом заключается **практическая значимость** результатов работы.

Апробация результатов настоящей диссертации была проведена на следующих конференциях и научных семинарах:

1. Совместный научный семинар кафедры математической экономики и эконометрики и лаборатории макроструктурного моделирования экономики России. НИУ ВШЭ, Москва, 10 июля 2012 г.
2. IV Международная научно-практическая конференция студентов и аспирантов «Статистические методы анализа экономики и общества». НИУ ВШЭ, Москва, 16 мая 2013 г.
3. Семинар «Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов». ЦЭМИ РАН, Москва, 22 мая 2013 г.
4. Научно-практическая конференция «Эконометрические методы в исследовании глобальных экономических процессов», совместный доклад с Шведовым А.С. МГИМО, Москва, 29 октября 2013 г.
5. Семинар исследовательского проекта Российской Экономической Школы «Econometrics of many financial assets», РЭШ, 7 февраля 2014 г.

Результаты работы также обсуждались на научных семинарах кафедры математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ.

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 публикациях общим объемом 8,7 п.л. Три из них опубликованы в российских рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ.

Настоящая работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложений к главам 1 и 2. Общий объем диссертации – 160 стр. основного текста, включая 25 таблиц и 12 рисунков и 147 стр. приложений и списка литературы.

В **первой главе** проведено сравнение нескольких известных многомерных вероятностных моделей динамики финансовых доходностей с моделью на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, которое ранее не рассматривалось в эмпирических работах. Оценка и тестирование проводятся на выборках дневных доходностей фондовых индексов S&P 500 (США), FTSE 100 (Великобритания), CAC 40 (Франция), DAX (Германия), Hang Seng (Китай) и Nikkei 225 (Япония). При сравнении моделей основное внимание уделяется учету так называемых многомерных тяжелых хвостов распределений доходностей.

Во **второй главе** построены многомерные модели доходностей акций крупнейших российских компаний из 10 основных отраслей экономики (банки, газ, металлы, нефть, ритейл, связь, транспорт, уголь, удобрения, энергетика), и на основе этих моделей составлены оптимальные финансовые портфели различных типов в зависимости от приоритетов, определяемых инвестором. Рассматриваются модели на основе многомерного нормального распределения, а также многомерных t -распределений со скаляром и вектором степеней

свободы. Составленные с помощью моделей портфели сравниваются с точки зрения выгоды и риска соответствующей торговой стратегии.

В **третьей главе** доказаны некоторые теоремы о многомерном t -распределении с вектором степеней свободы, которое используется в моделях доходностей в главах 1 и 2. Выведена общая формула и условия существования моментов данного распределения, а также формулы его одномерных маргинальных функций плотности и характеристических функций. Полученные формулы проиллюстрированы примерами. Кроме того, в данной главе предложен алгоритм симулирования многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, а также алгоритм выбора расположения активов в векторе доходностей с данным распределением.

В **четвертой главе** предложена модификация многомерного t -распределения с вектором степеней свободы. Построено многомерное t -распределение с вектором параметров скошенности и вектором степеней свободы, которое является обобщением широко известного многомерного скошенного t -распределения со скаляром степеней свободы. Рассмотрен пример применения данного распределения в финансовых приложениях, когда меры скошенности и толщины хвостов для доходностей различных активов существенно разнятся.

В **пятой главе** построена копула на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, которая позволяет более гибко моделировать различия хвостовых зависимостей между компонентами случайного вектора, чем классическая t -копула, за счет наличия индивидуальных параметров степеней свободы у компонент случайного вектора. В главе также рассмотрена стандартизованная версия t -копулы с вектором степеней свободы, более удобная с вычислительной точки зрения, и приведен пример ее применения в моделях многомерных финансовых временных рядов.

Глава 1. Моделирование многомерных тяжелых хвостов для распределений доходностей фондовых индексов различных стран

1.1 Постановка задачи

В этой главе рассматривается задача сравнения соответствия данным и пригодности для прогнозирования некоторых известных вероятностных моделей для доходностей мировых фондовых индексов и новой вероятностной модели, построенной на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, эмпирические свойства которого применительно к финансовым рынкам ранее не исследовались.⁸ Одним из важных эмпирических фактов о распределениях финансовых доходностей является наличие у этих распределений тяжелых хвостов. Сравнение моделей в настоящей главе проводится в терминах качества внутривыборочной подгонки и предсказательной способности вне выборки при предсказании условного распределения в целом.⁹ Основное внимание уделяется эффектам, порождаемым формой распределения, в особенности, так называемым многомерным тяжелым хвостам. Рассматриваются, с одной стороны, t -распределение с вектором и скаляром степеней свободы и, с другой стороны, модификации многомерного нормального распределения, приспособленные для учета тяжелых хвостов: обобщенное распределение ошибки и распределение Грама – Шарлье. Все модели оцениваются и тестируются на выборках дневных доходностей фондовых индексов

⁸ Результаты главы 1 представлены в работах (Балаев, 2013а) и (Балаев, Шведов, 2014).

⁹ Вопросам моделирования условной плотности распределения, а также более частных объектов (условное среднее и дисперсия, условный квантиль, условная вероятность) посвящена, например, работа (Анатольев, 2013).

различных стран. С помощью теста, основанного на информационном критерии Кульбака – Лейблера (KLIC) проводится попарное сравнение построенных моделей внутри и вне выборки. Модели упорядочиваются по качеству подгонки и предсказательной способности, а затем определяется их рейтинг. В данной главе также обсуждаются причины превосходства той или иной спецификации функции плотности над другой внутри или вне выборки.

Настоящая глава 1 имеет следующую структуру. В разделе 1.2 приведен обзор литературы о моделировании многомерных тяжелых хвостов для распределений финансовых доходностей. В разделе 1.3 описаны использованные данные и проведен некоторый предварительный эмпирический анализ. Раздел 1.4 посвящен описанию различных параметризаций условных функций плотности, которые используются для учета многомерных тяжелых хвостов в распределениях векторов доходностей. В разделе 1.5 приведено описание KLIC теста и результатов сравнения построенных моделей. Наконец, раздел 1.6 содержит выводы данной главы.

1.2 Литература о моделировании многомерных тяжелых хвостов

Моделированию многомерных тяжелых хвостов посвящено достаточно много публикаций. Ниже дается краткое описание лишь некоторых работ, имеющих принципиальное значение.

В работе (Fernandez et al., 1995) предложен класс многомерных непрерывных распределений, известных как ν -сферические, которые позволяют учитывать наличие многомерных тяжелых хвостов. Тяжелые хвосты способны учитывать также и многомерные устойчивые распределения (см., например, (Samorodinsky, Taqqu, 1994)). Однако функцию плотности этих распределений, как правило,

нельзя записать в аналитическом виде, и для них известна лишь характеристическая функция, что затрудняет моделирование на практике. Достаточно широкий класс эллиптических функций плотности, позволяющих учитывать многомерные тяжелые хвосты, предложен в работе (Branco, Dey, 2001). Данные функции плотности представляют собой обобщение многомерного асимметричного нормального распределения, рассмотренного в (Azzalini, Dalla Valle, 1996) и (Azzalini, Capitanio, 1999). Наличие многомерных тяжелых хвостов допускает также распределение Грама – Шарлье, функция плотности которого получается урезанием многомерного разложения Грама – Шарлье после третьего члена. В работе (Mauleon, Perote, 1999) данное распределение применяется при моделировании шоков в двумерных GARCH моделях.

В (Fiorentini et al., 2003) для учета многомерных тяжелых хвостов предложено использовать многомерное t -распределение со скалярным параметром степеней свободы. Как показано в работе (Балаев, 2011б), t -распределение со скаляром степеней свободы дает хорошие результаты по сравнению с некоторыми другими гибкими параметризациями. Широкий класс многомерных распределений представляют поли t -распределения, частным случаем которых является многомерное t -распределение со скаляром степеней свободы. Поли t -распределения получаются как апостериорные распределения в байесовском анализе и позволяют учитывать наличие тяжелых хвостов¹⁰. Однако соотношение параметров и моментов поли t -распределений достаточно сложно, что затрудняет их применение на практике.

В работе (Шведов, 2009) предложено обобщение многомерного t -распределения со скаляром степеней свободы на случай вектора

¹⁰ См., например, (Dreze, 1978).

степеней свободы (см. также Шведов, 2010; 2011; 2012). Это обобщение дает дополнительную гибкость при моделировании, поскольку позволяет задавать разную толщину хвостов распределения доходностей для различных активов. В настоящей главе многомерное t -распределение с вектором степеней свободы впервые применяется для моделирования динамики финансовых доходностей.

1.3 Данные и предварительный анализ

В этом разделе приведено описание использованных данных и отмечены некоторые их свойства, которые предполагается учесть при построении многомерных условных распределений доходностей в разделе 1.4¹¹.

Данные

Используются дневные цены закрытия фондовых индексов различных стран: S&P 500 (США), FTSE 100 (Великобритания), CAC 40 (Франция), DAX (Германия), Hang Seng (Китай), Nikkei 225 (Япония).¹² Исходные данные по ценам охватывают период с 26 ноября 1990 г. (первый день расчета индекса DAX) по 18 октября 2012 г. Построение моделей и все прочие расчеты в данной главе проводятся для логарифмических доходностей индексов, то есть для величин $r_t = 100 \ln(S_t / S_{t-1})$, где S_t – значение фондового индекса в момент времени t ¹³. При этом для построения многомерных моделей

¹¹ Для предварительного анализа в этом разделе нами используются базовые статистические методы. Совместное распределение доходностей можно также анализировать с помощью методов многомерного статистического анализа. См. (Айвазян, 2010), (Айвазян, Мхитарян, 1998).

¹² Использована база данных Yahoo Finance <http://finance.yahoo.com/>

¹³ В настоящей диссертации рассматриваются модели с дискретным временем. Важную роль играют также стохастические финансовые модели в непрерывном

возникла необходимость синхронизировать данные: доходности рассчитаны на основе цен закрытия только в такие дни, когда одновременно торговались все 6 упомянутых фондовых индексов. Соответственно, из исходных рядов дневных цен закрытия для каждого из индексов было удалено некоторое количество наблюдений. Поэтому, строго говоря, рассчитанные доходности фондовых индексов соответствуют временным промежуткам различной длины. В Таблице 1.1 приведено распределение длин временных промежутков, соответствующих построенным рядам доходностей.

Таблица 1.1 Временные интервалы доходностей индексов

Дней между торгами	0	1	2	3	4	5	6	7
Наблюдения	3577	163	745	264	78	38	23	3
Доля, %	73,1	3,3	15,2	5,4	1,6	0,8	0,5	0,1
Накопленные наблюдения	3577	3740	4485	4749	4827	4865	4888	4891
Накопленная доля, %	73,1	76,5	91,7	97,1	98,7	99,5	99,9	100

Наличие двухдневных пропусков (главным образом, это суббота и воскресенье) естественно при работе с дневными доходностями. Потенциально, проблемными могут оказаться доходности за период в 3 и более дней. Однако, как видно из Таблицы 1.1, для рассматриваемых данных такие доходности составляют 8,3% всех наблюдений, что в целом является приемлемым. По этой причине специфика доходностей, соответствующих промежуткам в 3 и более дней, не учитывается и все доходности рассматриваются как однородные.

времени. Их подробное описание можно найти в фундаментальной двухтомной монографии (Ширяев, 1998а; 1998б).

Построенный массив данных состоит из 4891 наблюдения для каждого из 6 рядов доходностей. Данные разделены на 2 части: первые 3261 наблюдение используются для построения моделей, а последние 1630 наблюдений – для расчета прогнозов и оценки предсказательной способности построенных моделей. Соотношение числа наблюдений в первой и второй частях данных составляет 2:1. Это обеспечивает достаточно большой размер выборки для построения моделей, но при этом также остается много наблюдений для проверки точности прогнозов.

Отметим, что осенью 2008 г. вследствие финансового кризиса на фондовых рынках наблюдалась ультравысокая волатильность. Период кризисной волатильности не входит в первую часть рассматриваемых данных и потому не создает проблем при оценке моделей. Однако этот период целиком входит во вторую часть данных, что негативно влияет на точность построенных прогнозов.

Таблица 1.2 Описательные статистики доходностей индексов

	S&P 500	FTSE 100	CAC 40	DAX	Hang Seng	Nikkei 225
Среднее	0,03	0,02	0,02	0,03	0,04	-0,02
Медиана	0,07	0,03	0,02	0,09	0,05	-0,01
Максимум	10,42	11,11	13,30	13,46	17,25	13,23
Минимум	-9,47	-9,26	-9,47	-10,36	-14,73	-12,11
Стд. откл.	1,24	1,23	1,53	1,57	1,80	1,59
Асимметрия	-0,23	0,01	0,11	-0,01	-0,01	-0,17
Эксцесс	7,59	7,32	5,21	5,57	9,45	5,34

В Таблице 1.2 представлены описательные статистики для полных рядов доходностей из 4891 наблюдения. Заметим, что распределения всех рассматриваемых доходностей имеют тяжелые хвосты: коэффициент эксцесса для каждого фондового индекса существенно превышает 0. Это один из известных эмпирических фактов о маргинальных распределениях финансовых доходностей.

Отметим также, что доходность фондового индекса Hang Seng имеет наибольший эксцесс и стандартное отклонение – этот индекс наиболее волатилен среди рассматриваемых.

Связи между доходностями

В рассматриваемых рядах логарифмических доходностей значимую автокорреляцию показывает только индекс S&P 500. Гипотеза о постоянном нулевом условном среднем в простой AR(1) модели с константой не отвергается на 5% уровне значимости тестом Вальда для всех индексов, кроме S&P 500, как показано в Таблице 1.3. Таким образом, в доходностях большинства рассматриваемых фондовых индексов отсутствует значимая автокорреляция, и при построении одномерных моделей условное среднее можно было бы зафиксировать на нулевом уровне без значительных потерь качества модели. Однако в многомерном моделировании такой подход будет некорректен, поскольку существуют значимые корреляции между доходностями различных индексов.

Таблица 1.3 Тест Вальда на нулевое условное среднее в моделях AR(1) с константой

	S&P 500	FTSE 100	CAC 40	DAX	Hang Seng	Nikkei 225
Статистика	18,06	5,22	1,37	2,40	3,52	3,45
P-значение	0,00	0,07	0,50	0,30	0,17	0,18

В Таблице 1.4 приведены корреляции доходностей каждого индекса с доходностями других индексов в текущий и предыдущий момент времени. Наличие значимых корреляций в этой таблице можно объяснить географическим расположением фондовых рынков, которое определяет время торгов. Для рассматриваемых индексов временные границы торговых сессий выглядят следующим образом (указано приблизительное время): по московскому времени рынки в

Японии и Гонконге открываются в 3.00 и закрываются в 11.00, европейские рынки открываются в 9.00 и закрываются в 17.00, американский рынок открывается в 16.00 и закрывается в 00.00. Динамика на фондовых рынках, где торговля осуществляется раньше, является информацией для участников рынков, где торгуют позже. Этим можно объяснить существенную положительную корреляцию между лагированной доходностью индекса S&P 500 и текущими доходностями индексов Nikkei 225 и Hang Seng. По той же причине лагированная доходность индекса S&P 500 положительно коррелирует с текущими доходностями европейских индексов FTSE 100, CAC 40 и DAX. Корреляции в этом случае ниже, чем для Nikkei 225 и Hang Seng, поскольку с момента закрытия американского рынка до момента открытия европейских рынков проходит больше времени и поступает больше информации. Аналогичные связи можно наблюдать для временных пар Восточная Азия – Европа и Европа – США.

Таблица 1.4 Одновременные и лагированные корреляции доходностей индексов

	S&P 500 (-1)	S&P 500	FTSE 100 (-1)	FTSE 100	CAC 40 (-1)	CAC 40	DAX (-1)	DAX	Hang Seng (-1)	Hang Seng	Nikkei 225 (-1)	Nikkei 225
S&P 500 (-1)	1											
S&P 500	-0,1	1										
FTSE 100 (-1)	0,5	0,0	1									
FTSE 100	0,3	0,5	0,0	1								
CAC 40 (-1)	0,6	0,0	0,8	0,0	1							
CAC 40	0,2	0,6	0,0	0,8	0,0	1						
DAX (-1)	0,6	0,0	0,8	0,0	0,8	0,0	1					
DAX	0,2	0,6	0,0	0,8	0,0	0,8	0,0	1				
Hang Seng (-1)	0,2	0,0	0,4	0,0	0,4	0,0	0,4	0,0	1			
Hang Seng	0,4	0,2	0,2	0,4	0,2	0,4	0,2	0,4	0,0	1		
Nikkei 225 (-1)	0,2	0,0	0,4	-0,1	0,4	-0,1	0,3	-0,1	0,5	0,0	1	
Nikkei 225	0,4	0,2	0,2	0,4	0,2	0,4	0,3	0,3	0,0	0,5	0,0	1

(-1) означает лагированную доходность.

Среди рассматриваемых индексов S&P 500 приносит на мировой фондовый рынок наиболее важную информацию и значимо влияет на доходности остальных индексов. При этом обратная связь практически отсутствует: доходность S&P 500 несущественно зависит от информации о реализовавшихся доходностях других индексов. Это продемонстрировано в Таблице 1.5, в которой приведены оценки параметров VAR(1) модели для вектора доходностей всех 6 рассматриваемых индексов.

Таблица 1.5 Оценки параметров 6-мерной модели VAR(1)

	S&P 500	FTSE 100	CAC 40	DAX	Hang Seng	Nikkei 225
S&P 500 (-1)	-0,062 (0,018)	0,401 (0,017)	0,462 (0,021)	0,408 (0,022)	0,530 (0,024)	0,447 (0,021)
FTSE 100 (-1)	0,011 (0,028)	-0,116 (0,026)	-0,132 (0,033)	-0,095 (0,034)	0,205 (0,037)	0,044 (0,033)
CAC 40 (-1)	-0,011 (0,026)	-0,077 (0,024)	-0,097 (0,031)	0,022 (0,032)	-0,024 (0,035)	0,040 (0,031)
DAX (-1)	0,025 (0,022)	-0,039 (0,020)	-0,026 (0,026)	-0,137 (0,027)	-0,062 (0,029)	0,049 (0,026)
Hang Seng (-1)	-0,012 (0,012)	0,014 (0,011)	0,012 (0,014)	0,006 (0,015)	-0,084 (0,016)	-0,051 (0,014)
Nikkei 225 (-1)	-0,024 (0,013)	-0,043 (0,012)	-0,043 (0,015)	-0,046 (0,016)	-0,087 (0,018)	-0,098 (0,015)
C	0,032 (0,018)	0,012 (0,017)	0,005 (0,021)	0,026 (0,022)	0,024 (0,024)	-0,037 (0,021)

Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия.

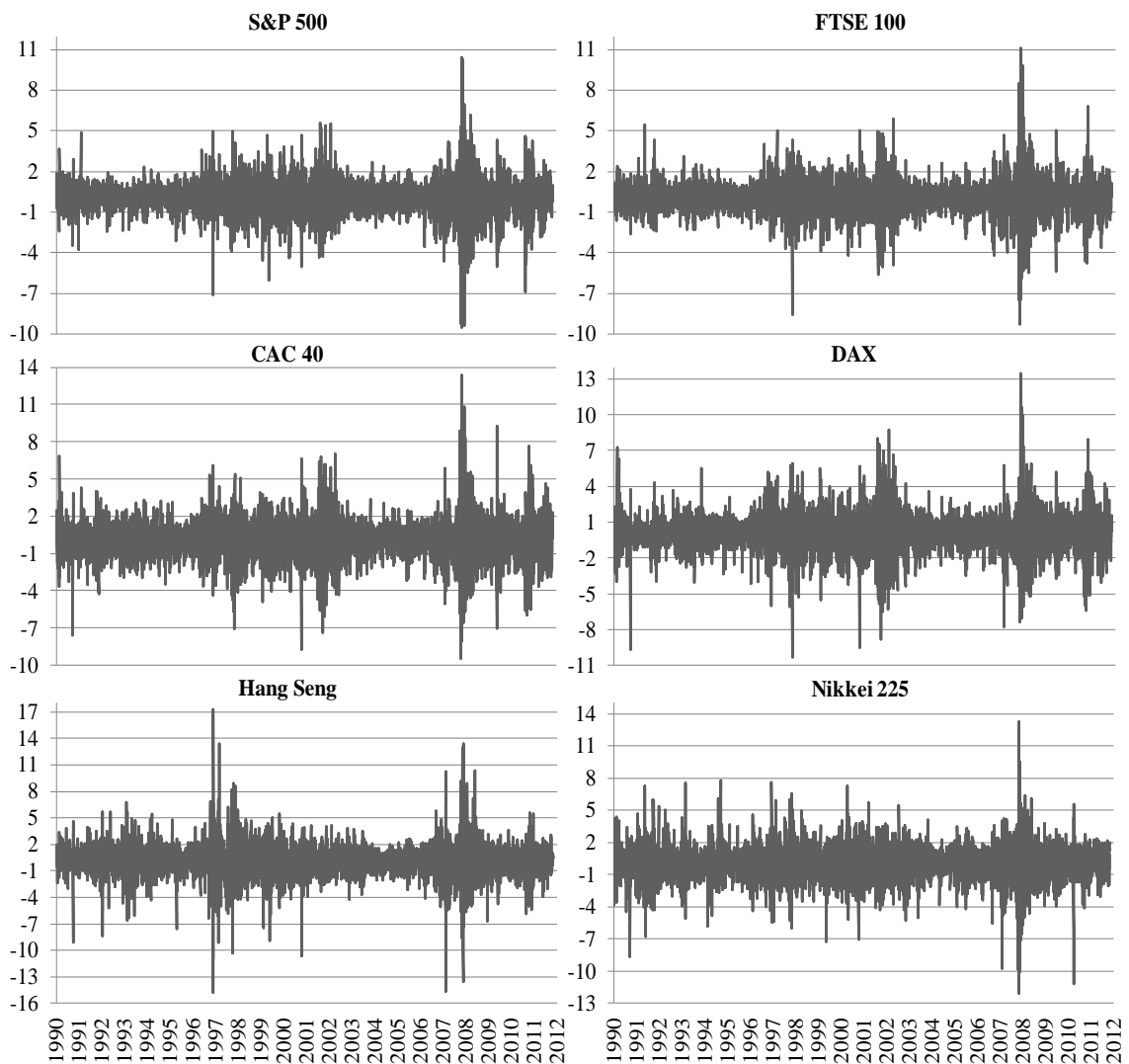
В скобках приведены стандартные ошибки.

Жирным показана значимость на 5% уровне.

Согласно оцененной векторной авторегрессии, лагированная доходность индекса S&P 500 имеет прямое статистически значимое влияние на доходности европейских и азиатских индексов (коэффициенты в первой строке Таблицы 1.5), но в обратную сторону такого влияния нет (коэффициенты в первом столбце). Таким образом, текущая доходность индекса S&P 500 – особенная переменная,

которая может рассматриваться как предиктор будущих доходностей других индексов. При построении моделей в разделе 1.4 отмеченные динамические связи между доходностями различных индексов учитываются также с помощью модели VAR(1) для вектора условных средних.

Рис. 1.1 Динамика логарифмических доходностей индексов



На Рис. 1.1 изображена динамика логарифмических доходностей рассматриваемых фондовых индексов в полных рядах по 4891 наблюдению. Очевидна классическая кластеризация волатильности, которая, как правило, наблюдается в рядах финансовых доходностей. Можно также заметить, что периоды высокой волатильности одного индекса в той или иной мере перекрываются или совпадают с

периодами высокой волатильности других индексов. Таким образом, возможна некоторая связь между волатильностями доходностей различных индексов. В моделях, рассматриваемых в разделе 1.4, использована одна из известных GARCH конструкций для условной ковариационной матрицы. Это позволяет учесть как индивидуальную кластеризацию волатильности, так и возможные связи между волатильностями различных фондовых индексов.

Тяжелые хвосты условных распределений

Источником тяжелых хвостов маргинального распределения финансовых доходностей может быть не только переменная волатильность, которая видна на Рис. 1.1, но и наличие тяжелых хвостов у соответствующего условного распределения.¹⁴ В данном разделе для доходностей рассматриваемых фондовых индексов проведена пробная оценка “веса” хвостов условных распределений. Для этого построены непараметрические оценки одномерных условных функций плотности распределения доходностей, а затем на их основе рассчитаны условные коэффициенты эксцесса.

Предположим, что ряд доходностей r_t является строго стационарным, так что неизвестные совместные функции плотности $f_{r_t, r_{t-1}}(x, y)$ и маргинальные функции плотности $f_{r_t}(x)$ не зависят от времени. Тогда условная функция плотности $f_{r_t|r_{t-1}}(x|y)$ также не зависит от времени и может быть оценена по имеющимся наблюдениям, в частности, непараметрическими методами. Здесь для простоты в доступную к моменту времени $t-1$ информацию I_{t-1} включено только значение r_{t-1} .

¹⁴ Динамика цен финансовых активов может также характеризоваться наличием скачков. Данное явление рассмотрено, например, в работе (Белоусов, 2006).

Используется одношаговая непараметрическая оценка условной функции плотности¹⁵, основанная на стандартных ядерных оценках. Пусть h_1 и h_2 это ширина окон для r_t и r_{t-1} соответственно и $K_{h_i}(x) = h_i^{-1}K(x/h_i)$, $i=1,2$ для некоторой функции ядра $K(x)$. Ядерная оценка Надарайа – Уотсона¹⁶ совместной функции плотности распределения r_t и r_{t-1} определяется следующим образом:

$$\hat{f}_{r_t, r_{t-1}}(x, y) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T K_{h_1}(x - r_t) K_{h_2}(y - r_{t-1}),$$

а оценка маргинальной функции плотности распределения r_{t-1} имеет вид

$$\hat{f}_{r_{t-1}}(y) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T K_{h_2}(y - r_{t-1}).$$

Одношаговая оценка условной функции плотности $f_{r_t|r_{t-1}}(x|y)$ определяется на основе $\hat{f}_{r_t, r_{t-1}}(x, y)$ и $\hat{f}_{r_{t-1}}(y)$ по формуле

$$\hat{f}_{r_t|r_{t-1}}(x|y) = \frac{\hat{f}_{r_t, r_{t-1}}(x, y)}{\hat{f}_{r_{t-1}}(y)}.$$

В качестве условия задано $r_{t-1} = 0$, то есть для всех фондовых индексов построены функции $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$. Используется гауссово ядро $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, а ширина окна вычисляется по правилу Сильвермана¹⁷ $h_1 = h_2 = 1,06\hat{\sigma}_r T^{-1/5}$, где $\hat{\sigma}_r$ – выборочное стандартное отклонение доходности, а $T = 4891$ – размер выборки.¹⁸ Построенные функции $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$ были центрированы и нормированы с помощью рассчитанных по ним же условному среднему и дисперсии. На Рис.

¹⁵ Данная оценка рассмотрена, например, в работе (Hansen, 2004).

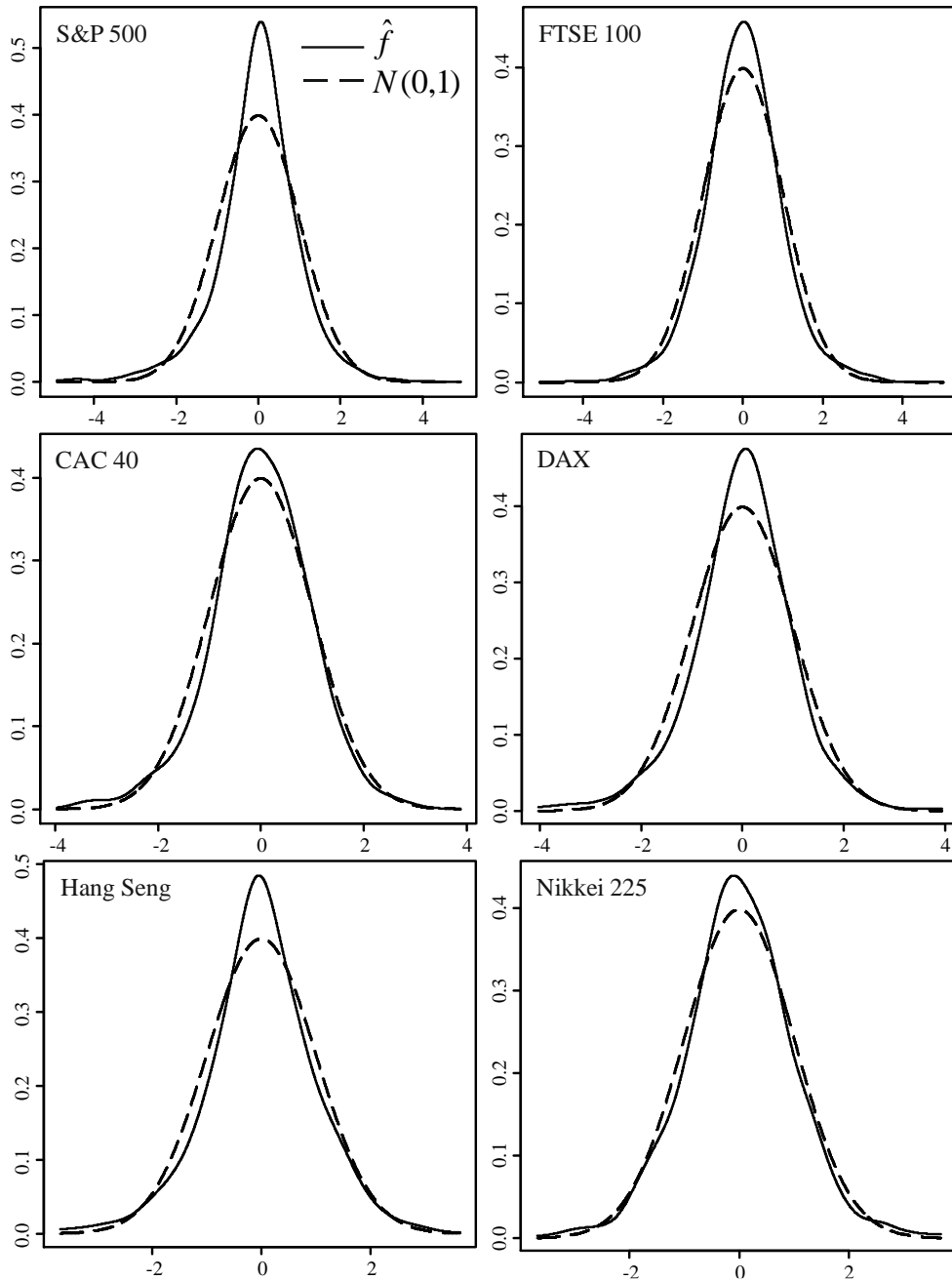
¹⁶ Оценка названа в честь авторов работ (Nadaraya, 1965) и (Watson, 1964).

¹⁷ Правило предложено в книге (Silverman, 1986).

¹⁸ Использован пакет «пр» в языке программирования R.

1.2 представлено сравнение полученных оценок с функцией плотности стандартного нормального распределения.

Рис. 1.2 Стандартизованные непараметрические оценки условных распределений доходностей индексов при $r_{t-1} = 0$



Как известно, коэффициент эксцесса нормального распределения равен 0. В Таблице 1.6 приведены коэффициенты условного эксцесса, вычисленные по функциям $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$. Оценки условного эксцесса для всех фондовых индексов положительны, и таким образом

оцененные условные распределения доходностей имеют тяжелые хвосты¹⁹. При этом фондовый индекс S&P 500 имеет наибольший условный эксцесс при условии $r_{t-1}=0$. На Рис. 1.2 превышение условным эксцессом нуля проявляется в большей “пиковости” функций $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$ по сравнению с функциями плотности стандартного нормального распределения.

Таблица 1.6 Оценки условного эксцесса при $r_{t-1} = 0$

	S&P 500	FTSE 100	CAC 40	DAX	Hang Seng	Nikkei 225
Эксцесс	2,259	1,312	0,843	1,237	0,785	0,652

Наличие тяжелых хвостов у одномерных условных распределений доходностей должно учитываться при построении соответствующих многомерных распределений. Рассматриваемые в разделе 1.4 функции плотности имеют параметры, позволяющие контролировать вероятностную массу в центре распределения и посредством этого обеспечивать наличие так называемых многомерных тяжелых хвостов.

1.4 Условные распределения доходностей

В данном разделе рассмотрены три модели для вектора доходностей фондовых индексов: во-первых, модель на основе t -распределения с вектором степеней свободы, включающая как частный случай модель со скаляром степеней свободы, во-вторых, модель с обобщенным распределением ошибки (GED), и в-третьих, модель с распределением Грама – Шарлье.

¹⁹ Моделирование условной скошенности и эксцесса распределений финансовых доходностей рассмотрено, например, в работах (Франгуриди, 2014) и (Leon et al., 2005).

Многомерное нормальное распределение входит в качестве частного случая в обобщенное распределение ошибки и в распределение Грама – Шарлье. В данном разделе приведены теоретические аспекты каждой модели, а также примеры оценок их параметров на данных, описанных в разделе 1.3. Последующее сравнение оцененных моделей проводится в разделе 1.5. Целью эмпирического сравнения моделей является выявление среди них той, которая способна наилучшим образом учитывать многомерные тяжелые хвосты распределений доходностей.

Толщина многомерных хвостов распределения в значительной степени определяется первыми 4-мя моментами. В данной главе для t -распределения, обобщенного распределения ошибки и распределения Грама – Шарлье используются одинаковые принципы определения 1 – 3 условных моментов, а 4-ый условный момент моделируется различно за счет специфики каждого распределения. Это в некоторой мере позволяет выявить наилучший способ моделирования 4-го условного момента для учета многомерных тяжелых хвостов условного распределения доходностей.

Вектор условных ожиданий доходностей фондовых индексов для распределений, рассматриваемых в данном разделе, определяется одинаково и его уравнение имеет вид VAR(1):

$$\mu_t = E_{t-1}(r_t) = c + Qr_{t-1} \quad (1.1)$$

где c и Q – произвольные $d \times 1$ вектор и $d \times d$ матрица соответственно (в данной главе рассмотрен случай $d = 2$). Выше было отмечено, что лагированное значение доходности одного фондового индекса может быть значимым предиктором доходности другого индекса из-за разницы во времени между торговыми сессиями на различных мировых фондовых рынках. Именно по этой причине в

модель вводится матрица Q , обеспечивающая зависимость $E_{t-1}(r_t)$ от r_{t-1} .

Вторым общим свойством рассматриваемых распределений является одинаковое уравнение динамики условной ковариационной матрицы вектора доходностей $H_t = V_{t-1}(r_t)$. Используется так называемая БЕКК(1,1)²⁰ многомерная GARCH модель, которая имеет вид

$$H_t = \Omega\Omega' + A\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}'A + BH_{t-1}B' \quad (1.2)$$

где Ω – $d \times d$ нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами, A и B – произвольные $d \times d$ матрицы, а ε_t – вектор шоков в момент t , то есть

$$\varepsilon_t = r_t - \mu_t = r_t - E_{t-1}(r_t) = r_t - c - Qr_{t-1}$$

Использование модели БЕКК выгодно по двум причинам. Во-первых, в данной модели матрица H_t в любой момент времени t положительно определена по построению, что существенно облегчает техническую процедуру вычисления оценок параметров модели. И во-вторых, БЕКК является одной из наиболее гибких моделей среди тех, в которых H_t всегда положительно определена.²¹

В разделе 1.3 было показано, что для рассматриваемых в данной главе временных рядов доходностей характерна классическая кластеризация волатильности, а изменение волатильности на различных рынках происходит в определенной мере синхронно. Многомерная GARCH модель БЕКК позволяет учесть как классическую кластеризацию волатильности на отдельных рынках, так и возможные связи между волатильностями на разных рынках.

²⁰ Модель Baba-Engle-Kraft-Kroner, предложенная в работе (Engle, Kroner, 1995).

²¹ Обзор многомерных GARCH моделей можно найти, например, в работе (Silvennoinen, Terasvirta, 2008).

Учет этих связей достигается за счет внедиагональных элементов матриц A и B .

Рассматриваемые в данном разделе t -распределение и обобщенное распределение ошибки имеют нулевую асимметрию, и соответственно все третьи центральные условные моменты для них автоматически равны нулю, то есть $E_{t-1}(\varepsilon_t \varepsilon_t' \otimes \varepsilon_t) = \mathbb{O}_{d^2 \times d}$. В то же время распределение Грама – Шарлье допускает наличие асимметрии, что дает ему некоторое преимущество. Поэтому в распределении Грама – Шарлье следовало бы задать ограничение вида $E_{t-1}(\varepsilon_t \varepsilon_t' \otimes \varepsilon_t) = \mathbb{O}_{d^2 \times d}$ для обеспечения равноправия при его сравнении с t -распределением и обобщенным распределением ошибки. Однако было проверено, что наличие или отсутствие асимметрии в распределении Грама – Шарлье не влияет на результаты его эмпирического сравнения с другими распределениями. По этой причине для распределения Грама – Шарлье использовалось более общее ограничение $E_{t-1}(\varepsilon_t \varepsilon_t' \otimes \varepsilon_t) = D_3 = const$, и построенные на его основе модели имеют некоторую асимметрию.

Далее приведено описание рассматриваемых многомерных моделей. Для каждой из них отмечены некоторые теоретические свойства, приведена формула логарифма функции плотности для вычисления оценок параметров методом максимального квазиправдоподобия²² и представлены таблицы с примерами вычисленных оценок.

²² О полноценном максимальном правдоподобии можно говорить в том случае, если маргинальное распределение первого наблюдения во временном ряду не зависит от оцениваемых параметров. Проверить эту гипотезу, как правило, не представляется возможным. Поэтому на практике этим пренебрегают и максимизируют функцию квазиправдоподобия.

Модели на основе t -распределения с вектором и скаляром степеней свободы

Рассматриваемое в данном разделе t -распределение с вектором степеней свободы было предложено в работе (Шведов, 2009). Его теория развивается в главах 3, 4 и 5 настоящей диссертации, а также в работах (Балаев, 2011а; 2012; 2014а) и (Шведов, 2010; 2012). Практическое применение данного распределения реализовано в главах 1 и 2 настоящей диссертации, а также в работе (Шведов, 2011).

Используя определение многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, приведенное в разделе 3.2 или работе (Шведов, 2009), запишем для случая $d=2$ условную функцию плотности распределения вектора доходностей в следующем виде:

$$f_{t-1}(r_t) = (2\pi)^{-1} \frac{\Gamma\left(\nu_1 + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma\left(\nu_2 - \frac{1}{2}\right)} |A_t|^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left(1 + \frac{1}{2}(r_t - \mu_t)' A_t^{-1} (r_t - \mu_t)\right)^{-\nu_1 - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(r_{t1} - \mu_{t1})^2}{A_{t11}}\right)^{\nu_1 - \nu_2} \quad (1.3)$$

Она соответствует t -распределению с вектором степеней свободы, параметрами которого являются $\mu_t \in \mathbb{R}^2$, положительно определенная

матрица A_t и вектор $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$, такой что $\nu_1 > 0$ и $\nu_2 > \frac{1}{2}$.

В работе (Шведов, 2010) показано, что вектор r_t может быть представлен в виде $r_t = \mu_t + P_t \eta$, где $P_t P_t' = A_t$, а случайный вектор η имеет функцию плотности распределения (1.3) с параметрами $\mu_t = 0$,

$A_t = I_2$ и тем же вектором $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$, что и для r_t . Таким образом,

распределение η не зависит от времени и поэтому индекс t для него

был изначально опущен. В главе 3, а также в работе (Балаев, 2012) показано, что $E(\eta)$ существует при $\nu_1 > \frac{1}{2}$, $\nu_2 > 1$ и $E(\eta) = 0$, а $E(\eta\eta')$

$$\text{существует при } \nu_1 > 1, \nu_2 > \frac{3}{2} \text{ и } E(\eta\eta') = \begin{pmatrix} \frac{2}{2\nu_2 - 3} & 0 \\ 0 & \frac{2(\nu_2 - 1)}{(2\nu_2 - 3)(\nu_1 - 1)} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что упомянутые ограничения на ν_1 и ν_2 выполнены. Тогда для вектора условных средних имеем $E_{t-1}(r_t) = \mu_t$, а условная ковариационная матрица вектора r_t имеет вид

$$V_{t-1}(r_t) = H_t = P_t \begin{pmatrix} \frac{2}{2\nu_2 - 3} & 0 \\ 0 & \frac{2(\nu_2 - 1)}{(2\nu_2 - 3)(\nu_1 - 1)} \end{pmatrix} P_t'$$

Отсюда

$$P_t = \left(\frac{2\nu_2 - 3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} H_{t11}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ H_{t12} H_{t11}^{-\frac{1}{2}} & \left(\frac{\nu_1 - 1}{\nu_2 - 1} \left(H_{t22} - \frac{H_{t12}^2}{H_{t11}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Тогда, определяя $A_t = P_t P_t'$ в формуле (1.3), получим $V_{t-1}(r_t) = H_t$. Динамика μ_t и H_t задается формулами (1.1) и (1.2) соответственно, что завершает построение модели.

Следует отметить, что можно было бы изначально задать динамику положительно определенной матрицы A_t , например, по формуле аналогичной (1.2). Однако в этом случае $V_{t-1}(r_t)$ могла бы не следовать ВЕКК(1,1) динамике и был бы нарушен принятый выше принцип одинаковой динамики условных ковариационных матриц для распределений, рассматриваемых в данной главе.

Для вектора шоков имеем $\varepsilon_t = r_t - \mu_t$, поэтому логарифм условной функции плотности распределения r_t в модели с t -распределением с вектором степеней свободы запишется в виде:

$$\ln f_{t-1}(r_t) = -\ln(2\pi) + \ln \Gamma\left(\nu_1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \Gamma(\nu_2) - \ln \Gamma(\nu_1) - \ln \Gamma\left(\nu_2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln |A_t| - \left(\nu_1 + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_t' A_t^{-1} \varepsilon_t\right) + (\nu_1 - \nu_2) \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{t1}^2}{A_{t11}}\right) \quad (1.4)$$

Модель на основе t -распределения со скалярным параметром степеней свободы получается введением ограничения $\nu_1 = \nu_2$. При этом лишь упрощаются вышеприведенные формулы.

В настоящее время известно, что включение числа степеней свободы многомерного t -распределения в состав аргументов, по которым максимизируется функция правдоподобия (как, например, в (Liu, Rubin, 1995)), является не вполне корректным с вычислительной точки зрения. Возникающие в случае такого включения проблемы рассмотрены в работах (Fernandez, Steel, 1999) и (Lucas, 1997). В силу наличия этих проблем, при оценке моделей с t -распределением в настоящей главе скалярный и векторный параметры степеней свободы не входят в состав аргументов оптимизации. Применяется двухшаговая процедура: на основе предварительного анализа выбирается и фиксируется скаляр или вектор степеней свободы, а затем проводится максимизация функции квазиправдоподобия по остальным параметрам. Выбор значения для скаляра или вектора степеней свободы основан на результатах эмпирического сравнения, пример дается в разделе 1.5.

В Таблице 1.7 представлены примеры оценок параметров моделей на основе t -распределения со скаляром и вектором степеней свободы. Данные оценки получены с предварительной фиксацией степеней свободы и последующей максимизацией по остальным

аргументам функции квазиправдоподобия, основанной на (1.4). Рассматриваются три случая: $\nu_1 = 3,9$ $\nu_2 = 4,1$, $\nu_1 = \nu_2 = 4$ и $\nu_1 = 4,1$ $\nu_2 = 3,9$. Случай $\nu_1 = \nu_2 = 4$ соответствует обычному двумерному t -распределению со скаляром степеней свободы. Здесь и далее в качестве примеров взяты пары индексов (S&P 500, DAX), (S&P 500, Hang Seng) и (DAX, Hang Seng). Для остальных 12 пар проведены аналогичные расчеты (см. приложение главы 1).

Таблица 1.7 Оценки параметров моделей на основе t -распределений со скаляром и вектором степеней свободы

	S&P 500, DAX		S&P 500, Hang Seng		DAX, Hang Seng	
	$\nu_1 = 3,9$ $\nu_2 = 4,1$		$\nu_1 = \nu_2 = 4$		$\nu_1 = 4,1$ $\nu_2 = 3,9$	
c	0,061 (0,014)		0,057 (0,014)		0,067 (0,018)	
	0,060 (0,017)		0,059 (0,020)		0,081 (0,021)	
Q	0,014 (0,019)	0,008 (0,013)	0,008 (0,017)	-0,003 (0,009)	0,009 (0,017)	-0,002 (0,013)
	0,414 (0,025)	-0,135 (0,017)	0,465 (0,025)	0,006 (0,017)	0,163 (0,018)	0,000 (0,018)
Ω	0,057 (0,024)	0 –	0,046 (0,014)	0 –	0,096 (0,020)	0 –
	-0,055 (0,029)	0,076 (0,026)	-0,009 (0,061)	0,175 (0,040)	0,081 (0,049)	0,138 (0,029)
A	0,179 (0,032)	-0,012 (0,017)	0,159 (0,021)	0,002 (0,010)	0,210 (0,022)	0,014 (0,020)
	-0,015 (0,036)	0,209 (0,018)	-0,009 (0,035)	0,271 (0,038)	-0,007 (0,030)	0,246 (0,040)
B	0,982 (0,007)	0,002 (0,004)	0,987 (0,004)	-0,001 (0,003)	0,977 (0,005)	-0,005 (0,006)
	0,010 (0,007)	0,974 (0,004)	0,006 (0,007)	0,956 (0,013)	0,002 (0,007)	0,964 (0,012)

Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия с предварительной фиксацией степеней свободы.

В скобках приведены стандартные ошибки.

Жирным показана значимость на 5% уровне.

Модель на основе обобщенного распределения ошибки (GED)

Многомерное обобщенное распределение ошибки рассматривается в работе (Giller, 2005). Запишем для случая $d = 2$ условную функцию плотности распределения вектора доходностей в следующем виде:

$$f_{t-1}(r_t) = \pi^{-1} |\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(1+2\kappa)\Gamma(\kappa)} \exp \left\{ - \left(\frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} (r_t - \mu_t)' \Sigma_t^{-1} (r_t - \mu_t) \right)^{\frac{1}{2\kappa}} \right\} \quad (1.5)$$

По определению, приведенному в работе (Giller, 2005), функция плотности (1.5) соответствует обобщенному распределению ошибки, параметрами которого являются $\mu_t \in \mathbb{R}^2$, положительно определенная матрица Σ_t и $\kappa > 0$. В (Giller, 2005) устанавливается, что в данном

случае $E_{t-1}(r_t) = \mu_t$ и $V_{t-1}(r_t) = H_t = \frac{\Gamma(4\kappa)\Gamma(1+\kappa)}{\Gamma(3\kappa)\Gamma(1+2\kappa)} \Sigma_t$. Отсюда

$$\Sigma_t = \frac{\Gamma(3\kappa)\Gamma(1+2\kappa)}{\Gamma(4\kappa)\Gamma(1+\kappa)} H_t$$

Тогда используя эту формулу для Σ_t в (1.5), будем иметь $V_{t-1}(r_t) = H_t$. Динамика μ_t и H_t , как и для модели с t -распределением, задается формулами (1.1) и (1.2) соответственно, что завершает построение модели.

Вектор шоков определяется как $\varepsilon_t = r_t - \mu_t$, поэтому логарифм условной функции плотности распределения r_t в модели с обобщенным распределением ошибки запишется в виде:

$$\ln f_{t-1}(r_t) = -\ln(\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma_t| + \ln \Gamma(2) + \ln \Gamma(3\kappa) - \ln \Gamma(1+2\kappa) - \ln \Gamma(\kappa) - \left(\frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \varepsilon_t' \Sigma_t^{-1} \varepsilon_t \right)^{\frac{1}{2\kappa}} \quad (1.6)$$

Таблица 1.8 Оценки параметров моделей на основе обобщенного распределения ошибки (GED)

	S&P 500, DAX		S&P 500, Hang Seng		DAX, Hang Seng	
c	0,059		0,056		0,068	
	(0,014)		(0,015)		(0,019)	
c	0,063		0,054		0,074	
	(0,018)		(0,021)		(0,021)	
Q	0,017	0,004	-0,002	-0,001	0,011	-0,006
	(0,018)	(0,013)	(0,018)	(0,010)	(0,018)	(0,013)
	0,415	-0,137	0,462	-0,002	0,159	-0,005
	(0,026)	(0,018)	(0,025)	(0,018)	(0,018)	(0,018)
Ω	0,058	0	0,045	0	0,114	0
	(0,022)	–	(0,015)	–	(0,021)	–
	-0,057	0,085	-0,001	0,19	0,113	0,148
	(0,031)	(0,028)	(0,063)	(0,051)	(0,054)	(0,030)
A	0,176	-0,013	0,155	0,004	0,204	0,020
	(0,030)	(0,017)	(0,019)	(0,013)	(0,025)	(0,020)
	-0,031	0,205	-0,028	0,274	-0,014	0,257
	(0,034)	(0,021)	(0,037)	(0,046)	(0,030)	(0,044)
B	0,983	0,002	0,987	-0,002	0,977	-0,008
	(0,007)	(0,004)	(0,003)	(0,004)	(0,006)	(0,007)
	0,014	0,973	0,010	0,954	0,003	0,960
	(0,007)	(0,005)	(0,008)	(0,017)	(0,007)	(0,014)
κ	0,786		0,818		0,835	
	(0,034)		(0,033)		(0,038)	

Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия. В скобках приведены стандартные ошибки. Жирным показана значимость на 5% уровне.

Отметим, что при $\kappa = \frac{1}{2}$ многомерное обобщенное распределение ошибки сводится к многомерному нормальному распределению, и в этом случае имеем $(r_t | I_{t-1}) \sim N_2(\mu_t, \Sigma_t)$. При $\kappa > \frac{1}{2}$ многомерные хвосты обобщенного распределения ошибки имеют больший «вес», чем многомерные хвосты нормального распределения, и с ростом κ толщина хвостов увеличивается. В проведенных в данной главе

расчетах параметр κ включается в список аргументов, по которым проводится максимизация функции квазиправдоподобия.

В Таблице 1.8 приведены примеры оценок параметров моделей с обобщенным распределением ошибки методом максимального квазиправдоподобия, основанном на функции (1.6).

Модель на основе распределения Грама – Шарлье

Функция плотности распределения Грама – Шарлье получается на основе разложения истинной условной функции плотности для вектора доходностей в ряд Грама – Шарлье вокруг нормального распределения $N(\mu_t, H_t)$. В полученном ряде все члены после 3-го отбрасываются, а остаток объявляется функцией плотности. Подробное описание построения данной функции можно найти, например, в работе (Del Brio et al., 2008).

Для условной ковариационной матрицы H_t определим нижнюю треугольную с положительными диагональными элементами матрицу P_t такую, что $P_t P_t' = H_t$. Запишем для случая $d = 2$ условную функцию плотности распределения вектора доходностей в следующем виде:

$$f_{t-1}(r_t) = \phi_2(r_t, \mu_t, H_t) \left(1 + \frac{1}{3!} \text{tr} \left\{ D_3 \left[\left(P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)'(P_t^{-1})' - 3I_2 \right) \otimes \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \otimes P_t^{-1}(r_t - \mu_t) \right] \right\} + \frac{1}{4!} \text{tr} \left\{ \left[D_4 - 3 \text{vec}(I_2) \text{vec}(I_2)' \right] \left[\text{vec} \left(P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)'(P_t^{-1})' - I_2 \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \text{vec} \left(P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)'(P_t^{-1})' - I_2 \right) - 4I_2 \otimes \left(P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)'(P_t^{-1})' \right) + 2I_4 \right] \right\} \right), \quad (1.7)$$

где $P_t = \begin{pmatrix} H_{t11}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ H_{t12} H_{t11}^{-\frac{1}{2}} & \left(H_{t22} - H_{t12} H_{t11}^{-1} H_{t12}' \right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$. Тогда непосредственным

интегрированием может быть установлено, что $\int_{\mathbb{R}^2} f_{t-1}(r_t) d\eta = 1$,

$E_{t-1}(r_t) = \mu_t$ и $V_{t-1}(r_t) = H_t$. Кроме того, для матрицы 3-их центральных нормированных моментов имеем

$$E\left(\left(P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(P_t^{-1}(r_t - \mu_t))'\right) \otimes (P_t^{-1}(r_t - \mu_t))'\right) = D_3, \quad 2 \times 4$$

а для матрицы 4-ых моментов получаем

$$E\left(\left(P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(P_t^{-1}(r_t - \mu_t))'\right) \otimes \left(P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(P_t^{-1}(r_t - \mu_t))'\right)\right) = D_4, \quad 4 \times 4$$

Таким образом, для функции (1.7) и распределения на ее основе имеем следующие результаты. Во-первых, если значения параметров таковы, что для любого r_t выполнено $f_{t-1}(r_t) > 0$, то $f_{t-1}(r_t)$ является функцией плотности. Обрывание ряда Грама – Шарлье на 3-ем члене приводит к тому, что функция $f_{t-1}(r_t)$ имеет области отрицательности для некоторых значений параметров. Тем не менее, на практике при моделировании многомерных распределений доходностей параметры подобной модели, как правило, оказываются таковы, что $f_{t-1}(r_t) > 0$ всюду и проблем с отрицательностью не возникает. Во-вторых, вектор условных ожиданий и условная ковариационная матрица оказываются ровно такими, какие требуются от модели. При этом динамика μ_t и H_t по-прежнему задается формулами (1.1) и (1.2) соответственно. И в-третьих, матрицы параметров D_3 и D_4 являются матрицами центрированных нормированных 3-их и 4-ых моментов соответственно. Матрица D_3 определяет асимметрию распределения, а матрица D_4 контролирует вероятностную массу в центре распределения, и соответственно «вес» многомерных хвостов.

Имеем $\varepsilon_t = r_t - \mu_t$, поэтому логарифм условной функции плотности распределения r_t в модели на основе распределения Грама – Шарлье запишется в виде:

Таблица 1.9 Оценки параметров моделей на основе распределения
Грама – Шарлье

	S&P 500, DAX		S&P 500, Hang Seng		DAX, Hang Seng	
c	0,050 (0,015)		0,051 (0,016)		0,048 (0,024)	
	0,052 (0,020)		0,046 (0,024)		0,061 (0,026)	
Q	0,011 (0,018)	0,006 (0,013)	0,008 (0,018)	-0,007 (0,010)	0,011 (0,017)	0,001 (0,013)
	0,418 (0,025)	-0,137 (0,018)	0,474 (0,027)	-0,006 (0,020)	0,157 (0,018)	0,003 (0,018)
Ω	0,064 (0,021)	0 –	0,041 (0,015)	0 –	0,141 (0,028)	0 –
	-0,065 (0,030)	0,080 (0,031)	0,057 (0,152)	0,213 (0,084)	0,184 (0,073)	0,150 (0,030)
A	0,186 (0,029)	-0,023 (0,019)	0,151 (0,019)	0,006 (0,020)	0,192 (0,041)	0,025 (0,015)
	-0,047 (0,031)	0,194 (0,028)	-0,038 (0,040)	0,269 (0,088)	-0,013 (0,036)	0,267 (0,040)
B	0,981 (0,007)	0,004 (0,004)	0,989 (0,003)	-0,003 (0,008)	0,980 (0,009)	-0,011 (0,006)
	0,018 (0,006)	0,975 (0,006)	0,012 (0,008)	0,954 (0,034)	0,003 (0,008)	0,955 (0,015)
$D_{3,11}$	-0,097 (0,063)		-0,065 (0,064)		-0,131 (0,067)	
$D_{3,12}$	0,030 (0,030)		-0,056 (0,031)		-0,071 (0,033)	
$D_{3,14}$	-0,040 (0,031)		0,066 (0,034)		0,033 (0,032)	
$D_{3,24}$	-0,096 (0,059)		-0,056 (0,064)		0,017 (0,057)	
$D_{4,11}$	4,052 (0,145)		4,064 (0,147)		4,010 (0,210)	
$D_{4,12}$	0,172 (0,068)		-0,008 (0,073)		0,014 (0,076)	
$D_{4,14}$	1,223 (0,058)		1,205 (0,059)		1,329 (0,059)	
$D_{4,24}$	0,072 (0,075)		0,132 (0,073)		0,107 (0,063)	
$D_{4,44}$	3,835 (0,143)		4,041 (0,157)		3,923 (0,131)	

Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия.
В скобках приведены стандартные ошибки.
Жирным показана значимость на 5% уровне.

$$\begin{aligned} \ln f_{t-1}(r_t) = & -\ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |H_t| - \frac{1}{2} \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t + \ln \left(1 + \frac{1}{3!} \text{tr} \left\{ D_3 \left[\left(P_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' (P_t^{-1})' - 3I_2 \right) \otimes \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \otimes P_t^{-1} \varepsilon_t \right] \right\} + \frac{1}{4!} \text{tr} \left\{ \left[D_4 - 3 \text{vec}(I_2) \text{vec}(I_2)' \right] \left[\text{vec} \left(P_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' (P_t^{-1})' - I_2 \right) \text{vec} \left(P_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' (P_t^{-1})' - I_2 \right)' - \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - 4I_2 \otimes \left(P_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' (P_t^{-1})' \right) + 2I_4 \right] \right\} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Распределение Грама – Шарлье, также как и обобщенное распределение ошибки, сводится к нормальному распределению при некоторых значениях параметров. А именно, положив $D_3 = \mathbb{O}$ и $D_4 = 3 \text{vec}(I_2) \text{vec}(I_2)'$, получаем $(r_t | I_{t-1}) \sim N_2(\mu_t, H_t)$.

В Таблице 1.9 приведены примеры оценок параметров моделей с распределением Грама – Шарлье методом максимального квазиправдоподобия, основанном на функции (1.8).

1.5 Сравнение моделей на основе KLIC теста

В этом разделе описывается метод сравнения двух конкурирующих параметризаций условного распределения доходностей²³. Модели, представленные в предыдущем разделе, являются невложенными, и для их сравнения может быть использован информационный критерий Кульбака – Лейблера. Сравнение двух функций плотности проводится в форме теста на основе этого информационного критерия (далее, KLIC теста). Подробная методология KLIC теста, а также проблемы, возникающие при его проведении, рассмотрены в работе (Vuong, 1989). В данном разделе

²³ Различные методы тестирования предположений о функциональной форме распределений рассмотрены, например, в работе (Хейфец, 2011). Оценке качества прогнозов условной плотности распределения доходностей посвящены работы (Diebold et al., 1998) и (Hong et al., 2007).

KLIC тест описан в контексте моделирования условной функции плотности вектора доходностей r_t .

Пусть имеются две конкурирующие условные функции плотности для вектора доходностей $f_{t-1}(r_t | \theta)$ и $g_{t-1}(r_t | \phi)$. Чтобы выбрать из них лучшую с точки зрения качества подгонки внутри выборки или предсказательной способности вне ее (при предсказании условной функции плотности в целом), проводится следующий тест.

Нулевая гипотеза состоит в эквивалентности сравниваемых функций плотности:

$$H_0 : f_{t-1}(r_t | \theta) \sim g_{t-1}(r_t | \phi)$$

Формально эквивалентность функций плотности определяется как равенство нулю расстояния Кульбака – Лейблера²⁴ между ними:

$$E \left[\log \frac{f_{t-1}(r_t | \theta_*)}{g_{t-1}(r_t | \phi_*)} \right] = 0$$

где θ_* и ϕ_* – это псевдоистинные значения параметров для двух рассматриваемых функций плотности.

Имеются две альтернативные гипотезы, соответствующие случаям, когда одна модель предпочтительнее другой:

$$H_f : f_{t-1}(r_t | \theta) \succ g_{t-1}(r_t | \phi)$$

$$H_g : g_{t-1}(r_t | \phi) \succ f_{t-1}(r_t | \theta)$$

Обозначим через ω_* дисперсию логарифмической разности рассматриваемых функций плотности:

$$\omega_* = \text{Var} \left(\log \frac{f_{t-1}(r_t | \theta_*)}{g_{t-1}(r_t | \phi_*)} \right)$$

Эту дисперсию можно состоятельно оценить следующим образом:

²⁴ Данное понятие было впервые рассмотрено в работе (Kullback, Leibler, 1951), где вместо слова “расстояние” применяется словосочетание “средняя информация”. Термин “расстояние Кульбака – Лейблера” вошел в употребление позже.

$$\hat{\omega}_* = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \left(\log \frac{f_{t-1}(r_t | \hat{\theta})}{g_{t-1}(r_t | \hat{\phi})} \right)^2 - \left(\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \log \frac{f_{t-1}(r_t | \hat{\theta})}{g_{t-1}(r_t | \hat{\phi})} \right)^2$$

где $\hat{\theta}$ и $\hat{\phi}$ – это оценки параметров двух моделей функции плотности методом максимального квазиправдоподобия.

Далее, обозначим через LR сумму выборочных логарифмических разностей рассматриваемых функций плотности:

$$LR = \sum_{t=2}^T \log \frac{f_{t-1}(r_t | \hat{\theta})}{g_{t-1}(r_t | \hat{\phi})}$$

KLIC тест основан на следующих асимптотических результатах в предположении о верности каждой из гипотез:

$$KLIC = \frac{LR}{\sqrt{T \hat{\omega}_*}} \xrightarrow[H_0]{d} N(0,1), \quad \xrightarrow[H_f]{p} +\infty, \quad \xrightarrow[H_g]{p} -\infty$$

Данный тест может быть проведен как внутри выборки, на которой оцениваются модели (для сравнения качества подгонки), так и вне ее (для сравнения предсказательной способности при предсказании условного распределения в целом).

Потенциальная проблема данного подхода к сравнению моделей – возможность ситуации $\omega_* = 0$, когда KLIC тест неприменим. Для проверки равенства $\omega_* = 0$ следует проводить так называемое предварительное тестирование. Однако, существующий на данный момент тест для проверки гипотезы $\omega_* = 0$ использует статистику с нестандартным и непивотальным распределением, и для упрощения расчетов предварительное тестирование в настоящей главе не проводится.

Эмпирический критерий выбора между функциями плотности f и g на основе KLIC теста выглядит следующим образом. Функция плотности g предпочтительнее функции плотности f , если

$KLIC < -1,96$, и f предпочтительнее g , если $KLIC > 1,96$. Если же $-1,96 < KLIC < 1,96$, то функции плотности f и g признаются эквивалентными на 5%-ом уровне значимости.

На основе данного критерия было проведено попарное сравнение рассмотренных в главе моделей внутри и вне выборки, на которой они построены. При проведении теста внутри выборки $T=3261$ и величины $\hat{\omega}_*$ и LR рассчитаны по первым 3261 наблюдению. При проведении теста вне выборки $T=1630$ и величины $\hat{\omega}_*$ и LR рассчитаны по последним 1630 наблюдениям. При этом для внутривыборочного и вневыборочного $KLIC$ теста использованы одни и те же оценки параметров функций плотности, вычисленные на основе первых 3261 наблюдения. Из 6 временных рядов доходностей рассматриваемых фондовых индексов составлены 15 различных пар, и на каждой паре рядов сравнивается каждая пара моделей, рассмотренных в разделе 1.4.

Для рассматриваемой пары временных рядов доходностей назовем победой по $KLIC$ тесту Модели 1 над Моделью 2 такую ситуацию, когда Модель 1 превосходит Модель 2 согласно упомянутому эмпирическому критерию. Соответственно, поражением по $KLIC$ тесту Модели 1 перед Моделью 2 будем считать обратную ситуацию. По результатам $KLIC$ теста для каждой модели было подсчитано число ее побед над другими моделями внутри и вне выборки. На основе этого был определен рейтинг каждой модели по качеству подгонки к данным и предсказательной способности при предсказании условной функции плотности в целом.

Модель на основе распределения Грама – Шарлье имеет наименьший рейтинг как по качеству подгонки, так и по предсказательной способности (см. приложение главы 1): 1 победа из

15 внутри выборки против распределения GED и 0 побед по всем остальным тестам. Несмотря на большое число параметров и наличие асимметрии, эта модель уступает моделям с GED распределением и t -распределением. Вероятная причина более низкого качества данной модели в том, что она представляет собой модификацию модели с нормальным распределением. Разложение истинной условной функции плотности в ряд Грама – Шарлье производится вокруг функции плотности нормального распределения. Поэтому обрывание ряда Грама – Шарлье на 3-ем члене дает функцию плотности, пусть и с новыми параметрами, но все еще достаточно похожую на функцию плотности нормального распределения. В результате модель с распределением Грама – Шарлье показывает низкое качество подгонки и предсказательную способность.

Модель с обобщенным распределением ошибки (GED) обходит модель с распределением Грама – Шарлье как по качеству подгонки (14 побед из 15), так и по предсказательной способности (15 побед из 15). Однако данная модель уступает модели на основе t -распределения со скалярным параметром степеней свободы (0 побед внутри выборки, 2 случая эквивалентности и 1 победа вне выборки). Условные функции плотности в моделях с распределением GED и t -распределением со скаляром степеней свободы имеют одинаковое число параметров и строятся по схожему принципу: в обеих есть скалярный параметр, контролирующий величину вероятностной массы в центре распределения ($\nu = \nu_1 = \nu_2$ для t -распределения и k для распределения GED). Поэтому данные модели качественно похожи и превосходство t -распределения со скаляром степеней свободы над распределением GED объясняется исключительно особенностями форм функций плотности данных распределений: для t -распределения форма оказывается более удачной при

моделировании распределения рассматриваемых финансовых доходностей.

Наконец, модели на основе t -распределения со скаляром и вектором степеней свободы имеют наивысший рейтинг как по качеству подгонки, так и по предсказательной способности. Для модели со скалярным параметром степеней свободы были рассмотрены случаи от $\nu_1 = \nu_2 = 2$ до $\nu_1 = \nu_2 = 10$ с шагом 0,5. Среди этих случаев был выбран тот, в котором обеспечивалось наибольшее доминирование по KLIC тесту модели с t -распределением над моделями с распределениями GED и Грама – Шарлье. Таковым оказался случай $\nu_1 = \nu_2 = 4$: внутри выборки в нем обеспечивается по 15 побед t -распределения над распределениями GED и Грама – Шарлье, а вне выборки – 12 побед над распределением GED и 15 побед над распределением Грама – Шарлье. По этой причине в качестве модели на основе t -распределения со скаляром степеней свободы взят именно случай $\nu_1 = \nu_2 = 4$. Модели с векторным параметром степеней свободы строились путем некоторой

корректировки вектора $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. При этом сумма степеней свободы

сохранялась постоянной на уровне 8. Таким путем были построены

модели с $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,1 \\ 3,9 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,9 \\ 4,1 \end{pmatrix}$. Согласно результатам KLIC

теста, модель с $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,1 \\ 3,9 \end{pmatrix}$ оказывается предпочтительнее модели с

$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ одновременно внутри и вне выборки в 3 случаях из 15, а

модель с $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,9 \\ 4,1 \end{pmatrix}$ – в 5 случаях из 15. При этом случаи успеха

$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,1 \\ 3,9 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,9 \\ 4,1 \end{pmatrix}$ приходятся на непересекающиеся наборы пар индексов.

Таким образом, для 8 из 15 пар рассмотренных фондовых индексов удалось найти модель на основе t -распределения с вектором степеней свободы, которая является более предпочтительной, чем модель со скаляром степеней свободы одновременно по качеству подгонки к данным и по предсказательной способности. Это показывает, что использование моделей не только с одинаковыми, но и с различными ν_1 и ν_2 для значительной части рядов позволяет получить более высокие результаты. Проведенные в данной главе расчеты подтверждают, что t -распределение с вектором степеней свободы может быть полезно при моделировании распределения финансовых доходностей на практике.

1.6 Выводы

В настоящей главе было проведено сравнение соответствия данным и пригодности для прогнозирования нескольких двумерных моделей для логарифмических доходностей индексов крупнейших мировых фондовых рынков. Рассмотрены 4 спецификации многомерной условной функции плотности распределения доходностей: t -распределение с вектором и скаляром степеней свободы, обобщенное распределение ошибки и распределение Грама – Шарлье. С помощью теста, основанного на информационном критерии Кульбака – Лейблера, проведено попарное сравнение оцененных моделей. На основе попарных сравнений получен следующий рейтинг распределений по качеству подгонки модели внутри выборки и предсказательной способности вне выборки: 1 – t -

распределение со скалярным и векторным параметром степеней свободы, 2 – обобщенное распределение ошибки, 3 – распределение Грама – Шарлье. Кроме того, показано, что t -распределение с векторным параметром степеней свободы, которое предложено в работе (Шведов, 2009), а в настоящей главе впервые использовано в задаче прогнозирования, чуть больше чем в половине рассмотренных случаев является более предпочтительным, чем классическое t -распределение со скаляром степеней свободы, как по качеству подгонки к данным, так и по предсказательной способности вне выборки. В следующей главе t -распределение с вектором степеней свободы используется для построения многомерных моделей динамики доходностей акций с целью составления оптимального финансового портфеля.

Глава 2. Моделирование многомерных распределений доходностей и составление портфелей из акций российских компаний

2.1 Постановка задачи

В этой главе рассматривается сопоставление различных многомерных моделей доходностей акций российских компаний с целью формирования портфелей из этих акций²⁵. Рассмотрены модели на основе многомерного нормального распределения, многомерного t -распределения со скаляром степеней свободы и многомерного t -распределения с вектором степеней свободы. С помощью построенных моделей составлены различные портфели акций, и проведено их сравнение с точки зрения риска и выгоды вложений.

Как было отмечено во введении, формирование оптимального портфеля активов является важной задачей для участников финансового рынка. При построении оптимального портфеля возникают такие задачи, как максимизация ожидаемой доходности или минимизация дисперсии доходности с учетом информации, доступной к данному моменту времени и ограничений на торговлю, имеющихся на рынке. В теории для решения подобных задач инвестору может быть необходимо знание совместного распределения доходностей имеющихся на рынке активов, учитывающего доступную на данный момент информацию²⁶. Однако на практике инвестор таким знанием не обладает, и ему необходимо оценить это условное

²⁵ Результаты главы 2 представлены в работах (Балаев, 2013б) и (Balaev, 2014).

²⁶ См., например, (Ширяев, 2009) и (Шведов, 1999). Знание условного распределения доходностей одного или нескольких активов необходимо также для оценки различных производных финансовых инструментов. См. (Халл, 2007) и Финансовые инструменты: Пер. с англ. / Под редакцией Фабоцци Ф. – М.: Эксмо, 2010. – 864 с.

распределение, для чего применяются различные эконометрические методы²⁷. Обзор таких методов применительно к составлению финансовых портфелей и учету рисков в процессе принятия инвестиционных решений дан, например, в книге (Scherer, 2002). Применение эконометрических методов в задачах управления риском рассмотрено также в работе (Фантаццини, 2008).

Глава 2 построена следующим образом. В разделе 2.2 приведен обзор литературы о моделировании многомерных распределений доходностей применительно к составлению финансовых портфелей. Раздел 2.3 содержит описание использованных данных о доходностях российских акций, а также результаты предварительного эмпирического анализа. В разделе 2.4 приведено описание и оценки параметров многомерных моделей доходностей, учитывающих основные особенности используемых данных. В разделе 2.5 приведены характеристики портфелей, составленных с помощью построенных многомерных моделей доходностей, и проведено их сравнение с точки зрения риска и выгоды вложений. Наконец, в разделе 2.6 сформулированы выводы главы 2.

2.2 Литература о моделировании доходностей и составлении финансовых портфелей

Применение эконометрических моделей для построения прогнозов финансовых доходностей и составления портфелей активов

²⁷ Существуют альтернативные методы прогнозирования динамики на финансовых рынках. Например, в книге (Петерс, 2000) рассмотрены методы построения долгосрочных прогнозов для рынков акций, облигаций и валюты, основанные на применении фрактального анализа. Широкое применение находят технический и фундаментальный анализ (см., (Содерлинд, 2006)).

на их основе достаточно широко освещено в литературе. Здесь дается лишь краткое описание некоторых из наиболее важных работ.

Работа (Winkler, 1973) относится к ранним публикациям, посвященным применению байесовских методов прогнозирования распределений доходностей применительно к задаче портфельного выбора. Работа (Polson, Tew, 2000) также посвящена использованию байесовских методов в задаче портфельного выбора: в ней строятся прогнозные распределения доходностей акций, входящих в индекс S&P 500 и на их основе оптимизируются финансовые портфели. В работе (Gohout, Specht, 2007) на основе байесовских методов построены многомерные модели доходностей акций из индекса DAX и проведен эмпирический анализ результативности торговых стратегий, основанных на применении этих моделей. В работе (Greyserman et al., 2006) оптимизация портфелей проводится путем максимизации ожидаемой полезности, которая вычисляется с помощью методов Монте-Карло с цепями Маркова на основе прогнозных распределений доходностей, построенных с помощью байесовского подхода.

Работа (Young, Lenk, 1998) посвящена составлению финансовых портфелей с помощью так называемых факторных моделей, в которых доходности активов предсказываются на основе динамики фондовых индексов, доходностей специфических портфелей, макроэкономических индикаторов и других переменных. В работе (Aguilar, West, 2000) для многомерных временных рядов обменных курсов основных мировых валют строятся факторные модели со стохастической волатильностью, на основе которых вычисляются краткосрочные прогнозы и проводится оптимизация финансовых портфелей.

Работа (Первозванский, 1999) посвящена проблеме учета нестационарности и неадекватности предположения об эффективности рынка при формировании оптимального портфеля. Автор рассматривает данную проблему на примере российского рынка ценных бумаг.

В работе (Артемьев, Якунин, 2001) рассмотрена многомерная модель динамики цен акций, представляющая собой систему стохастических дифференциальных уравнений, анализируется вопрос оценивания данной модели, и на ее основе проводятся численные эксперименты по построению множества допустимых портфелей.

Для нейтрализации больших выбросов при анализе рядов доходностей активов и составлении портфелей можно применять робастные методы. В работе (Жидков и др., 2003) рассматривается задача прогнозирования временных рядов доходностей и построения эффективных портфелей с помощью метода на основе робастных линейных сглаживающих сплайнов и метода на основе робастных ортогональных полиномов.

В литературе рассматриваются также вопросы прогнозирования доходностей и составления портфелей из долговых инструментов. Например, в работе (Первозванский, Баринев, 1997) предложена модель прогнозирования доходности государственных краткосрочных облигаций (ГКО) и приведен пример построения оптимального портфеля ГКО с помощью данной модели.

При составлении финансовых портфелей с помощью эконометрических моделей значительную роль играет выбор многомерного распределения, лежащего в основе модели. Одним из популярных распределений, применяемых для составления портфелей, является многомерное t -распределение со скаляром степеней свободы, которому посвящена, в частности, работа (Kotz,

Nadarajah, 2008), в которой содержится краткий обзор практических приложений этого распределения, среди которых составление финансовых портфелей. Применение t -распределения со скаляром степеней свободы может давать хорошие результаты при составлении портфелей. Например, в работе (Ку, 2008) показано, что применение t -распределения в многомерных GARCH моделях дает существенно большую эффективность хеджирования портфелей, чем применение нормального распределения.

В одной из эконометрических моделей, рассмотренных в предыдущей главе, используется многомерное t -распределение с вектором степеней свободы, предложенное в работе (Шведов, 2009). Это распределение позволяет учитывать больше информации при составлении финансовых портфелей, чем t -распределение со скалярным параметром степеней свободы, поскольку вектор степеней свободы предоставляет возможность моделировать для каждой доходности свой индивидуальный эксцесс. В настоящей главе многомерное t -распределение с вектором степеней свободы впервые применяется в задаче составления финансовых портфелей. Проводится сравнение портфелей из акций российских компаний, составленных с использованием t -распределения с вектором степеней свободы и портфелей, составленных с использованием нормального распределения, а также t -распределения со скаляром степеней свободы.

2.3 Данные и предварительный анализ

Эмпирический анализ проводится на основе данных о дневных ценах закрытия для акций крупнейших российских компаний, котировавшихся на бирже ММВБ в 2008-2013 гг. (после слияния

ММВБ и РТС в декабре 2011 г. – на Московской Бирже), входящих в индекс ММВБ и имеющих достаточный уровень ликвидности.²⁸

Для анализа можно было бы также использовать данные о котировках в системе РТС. Однако до слияния с ММВБ торговлю в РТС осуществляли главным образом инвесторы, которые совершали относительно редкие крупные сделки, в то время как на ММВБ шла более интенсивная торговля со значительным количеством сделок небольшого объема. По этой причине акции, торговавшиеся на ММВБ были более ликвидны, чем акции, торговавшиеся в РТС, и соответственно выбор в пользу ММВБ позволяет обеспечить более высокое качество данных для моделирования. Кроме того, для включения в индекс ММВБ компания должна была удовлетворять более жестким требованиям по финансовым показателям, чем для включения в индекс РТС. Поэтому ориентировка на индекс ММВБ позволяет также обеспечить более качественный отбор акций для составления оптимальных портфелей.

Часть входящих в индекс ММВБ акций крупных компаний имеют относительно низкую ликвидность. Это в первую очередь акции, динамика цен которых слабо зависит от финансовых показателей эмитентов и в значительной степени определяется корпоративными событиями. Такие акции, даже в случае лидирующего положения эмитента в той или иной отрасли, не рассматриваются в настоящей диссертации. В частности, из анализа исключены акции компаний строительного сектора и практически всех телекоммуникационных компаний. Среди остальных акций крупных компаний, входящих в индекс ММВБ, выбирались наиболее ликвидные, то есть предпочтение отдавалось акциям, имеющим низкий спред между ценой покупки (bid) и ценой продажи (ask) за

²⁸ Использована функция `rx_last` в базе данных Bloomberg.

счет постоянного наличия большого количества покупателей и продавцов.

В результате были отобраны акции 14 компаний, являющихся лидерами или ключевыми игроками в 10 основных отраслях российской экономики. Для четырех отраслей с наибольшей ликвидностью акций (нефтяной, газовой, металлургической и банковской) рассматривались акции двух лидирующих компаний, для остальных отраслей – акции одной компании. В Таблице 2.1 представлена информация об акциях компаний, отобранных для анализа.

Таблица 2.1 Акции, использованные при составлении оптимальных портфелей*

Компания	Тикер	Отрасль	Ликвидность	Капитализация, млрд. руб.
Аэрофлот	AFLT	Транспорт	Средняя	60
ВТБ	VTBR	Банки	Высокая	580
Газпром	GAZP	Газ	Высокая	3420
Дикси	DIXY	Ритейл	Низкая	55
ИНТЕР РАО	IRAO	Энергетика	Средняя	218
Лукойл	LKOH	Нефть	Высокая	1700
МТС	MTSS	Связь	Средняя	580
НЛМК	NLMK	Металлы	Средняя	330
НОВАТЭК	NVTK	Газ	Средняя	960
Норникель	GMKN	Металлы	Высокая	1005
Распадская	RASP	Уголь	Средняя	48
Роснефть	ROSN	Нефть	Высокая	2570
Сбербанк	SBER	Банки	Высокая	2250
Уралкалий	URKA	Удобрения	Средняя	680

* Данные портала <http://stocks.investfunds.ru> на 19 февраля 2013 г.

Исходные временные ряды цен закрытия охватывают период с 18 июля 2008 г. по 19 февраля 2013 г. Как и в главе 1, на основе данных о ценах для рассматриваемых акций были рассчитаны логарифмические

доходности вида $r_t = 100 \ln(S_t / S_{t-1})$, где S_t – цена последней сделки в основной торговой сессии ММВБ в день t .

Для обеспечения возможности оценивать многомерные модели данные были синхронизированы аналогично тому, как это сделано в главе 1. Доходности рассчитывались с использованием цен только в те дни, когда торговались все 14 выбранных акций, и поэтому из каждого временного ряда для цен акций были исключены некоторые наблюдения. Таким образом, доходности акций не всегда рассчитывались для периода длиной в один день. В Таблице 2.2 приведены длины периодов, за которые рассчитывались доходности акций, и их доли в общем числе наблюдений.

Таблица 2.2 Временные интервалы доходностей акций

	0	1	2	3	4	10	11
Наблюдения	898	10	202	22	2	4	1
Доля, %	78,8	0,9	17,7	1,9	0,2	0,4	0,1
Накопленные наблюдения	898	908	1110	1132	1134	1138	1139
Накопленная доля, %	78,8	79,7	97,5	99,4	99,6	99,9	100

Число пропусков длиной 3 дня и более в построенной выборке мало: из Таблицы 2.2 следует, что они составляют лишь 2,6% всех наблюдений, и ими можно пренебречь. Поэтому в дальнейшем, как и в главе 1, при построении моделей и анализе оптимальных портфелей специфика доходностей, соответствующих периодам длиной 3 дня и более, не учитывается, и все доходности рассматриваются как дневные.

Используемые данные состоят из 14 рядов доходностей по 1139 наблюдений каждый. Данные были разделены на 2 части: первые 760 наблюдений используются для построения моделей, а последние 379 наблюдений – для оценки качества моделей на основе динамики стоимости оптимальных портфелей. Как и в главе 1, первая часть

данных имеет в два раза больше наблюдений, чем вторая, что дает достаточно большие выборки как для построения моделей, так и для оценки их прогнозной силы.

Период высокой кризисной волатильности осени 2008 г. входит в первую часть рассматриваемых данных, что затрудняет сходимость процедур оптимизации при оценке моделей.²⁹ Однако эта проблема решается за счет аккуратного подбора стартовых значений параметров.

Таблица 2.3 Описательные статистики доходностей акций

	AFLT	DIXY	GAZP	GMKN	IRAO	LKOH	MTSS
Среднее	-0,02	0,03	-0,07	0,00	0,02	-0,01	-0,01
Медиана	-0,03	0,00	-0,07	0,00	0,00	0,01	0,03
Максимум	21,59	28,12	31,09	20,78	45,90	26,78	29,26
Минимум	-24,43	-35,67	-23,49	-39,34	-47,51	-23,00	-25,51
Стд. откл.	2,49	4,03	3,13	3,40	5,25	2,95	2,87
Асимметрия	0,14	-2,15	0,36	-1,28	0,20	0,20	-0,62
Эксцесс	17,90	30,09	18,62	20,54	23,60	17,01	21,63
	NLMK	NVTK	RASP	ROSN	SBER	URKA	VTBR
Среднее	-0,06	0,04	-0,10	0,00	0,03	-0,03	-0,04
Медиана	-0,12	0,12	-0,03	-0,03	0,10	0,07	0,00
Максимум	34,93	35,84	20,36	45,99	44,80	45,22	46,99
Минимум	-24,14	-16,63	-25,98	-27,24	-26,41	-46,16	-37,26
Стд. откл.	4,28	3,29	3,84	3,45	3,87	4,51	3,70
Асимметрия	0,31	0,67	-0,57	1,69	0,94	-0,25	0,50
Эксцесс	10,82	17,53	8,07	36,84	23,44	25,11	36,68

В Таблице 2.3 представлены описательные статистики для полных рядов доходностей из 1139 наблюдений. Заметим, что маргинальные распределения всех рассматриваемых акций имеют тяжелые хвосты: коэффициент эксцесса для каждой акции существенно превышает 0, что является одним из известных эмпирических фактов о распределениях финансовых доходностей. Отметим также, что коэффициенты асимметрии и эксцесса

²⁹ Эконометрический анализ российского фондового рынка в период финансового кризиса 2008-2009 гг. проводится в работе (Лукашин, 2010).

распределений доходностей существенно разнятся от акции к акции. При этом преобладает положительная асимметрия, что, как правило, не характерно для рядов финансовых доходностей.

Некоторые из рассматриваемых рядов доходностей акций имеют значимую автокорреляцию. В Таблице 2.4 показано, что гипотеза о нулевой автокорреляции в модели AR(1) с константой отвергается на 5% уровне значимости тестом Вальда для 6 из 14 рядов доходностей. Таким образом, при построении многомерных моделей необходимо учитывать наличие автокорреляции доходностей, например, в уравнении для вектора условных средних.

Таблица 2.4 Тест Вальда на нулевую автокорреляцию в моделях AR(1) с константой

	AFLT	DIXY	GAZP	GMKN	IRAO	LKOH	MTSS
Статистика Вальда	3,17	2,97	1,80	52,45	57,67	1,79	1,01
P-значение	0,08	0,09	0,18	0,00	0,00	0,18	0,31
	NLMK	NVTK	RASP	ROSN	SBER	URKA	VTBR
Статистика Вальда	8,92	0,30	22,50	1,34	0,02	20,12	7,62
P-значение	0,00	0,58	0,00	0,25	0,88	0,00	0,01

В Таблице 2.5 приведены корреляции доходностей каждой акции с доходностями других акций в текущий и предыдущий момент времени. Положительная корреляция доходностей различных акций за один и тот же период в некоторой степени объясняется общими трендами на фондовом рынке. Так, позитивная динамика макроэкономических показателей и общий оптимизм инвесторов увеличивает спрос в той или иной мере на все акции и в результате между их доходностями возникает положительная корреляция. Однако имеются и другие, более специфические причины наличия

корреляций. Например, доходности акций компаний из одной и той же отрасли имеют значимую положительную корреляцию вследствие наличия общих отраслевых факторов, определяющих финансовые показатели этих компаний. Для рассматриваемых акций корреляция доходностей составляет 0,6 для металлургической отрасли, 0,7 для газовой отрасли и 0,8 для нефтяной и банковской отраслей. Значимая положительная корреляция наблюдается и между доходностями акций компаний из разных отраслей: для менее ликвидных акций (например, Аэрофлот, Дикси, ИНТЕР РАО) она составляет от 0,2 до 0,5, для более ликвидных (например, Роснефть, Газпром, Сбербанк) – от 0,5 до 0,9. Крупные инвесторы, как правило, покупают наборы из высоколиквидных акций, так называемых “голубых фишек”, с целью диверсификации портфеля, что объясняет более высокую корреляцию доходностей этих акций.

Из Таблицы 2.5 также следует, что для рассматриваемых рядов корреляция между лагированной доходностью одной акции и текущей доходностью другой акции близка к нулю: лишь в отдельных случаях она составляет -0,1 или 0,1. Однако, не смотря на близкую к нулю корреляцию, динамические связи между доходностями различных акций все же существуют, как показывает анализ оценок параметров модели VAR(1) с нормальным распределением, приведенных в Таблице 2.6. Лагированные доходности всех рассматриваемых акций, за исключением акций компании Роснефть, имеют статистически значимое влияние на текущие доходности других акций: почти в каждой строке Таблицы 2.6 имеется хотя бы один коэффициент, значимый на 5%-уровне значимости.

Таблица 2.5 Одновременные и лагированные корреляции логарифмических доходностей акций

	AFLT	AFLT(-1)	DIXY	DIXY(-1)	GAZP	GAZP(-1)	GMKN	GMKN(-1)	IRAO	IRAO(-1)	LKOH	LKOH(-1)	MTSS	MTSS(-1)	NLMK	NLMK(-1)	NVTK	NVTK(-1)	RASP	RASP(-1)	ROSN	ROSN(-1)	SBER	SBER(-1)	URKA	URKA(-1)	VTBR	VTBR(-1)	
AFLT	1																												
AFLT(-1)	0,1	1																											
DIXY	0,2	-0,1	1																										
DIXY(-1)	0,0	0,2	-0,1	1																									
GAZP	0,5	0,0	0,3	0,0	1																								
GAZP(-1)	0,0	0,5	-0,1	0,3	0,0	1																							
GMKN	0,4	0,1	0,3	0,0	0,7	0,1	1																						
GMKN(-1)	0,0	0,4	0,0	0,3	0,0	0,7	0,2	1																					
IRAO	0,3	0,1	0,2	0,0	0,5	0,0	0,3	0,0	1																				
IRAO(-1)	0,0	0,3	0,0	0,2	-0,1	0,5	-0,1	0,3	0,2	1																			
LKOH	0,4	0,0	0,3	-0,1	0,9	0,0	0,7	0,0	0,4	-0,1	1																		
LKOH(-1)	0,0	0,4	-0,1	0,3	0,0	0,9	0,1	0,7	0,0	0,4	0,0	1																	
MTSS	0,4	0,1	0,2	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	0,4	0,0	0,7	0,0	1																
MTSS(-1)	0,0	0,4	-0,1	0,2	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	0,4	0,0	0,7	0,0	1															
NLMK	0,3	0,1	0,2	0,0	0,7	0,1	0,6	0,1	0,4	0,0	0,6	0,1	0,7	0,1	1														
NLMK(-1)	0,0	0,3	-0,1	0,2	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	0,4	0,0	0,6	0,0	0,7	0,1	1													
NVTK	0,4	0,1	0,2	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	0,4	-0,1	0,7	0,0	0,6	0,0	0,6	0,0	1												
NVTK(-1)	0,0	0,4	-0,1	0,2	-0,1	0,7	0,1	0,6	0,0	0,4	-0,1	0,7	0,0	0,6	0,0	0,6	0,0	1											
RASP	0,3	0,1	0,2	0,0	0,6	0,2	0,5	0,1	0,3	0,0	0,6	0,1	0,6	0,1	0,6	0,1	0,6	0,1	1										
RASP(-1)	0,0	0,3	0,0	0,2	0,0	0,6	0,1	0,5	0,0	0,3	0,0	0,6	0,0	0,6	0,0	0,6	0,0	0,6	0,1	1									
ROSN	0,4	0,1	0,2	-0,1	0,9	0,1	0,7	0,1	0,5	-0,1	0,8	0,0	0,7	0,0	0,7	0,0	0,7	0,0	0,6	0,0	1								
ROSN(-1)	0,0	0,4	-0,1	0,2	0,0	0,9	0,1	0,7	0,0	0,5	-0,1	0,8	0,0	0,7	0,1	0,7	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	1							
SBER	0,5	0,1	0,3	0,0	0,8	0,0	0,7	0,0	0,5	-0,1	0,8	0,0	0,8	0,0	0,7	0,0	0,7	0,0	0,6	0,0	0,8	0,0	1						
SBER(-1)	0,0	0,5	0,0	0,3	-0,1	0,8	0,1	0,7	0,1	0,5	-0,1	0,8	0,0	0,8	0,0	0,7	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	0,8	0,0	1					
URKA	0,4	0,1	0,2	0,0	0,6	0,0	0,5	0,0	0,3	-0,1	0,6	0,0	0,6	0,0	0,6	0,0	0,6	0,0	0,5	0,0	0,6	0,0	0,6	0,0	1				
URKA(-1)	0,0	0,4	-0,1	0,2	0,0	0,6	0,1	0,5	0,0	0,3	0,0	0,6	0,1	0,6	0,1	0,6	0,0	0,6	0,2	0,5	0,0	0,6	0,0	0,6	0,1	1			
VTBR	0,5	0,1	0,3	0,0	0,8	0,1	0,6	0,1	0,5	0,0	0,7	0,0	0,7	0,0	0,6	0,0	0,7	0,0	0,6	0,0	0,8	0,1	0,8	0,0	0,6	0,1	1		
VTBR(-1)	0,0	0,5	0,0	0,3	0,0	0,8	0,1	0,6	0,1	0,5	-0,1	0,7	0,0	0,7	0,0	0,6	0,0	0,7	0,1	0,6	0,0	0,8	0,0	0,8	0,0	0,6	0,1	1	

(-1) означает лагированную доходность.

Знаки и величина коэффициентов в полученной векторной авторегрессии отражают сложившиеся на рынке приоритеты и типичную реакцию инвесторов на рост стоимости тех или иных акций. Например, рост стоимости акции 1 повышает спрос инвесторов на нее, но для диверсификации портфеля они могут покупать также и акцию 2. В этом случае влияние лагированной доходности акции 1 на текущую доходность акции 2, вероятно, будет положительным. В то же время при росте стоимости акции 1 инвесторы могут приобретать дополнительное ее количество за счет частичного вывода средств из акции 3. Тогда динамическая связь между доходностями акций 1 и 3 может быть отрицательной.

Таблица 2.6 Оценки параметров 14-мерной модели VAR(1)

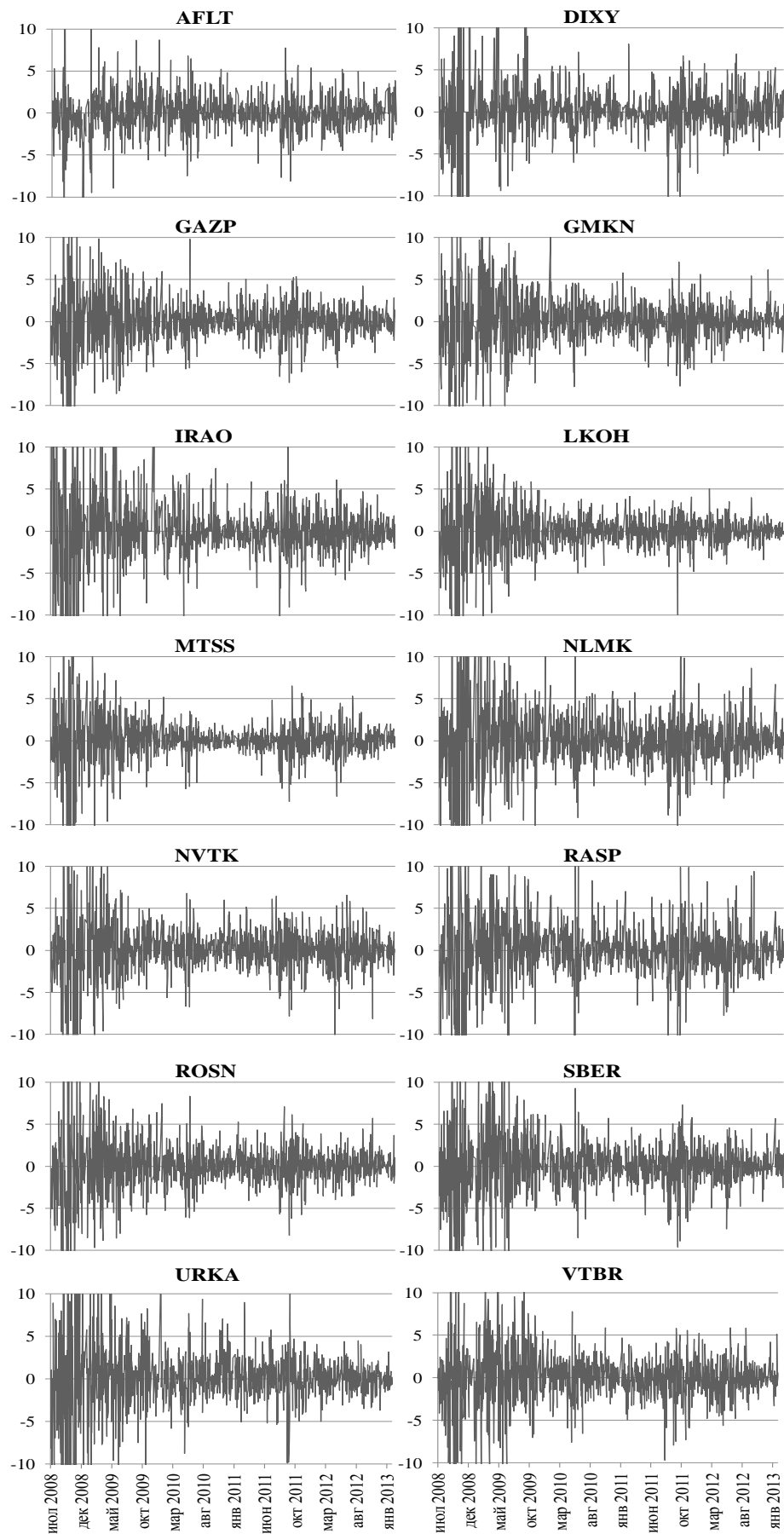
	AFLT	DIXY	GAZP	GMKN	IRAO	LKOH	MTSS	NLMK	NVTK	RASP	ROSN	SBER	URKA	VTBR
AFLT(-1)	0,09 (0,03)	0,17 (0,06)	0,05 (0,04)	0,01 (0,05)	0,18 (0,07)	0,09 (0,04)	0,17 (0,04)	0,11 (0,06)	0,10 (0,05)	0,16 (0,05)	0,13 (0,05)	0,18 (0,05)	0,24 (0,06)	0,22 (0,05)
DIXY(-1)	-0,02 (0,02)	-0,04 (0,03)	-0,02 (0,02)	-0,06 (0,03)	-0,06 (0,04)	-0,04 (0,02)	-0,03 (0,02)	-0,06 (0,03)	0,02 (0,03)	-0,01 (0,03)	-0,08 (0,03)	-0,02 (0,03)	-0,03 (0,03)	-0,01 (0,03)
GAZP(-1)	0,17 (0,06)	0,00 (0,09)	0,34 (0,07)	0,13 (0,08)	0,05 (0,12)	0,14 (0,07)	0,16 (0,07)	0,40 (0,10)	0,34 (0,08)	0,18 (0,09)	0,29 (0,08)	0,24 (0,09)	0,29 (0,10)	0,20 (0,08)
GMKN(-1)	0,00 (0,03)	0,04 (0,05)	0,08 (0,04)	0,23 (0,04)	0,13 (0,07)	0,09 (0,04)	0,03 (0,04)	0,04 (0,06)	-0,04 (0,04)	0,08 (0,05)	0,06 (0,04)	0,05 (0,05)	-0,07 (0,06)	0,03 (0,05)
IRAO(-1)	-0,01 (0,02)	-0,02 (0,03)	-0,05 (0,02)	-0,08 (0,02)	0,27 (0,03)	-0,06 (0,02)	-0,01 (0,02)	-0,02 (0,03)	-0,07 (0,02)	-0,07 (0,03)	-0,05 (0,02)	-0,05 (0,03)	-0,10 (0,03)	-0,06 (0,02)
LKOH(-1)	-0,03 (0,05)	-0,02 (0,08)	-0,04 (0,07)	-0,06 (0,07)	-0,26 (0,11)	0,00 (0,06)	-0,03 (0,06)	-0,07 (0,09)	-0,19 (0,07)	-0,02 (0,08)	-0,11 (0,07)	-0,06 (0,08)	-0,12 (0,09)	-0,09 (0,08)
MTSS(-1)	-0,04 (0,04)	-0,18 (0,07)	0,02 (0,05)	0,07 (0,06)	-0,09 (0,09)	0,02 (0,05)	0,01 (0,05)	0,00 (0,08)	-0,06 (0,06)	0,00 (0,07)	-0,06 (0,06)	-0,01 (0,07)	-0,02 (0,08)	-0,09 (0,06)
NLMK(-1)	0,05 (0,03)	-0,18 (0,04)	-0,02 (0,03)	-0,02 (0,04)	-0,01 (0,05)	0,04 (0,03)	-0,01 (0,03)	0,11 (0,05)	0,09 (0,03)	0,07 (0,04)	0,03 (0,04)	-0,04 (0,04)	0,03 (0,05)	-0,03 (0,04)
NVTK(-1)	-0,02 (0,04)	-0,14 (0,06)	-0,10 (0,05)	-0,05 (0,05)	-0,11 (0,08)	-0,10 (0,04)	-0,06 (0,04)	-0,16 (0,06)	0,03 (0,05)	0,01 (0,06)	-0,12 (0,05)	-0,11 (0,06)	-0,19 (0,06)	-0,10 (0,05)
RASP(-1)	-0,03 (0,03)	0,19 (0,04)	-0,03 (0,03)	0,01 (0,04)	-0,07 (0,06)	-0,02 (0,03)	-0,02 (0,03)	-0,06 (0,05)	-0,08 (0,04)	0,04 (0,04)	-0,04 (0,04)	-0,06 (0,04)	-0,06 (0,05)	-0,06 (0,04)
ROSN(-1)	-0,02 (0,05)	0,02 (0,08)	-0,07 (0,06)	-0,06 (0,07)	0,09 (0,10)	-0,04 (0,06)	0,02 (0,06)	-0,06 (0,08)	-0,06 (0,06)	-0,12 (0,08)	0,05 (0,07)	-0,12 (0,08)	0,08 (0,09)	0,04 (0,07)
SBER(-1)	-0,03 (0,04)	0,20 (0,06)	-0,14 (0,05)	-0,04 (0,05)	0,06 (0,08)	-0,10 (0,05)	-0,04 (0,05)	-0,11 (0,07)	-0,13 (0,05)	-0,11 (0,06)	-0,14 (0,06)	0,01 (0,06)	-0,27 (0,07)	-0,16 (0,06)
URKA(-1)	0,02 (0,02)	-0,13 (0,04)	0,03 (0,03)	0,05 (0,03)	-0,05 (0,05)	0,00 (0,03)	0,03 (0,03)	0,03 (0,04)	0,03 (0,03)	0,07 (0,03)	0,05 (0,03)	0,04 (0,04)	0,22 (0,04)	0,07 (0,03)
VTBR(-1)	-0,12 (0,04)	0,03 (0,06)	-0,02 (0,05)	0,02 (0,05)	-0,03 (0,08)	-0,03 (0,05)	-0,11 (0,05)	-0,05 (0,07)	0,07 (0,05)	-0,01 (0,06)	0,02 (0,06)	0,02 (0,06)	0,10 (0,07)	0,18 (0,06)
C	-0,01 (0,07)	0,04 (0,12)	-0,04 (0,09)	0,02 (0,10)	0,01 (0,15)	0,01 (0,09)	0,01 (0,08)	-0,01 (0,13)	0,07 (0,10)	-0,07 (0,11)	0,04 (0,10)	0,05 (0,11)	0,03 (0,13)	-0,01 (0,11)

Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия.

В скобках приведены стандартные ошибки.

Жирным показана значимость на 5% уровне.

Рис. 2.1 Динамика логарифмических доходностей акций, % в день



Вопрос наличия автокорреляции и динамических связей между доходностями важен, поскольку для их учета в многомерных моделях требуется много параметров, что значительно усложняет оценивание этих моделей. В разделе 2.4 наличие автокорреляции и динамических связей между доходностями различных акций учитывается также с помощью векторной авторегрессии.

Как и в главе 1, на графиках динамики доходностей, изображенных на Рис. 2.1, видна классическая кластеризация волатильности, характерная для рядов финансовых доходностей. Особенно заметны большие кластеры волатильности, приходящиеся на период финансового кризиса.

Наличие кластеризации волатильности также подтверждается значимостью и высокими значениями оценок параметров β_2 в GARCH(1,1) моделях с t -распределением, приведенных в Таблице 2.7.³⁰

Таблица 2.7 Оценки параметров моделей GARCH(1,1) с t -распределением

	AFLT	DIXY	GAZP	GMKN	IRAO	LKOH	MTSS
β_0	0,80 (0,05)	0,49 (0,04)	0,05 (0,04)	0,05 (0,02)	0,18 (0,10)	0,01 (0,04)	0,02 (0,05)
β_1	0,26 (0,02)	0,27 (0,02)	0,09 (0,02)	0,10 (0,01)	0,13 (0,04)	0,08 (0,02)	0,09 (0,02)
β_2	0,64 (0,02)	0,74 (0,01)	0,91 (0,02)	0,90 (0,01)	0,87 (0,03)	0,92 (0,02)	0,91 (0,02)
ν	3,89 (0,77)	3,34 (0,52)	6,73 (0,93)	5,93 (1,04)	3,28 (0,48)	6,91 (0,84)	4,31 (1,29)

³⁰ Модель вида $\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-1}^2$, где σ_t^2 – условная дисперсия доходности в момент времени t . Для доходности r_t использовано t -распределение с ν степенями свободы. См. (Bollerslev, 1987).

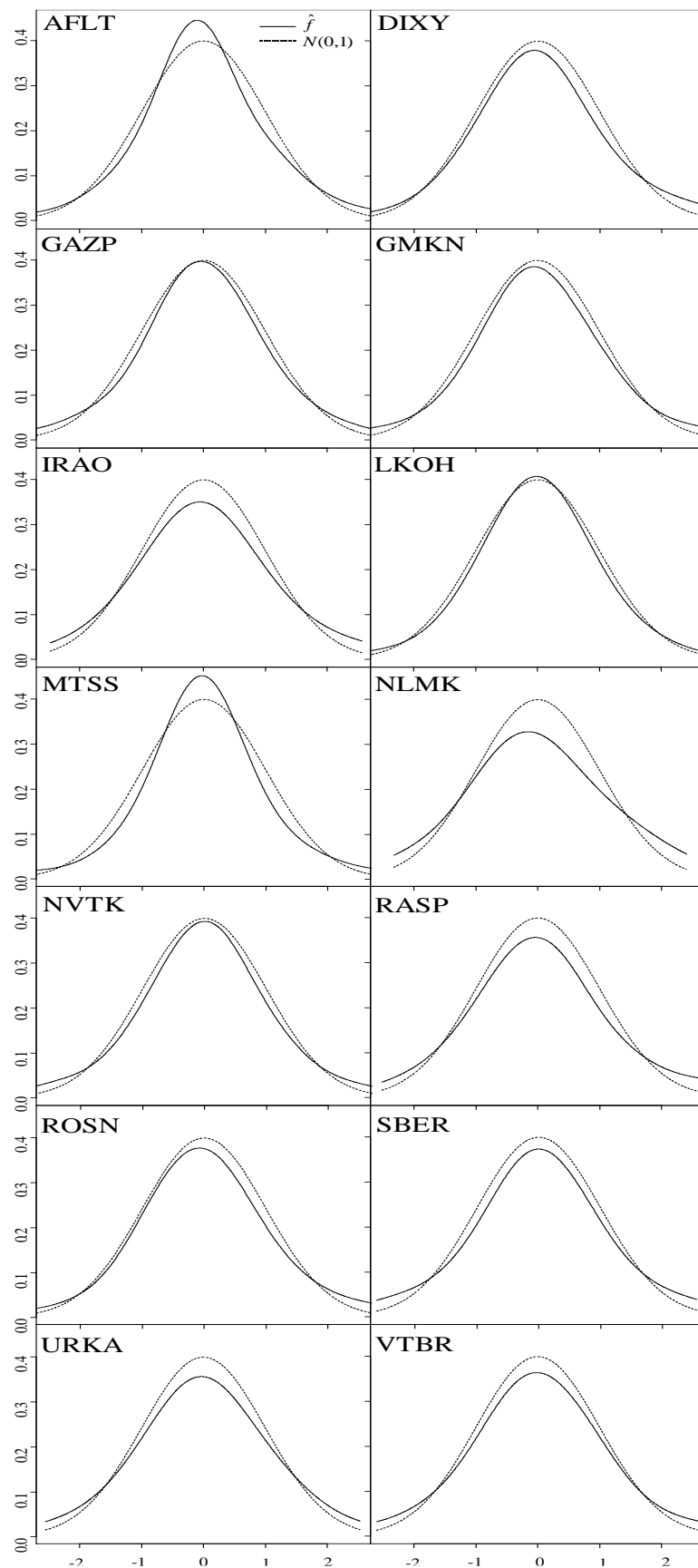
	NLMK	NVTK	RASP	ROSN	SBER	URKA	VTBR
β_0	0,12 (0,01)	0,08 (0,01)	0,28 (0,07)	0,06 (0,02)	0,08 (0,02)	0,08 (0,14)	0,12 (0,22)
β_1	0,09 (0,02)	0,08 (0,02)	0,16 (0,03)	0,07 (0,02)	0,11 (0,02)	0,08 (0,06)	0,11 (0,06)
β_2	0,90 (0,01)	0,91 (0,01)	0,84 (0,02)	0,92 (0,02)	0,89 (0,02)	0,92 (0,03)	0,89 (0,06)
ν	6,49 (0,63)	5,11 (1,19)	3,60 (0,38)	5,83 (0,93)	5,28 (1,41)	3,94 (0,40)	4,88 (0,54)

Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия. В скобках приведены стандартные ошибки. Жирным показана значимость на 5% уровне.

На Рис. 2.1 также заметно, что для различных акций характерны примерно одни и те же периоды высокой волатильности. Это может означать наличие динамических связей между волатильностями доходностей различных акций. Для описания динамики условной ковариационной матрицы доходностей в разделе 2.4, как и в главе 1, используется известная многомерная GARCH модель, которая позволяет учесть индивидуальную кластеризацию волатильности и динамические связи между волатильностями доходностей различных акций.

Как упоминалось в главе 1, маргинальное распределение финансовых доходностей может иметь тяжелые хвосты, во-первых, в силу переменной волатильности, которую можно наблюдать на Рис. 2.1, и во-вторых, за счет тяжелых хвостов условного распределения. В оцененных GARCH(1,1) моделях с t -распределением оценки параметров степеней свободы достаточно малы, и соответственно условные распределения доходностей рассматриваемых акций имеют тяжелые хвосты. При этом число степеней свободы существенно разнится от акции к акции, то есть условные распределения доходностей акций имеют разную толщину хвостов.

Рис. 2.2 Стандартизированные непараметрические оценки условных распределений доходностей акций при $r_{t-1} = 0$



Различные характеристики условных распределений доходностей, в том числе и толщину их хвостов, можно определить на основе непараметрических оценок одномерных условных функций плотности. С помощью процедуры построения непараметрических оценок, описанной в разделе 1.3, для всех 14 рассматриваемых акций были вычислены функции $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$ – оценки условных функций плотности распределения доходностей при условии $r_{t-1}=0$, то есть при нулевой доходности в предыдущий день.

На Рис. 2.2 представлено сравнение центрированных и нормированных функций $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$ с функцией плотности стандартного нормального распределения, а в Таблице 2.8 приведены оценки среднего, стандартного отклонения, асимметрии и эксцесса, вычисленные по функциям $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$. Оценка эксцесса отрицательна для некоторых акций, то есть толщина хвостов условного распределения их доходностей меньше, чем у нормального распределения. На Рис. 2.2 величина условного эксцесса проявляется в степени “пиковости” функций $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$ по сравнению с функциями плотности стандартного нормального распределения. Эта “пиковость” и соответствующие оценки эксцесса в Таблице 2.8 существенно разнятся от акции к акции, что также указывает на различия в толщине хвостов условных распределений доходностей.

Таблица 2.8 Оценки параметров условного распределения доходностей акций при $r_{t-1} = 0$

	AFLT	DIXY	GAZP	GMKN	IRAO	LKOH	MTSS
Среднее	-0,01	0,08	0,04	0,06	-0,08	0,01	0,11
Стд. откл.	1,71	1,85	1,82	1,81	1,98	1,63	1,55
Асимметрия	0,12	0,09	-0,01	0,01	0,07	0,00	0,03
Эксцесс	0,26	0,03	0,07	0,10	-0,16	0,24	0,82

	NLMK	NVTK	RASP	ROSN	SBER	URKA	VTBR
Среднее	-0,08	-0,02	-0,11	0,02	0,07	0,03	-0,01
Стд. откл.	2,11	1,81	1,94	1,81	1,93	1,96	1,92
Асимметрия	0,09	0,00	0,09	0,11	-0,03	0,01	0,00
Эксцесс	-0,32	0,10	-0,04	0,08	-0,04	-0,18	-0,10

Желательно, чтобы различия в “весе” хвостов одномерных маргинальных распределений доходностей акций учитывались при построении многомерных моделей. В разделе 2.4 эти различия учитываются в модели, построенной на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы.

2.4 Модели и результаты оценивания

Из рассматриваемых 14 акций российских компаний были сформированы наборы, состоящие из 10 акций. Наборы различаются составом в части наиболее ликвидных акций (оценки ликвидности портала <http://stocks.investfunds.ru>, см. Таблицу 2.1). Имеется 4 отрасли с наибольшей ликвидностью: нефтяная, газовая, металлургическая и банковская, для каждой из которых рассматриваются 2 варианта наиболее ликвидных акций, а для остальных 6 отраслей – один вариант, что дает 16 различных наборов.

Полученные наборы сначала были упорядочены по убыванию количества входящих в них высоколиквидных акций, а затем наборы, в которых количество ликвидных акций оказалось одинаковым, были дополнительно упорядочены по убыванию суммарной капитализации компаний-эмитентов. Таким образом, в целом построенные наборы были упорядочены по убыванию степени соответствия входящих в них акций понятию «голубые фишки», то есть по убыванию размера

эмитентов и их «популярности» на фондовом рынке. Такое упорядочивание удобно, поскольку позволяет сравнивать эффективность использования той или иной модели при составлении портфелей из более ликвидных и менее ликвидных акций. Упорядоченные наборы акций представлены в Таблице 2.9. В рассматриваемых ниже моделях порядок акций в векторе доходностей для каждого набора соответствует порядку в Таблице 2.9, где отрасли расположены по убыванию ликвидности относящихся к ним акций. Это позволяет выявить возможные зависимости оценок параметров, относящихся к той или иной акции, от уровня ее ликвидности.

Таблица 2.9 Наборы акций для составления портфелей

Набор №	1	2	3	4	5	6	7	8
1 Нефть	ROSN	LKOH	ROSN	LKOH	ROSN	LKOH	ROSN	ROSN
2 Банки	SBER	SBER	VTBR	VTBR	SBER	SBER	VTBR	SBER
3 Газ	GAZP	GAZP	GAZP	GAZP	GAZP	GAZP	GAZP	NVTK
4 Металлы	GMKN	GMKN	GMKN	GMKN	NLMK	NLMK	NLMK	GMKN
Набор №	9	10	11	12	13	14	15	16
1 Нефть	LKOH	LKOH	ROSN	LKOH	ROSN	LKOH	ROSN	LKOH
2 Банки	VTBR	SBER	VTBR	VTBR	SBER	SBER	VTBR	VTBR
3 Газ	GAZP	NVTK	NVTK	NVTK	NVTK	NVTK	NVTK	NVTK
4 Металлы	NLMK	GMKN	GMKN	GMKN	NLMK	NLMK	NLMK	NLMK

Фиксированные составляющие портфелей: 5 Удобрения URKA, 6 Связь MTSS, 7 Энергетика IRAO, 8 Транспорт AFLT, 9 Уголь RASP, 10 Ритейл DIXY.

Жирным выделены высоколиквидные акции, согласно <http://stocks.investfunds.ru>

Для каждого из наборов акций, представленных в Таблице 2.9, рассмотрены две модели вектора доходностей: модель на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, включающая как частный случай модель со скаляром степеней свободы, и модель на основе многомерного нормального распределения.

Как и в главе 1, вектор условных ожиданий доходностей акций $E_{t-1}(r_t) = \mu_t$ определяется одинаково вне зависимости от типа распределения и его уравнение соответствует модели VAR(1):

$$\mu_t = c + Qr_{t-1} \quad (2.1)$$

где c и Q – произвольные $d \times 1$ вектор и $d \times d$ матрица соответственно (для оцениваемых моделей $d = 10$). Как было упомянуто в предыдущем разделе, лагированная доходность одной акции может иметь статистически значимое влияние на текущую доходность другой акции из-за сложившихся на рынке приоритетов и типичного поведения инвесторов в той или иной ситуации. Для учета такого влияния в модель вводится матрица Q .

Вектор шоков доходностей акций определяется как $\varepsilon_t = r_t - E_{t-1}(r_t) = r_t - c - Qr_{t-1}$, и уравнение динамики его условной ковариационной матрицы $H_t = V_{t-1}(\varepsilon_t)$, как и в главе 1, задано одинаковым вне зависимости от типа распределения. Используется достаточно популярная в эконометрической литературе DCC-GARCH(1,1)³¹ модель, в которой динамика условных дисперсий и корреляций моделируется по отдельности. Условная ковариационная матрица H_t разложена в произведение диагональных матриц условных стандартных отклонений $D_t = \text{diag}\{\sigma_{t,1}, \dots, \sigma_{t,d}\}$ и условной корреляционной матрицы R_t следующим образом:

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (2.2)$$

Для каждой условной дисперсии задана стандартная GARCH(1,1) динамика, то есть

$$\sigma_{t,i}^2 = \omega_i + \alpha_i \varepsilon_{t-1,i} + \beta_i \sigma_{t-1,i}^2 \quad i = 1, \dots, d \quad (2.3)$$

³¹ Dynamic conditional correlation, модель, предложенная в работе (Engle, 2002). Пример применения данной модели к эмпирическому анализу финансовых рынков приведен в работе (Колоколов, 2011).

Предполагается, что некоторая положительно определенная матрица Q_t изменяется в соответствии с уравнением

$$Q_t = (1 - a - b)S + a\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + bQ_{t-1} \quad (2.4)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $a + b < 1$, S – матрица безусловных корреляций вектора шоков ε_t и стартовая матрица Q_0 положительно определена. Матрица Q_t положительно определена в каждый момент времени, но не является корреляционной матрицей. Условная корреляционная матрица R_t получается нормированием матрицы Q_t по формуле

$$R_t = \text{diag}\{Q_{t,11}^{-1/2}, \dots, Q_{t,dd}^{-1/2}\} Q_t \text{diag}\{Q_{t,11}^{-1/2}, \dots, Q_{t,dd}^{-1/2}\} \quad (2.5)$$

Отметим, что в классической DCC-GARCH модели в уравнении (2.4) используются не исходные шоки $\varepsilon_{t,i}$, а их нормированные версии $\eta_{t,i} = \varepsilon_{t,i} / \sigma_{t,i}$. Однако деление шоков на стандартные отклонения существенно увеличивает нелинейность модели по параметрам, что значительно затрудняет оценку многомерных моделей, рассматриваемых данным в разделе. По этой причине в используемой в настоящей главе DCC-GARCH модели в уравнении (2.4) задействованы именно ненормированные шоки $\varepsilon_{t,i}$. Это упрощение несущественно влияет на характер модели, поскольку матрица Q_t в любом случае нормируется по формуле (2.5). При переходе от нормированных к ненормированным шокам меняется лишь порядок оценки параметра a .

В модели DCC-GARCH, так же, как и в модели BEKK, рассмотренной в главе 1, матрица H_t положительно определена в любой момент времени t , что упрощает процедуру оценивания параметров. Кроме того, модель DCC-GARCH учитывает возможность изменения условных корреляций доходностей во времени, но при этом имеет относительно немного параметров по

сравнению с другими многомерными GARCH моделями, в которых H_t всегда положительно определена (см. (Silvennoinen, Terasvirta, 2008)).

В предположении, что вектор условных средних следует динамике VAR(1), а условная ковариационная матрица – динамике DCC-GARCH(1,1), рассматриваются модели, основанные на многомерном нормальном распределении и многомерном t -распределении с вектором степеней свободы, включающем как частный случай классическое t -распределение со скаляром степеней свободы.

Для модели с многомерным нормальным распределением условная функция плотности распределения вектора доходностей имеет стандартный вид:

$$f_{t-1}(r_t) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} |H_t|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(r_t - \mu_t)' H_t^{-1}(r_t - \mu_t)\right) \quad (2.6)$$

где μ_t и H_t определяются формулами (2.1) и (2.2) – (2.5) соответственно.

Данная модель учитывает автокорреляцию, динамические связи между доходностями, кластеризацию волатильностей, а также связи между волатильностями для различных акций. Однако использование нормального распределения не позволяет учесть наличие тяжелых хвостов у одномерных маргинальных распределений доходностей, что является существенным ограничением. В данной главе модель на основе нормального распределения рассматривается в качестве базовой простой спецификации, с которой удобно сравнивать модели на основе t -распределения со скаляром и вектором степеней свободы, учитывающие наличие тяжелых хвостов.

Для модели на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, предложенного в работе (Шведов, 2009), условная

функция плотности распределения вектора доходностей запишется следующим образом (см. определение в разделе 3.2):

$$f_{t-1}(r_t) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(\kappa)}{\Gamma_d^*(\nu)} |A_t|^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2} (r_t - \mu_t)^{[d-j]'} (A_t^{[d-j]})^{-1} (r_t - \mu_t)^{[d-j]} \right)^{\kappa_j - \kappa_{j+1}} \quad (2.7)$$

где для вектора степеней свободы $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)'$ и вектора $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_d)'$ выполнено

$$\nu_j > \frac{j-1}{2}, \quad \kappa_j = \nu_j + \frac{1}{2}, \quad j = 1, \dots, d$$

$$\nu_0 = \kappa_0 = 0, \quad \nu_{d+1} = \kappa_{d+1} = \frac{d+1}{2}$$

A_t – некоторая положительно определенная $d \times d$ матрица, многомерная гамма-функция $\Gamma_d^*(\cdot)$ определяется через одномерную $\Gamma(\cdot)$ как

$$\Gamma_d^*(\nu) = \pi^{\frac{d(d-1)}{4}} \prod_{j=1}^d \Gamma\left(\nu_j - \frac{j-1}{2}\right)$$

и $(r_t - \mu_t)^{[d-j]}$ обозначает вектор из первых $[d-j]$ компонент вектора $r_t - \mu_t$, а $A_t^{[d-j]}$ – матрицу из первых $[d-j]$ строк и столбцов матрицы A_t .

Модель на основе t -распределения со скалярным параметром степеней свободы получается из модели с вектором степеней свободы введением ограничения $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_d$. Как уже упоминалось в главе 1 и разделе 2.2, многомерное t -распределение с вектором степеней свободы дает больше гибкости для учета различий в распределениях доходностей акций, чем распределение со скаляром степеней свободы, поскольку появляется возможность моделировать эксцесс распределения отдельно для каждой акции.

Для вычисления функции правдоподобия на основе формул (2.1) – (2.5) и функции плотности (2.7) требуется перейти от матрицы H_t к

матрице A_t . Аналогично тому, как это сделано в главе 1, представим вектор r_t в виде $r_t = \mu_t + P_t \eta$ (см. (Шведов, 2010)), где P_t – нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами такая, что $P_t P_t' = A_t$, а вектор η имеет функцию плотности (2.7) с параметрами $\mu_t = 0$, $A_t = I_d$ и тем же вектором ν , что и для r_t . Как показано в главе 3 и работе (Балаев, 2012), ковариационная матрица $V(\eta)$ существует при $\nu_j > \frac{j+1}{2}$, $j=1, \dots, d$ и

$$V(\eta) = \text{diag} \left\{ \frac{2}{2a_{d-j+1} - d + j - 2} \prod_{i=d-j+2}^d \frac{2a_i - i}{2a_i - i - 1}, j=1, \dots, d \right\}$$

Если необходимые ограничения на ν выполнены, условная ковариационная матрица H_t запишется в виде

$$V_{t-1}(r_t) = H_t = P_t V(\eta) P_t'$$

Представив ковариационную матрицу в виде $H_t = U_t U_t'$, где U_t – нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами (U_t может быть вычислена для произвольной размерности d с помощью алгоритма разложения Холецкого), получим

$$P_t = U_t \text{diag} \left\{ \sqrt{\frac{2a_{d-j+1} - d + j - 2}{2}} \prod_{i=d-j+2}^d \sqrt{\frac{2a_i - i - 1}{2a_i - i}}, j=1, \dots, d \right\}$$

что позволяет вычислить матрицу $A_t = P_t P_t'$.

Альтернативный подход заключается в задании динамики матрицы A_t напрямую. При этом можно было бы использовать формулы, аналогичные (2.2) – (2.5). Однако для корректного сравнения с моделью на основе многомерного нормального распределения необходимо, чтобы динамике вида DCC-GARCH(1,1) следовала именно матрица H_t , а не A_t .

Для каждого из 16 наборов акций, представленных в Таблице 2.9, были оценены 10-мерные модели VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) для вектора r_t с нормальным распределением, t -распределением со скаляром степеней свободы и t -распределением с вектором степеней свободы. Оценивание производилось методом максимального квазиправдоподобия на основе функций плотности (2.6) и (2.7) с использованием первых 760 наблюдений в выборке.

Многомерное нормальное распределение удобно для применения метода максимального квазиправдоподобия, и при его использовании проблем с оцениванием параметров, как правило, не возникает. Однако этого нельзя сказать о многомерном t -распределении. Как упоминалось в главе 1, максимизация функции правдоподобия для многомерного t -распределения по всем аргументам, включая степени свободы, сопряжена с вычислительными проблемами. По этой причине при оценке моделей в главе 1 параметры степеней свободы фиксировались перед максимизацией функции правдоподобия. Однако в настоящей главе применение такого подхода к модели с векторным параметром степеней свободы наталкивается на проблему предварительного выбора индивидуального числа степеней свободы для каждой акции. На данный момент в литературе не предложен принцип предварительного подбора вектора степеней свободы для применения метода максимального квазиправдоподобия. Поэтому, чтобы избежать произвола при оценке моделей, в настоящей главе векторный параметр степеней свободы все же включается в состав аргументов максимизации функции правдоподобия. Кроме того, для обеспечения равноправия при сравнении оцененных моделей скалярный параметр степеней свободы также приходится включать в состав аргументов оптимизации.

Учет наличия динамических связей, автокорреляций, а также перекрестных корреляций между доходностями 10 акций приводит к большому числу параметров в рассматриваемых VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) моделях. В модели с нормальным распределением, основанной на функции плотности (2.6), имеется 187 параметров, а в моделях с t -распределением со скаляром и вектором степеней свободы, основанных на функции плотности (2.7), – 188 и 197 параметров соответственно. Такое количество параметров осложняет оценивание моделей и требует аккуратного подбора стартовых значений параметров для адекватной сходимости оптимизационных процедур. Стартовые значения для вектора c и матрицы Q подбирались на основе результатов оценки 10-мерных моделей VAR(1) для каждого из 16 наборов акций, для векторов ω , α , β и параметров степеней свободы ν – на основе оценок параметров одномерных GARCH(1,1) моделей с t -распределением для каждой акции, для матрицы S – на основе оценки безусловной корреляционной матрицы доходностей. Для a и b в уравнении (2.4) стартовые значения выбирались вручную.

В Таблицах 2.10 – 2.12 представлены оценки параметров VAR(1)-DCC-GARCH(1,1)³² моделей с нормальным распределением, t -распределением со скаляром степеней свободы и t -распределением с вектором степеней свободы для набора акций №1. Результаты оценивания моделей для остальных наборов качественно схожи с результатами для набора №1 (см. приложение главы 2). Полученные оценки показывают, что рассматриваемые модели адекватно учитывают эмпирические свойства данных, отмеченные в разделе 2.3.

³² Автором были опробованы и более сложные известные многомерные GARCH модели (в том числе ВЕКК), содержащие до 300 – 400 параметров. Однако в силу небольшой выборки в 760 наблюдений, такие модели демонстрировали плохую сходимость, и было решено остановиться на спецификации DCC-GARCH(1,1).

Статистически значимых положительных или отрицательных трендов в ценах акций набора 1 не прослеживается: большинство компонент вектора c незначимы. Значимые динамические связи между доходностями, наблюдавшиеся в 14-мерной модели VAR(1) в разделе 2.3, присутствуют и в полученных более сложных моделях: в матрице Q имеются как положительные так и отрицательные значимые элементы, которые отражают сложившуюся на рынке типичную реакцию инвесторов на рост цен тех или иных акций.

Кластеризация волатильностей в модели учтена за счет значимых и близких к 1 компонент вектора β , а оценка матрицы S близка к безусловной корреляционной матрице доходностей, приведенной в разделе 2.3. Наконец, достаточно низкие значения оценок параметров степеней свободы ν указывают на наличие тяжелых хвостов у маргинальных распределений доходностей акций. При этом они существенно различаются в случае вектора степеней свободы, а следовательно толщина хвостов разнится от акции к акции.

Высокое значение оценки b говорит о том, что если корреляции доходностей большинства акций в наборе выросли в какой-то момент, их высокие значения сохраняются еще достаточно продолжительное время. Данное свойство согласуется с интуитивным представлением о влиянии новостей на фондовые рынки. Одновременное повышение корреляций доходностей многих акций часто происходит при выходе новостей долгосрочного характера, например, макроэкономических данных, и поэтому влияние таких новостей на корреляции доходностей сохраняется в течение некоторого продолжительного периода после их выхода. Оценка параметра a значима, но имеет значительно меньший порядок, чем оценка b вследствие того, что в уравнении (2.4) используются ненормированные шоки $\varepsilon_{i,t}$.

Таблица 2.10 Оценки параметров модели VAR(1)-DCC-GARCH(1,1)
с нормальным распределением для набора акций №1

	c			ROSN	SBER	GAZP	GMKN	URKA	MTSS	IRAO	AFLT	RASP	DIXY
	Q												
ROSN	0,07 (0,08)			0,04 (0,08)	-0,02 (0,06)	0,03 (0,09)	-0,03 (0,06)	0,04 (0,05)	-0,02 (0,13)	-0,08 (0,04)	-0,07 (0,07)	0,01 (0,04)	0,00 (0,04)
SBER	0,10 (0,09)			-0,05 (0,09)	0,16 (0,07)	-0,06 (0,09)	0,02 (0,07)	0,03 (0,06)	-0,12 (0,13)	-0,05 (0,04)	-0,02 (0,08)	-0,05 (0,05)	0,05 (0,04)
GAZP	0,07 (0,08)			-0,03 (0,07)	-0,05 (0,06)	0,18 (0,08)	0,00 (0,06)	0,01 (0,05)	-0,07 (0,11)	-0,07 (0,04)	-0,07 (0,06)	-0,02 (0,04)	0,03 (0,04)
GMKN	0,16 (0,08)			-0,06 (0,08)	0,01 (0,07)	0,06 (0,09)	0,05 (0,07)	0,06 (0,05)	0,03 (0,10)	-0,06 (0,04)	-0,04 (0,08)	0,00 (0,04)	0,00 (0,04)
URKA	0,20 (0,11)			0,08 (0,10)	-0,08 (0,08)	0,12 (0,11)	-0,08 (0,08)	0,10 (0,06)	-0,02 (0,15)	-0,14 (0,05)	-0,07 (0,08)	-0,03 (0,05)	0,04 (0,05)
MTSS	0,05 (0,05)			-0,01 (0,05)	0,08 (0,05)	-0,07 (0,05)	-0,04 (0,04)	0,02 (0,03)	-0,02 (0,09)	-0,04 (0,03)	-0,02 (0,05)	0,01 (0,03)	0,02 (0,03)
IRAO	0,04 (0,10)			-0,04 (0,11)	0,18 (0,09)	-0,14 (0,09)	0,07 (0,07)	0,01 (0,07)	-0,14 (0,12)	0,10 (0,06)	-0,17 (0,08)	0,08 (0,05)	-0,01 (0,07)
AFLT	0,03 (0,08)			-0,08 (0,06)	0,01 (0,04)	0,03 (0,06)	-0,02 (0,04)	0,04 (0,03)	-0,02 (0,06)	0,00 (0,02)	0,05 (0,06)	0,02 (0,03)	0,01 (0,03)
RASP	0,15 (0,10)			-0,11 (0,09)	-0,02 (0,08)	0,13 (0,09)	-0,02 (0,08)	0,05 (0,05)	0,05 (0,11)	-0,09 (0,04)	0,03 (0,08)	0,14 (0,05)	0,03 (0,06)
DIXY	0,06 (0,08)			0,07 (0,07)	0,12 (0,05)	-0,05 (0,06)	-0,13 (0,05)	-0,02 (0,03)	-0,11 (0,08)	-0,05 (0,03)	-0,01 (0,05)	0,13 (0,04)	0,11 (0,05)
	ω	α	β	S									
ROSN	0,24 (0,08)	0,08 (0,02)	0,89 (0,03)	1									
SBER	0,33 (0,13)	0,10 (0,03)	0,87 (0,04)	0,75 (0,02)	1								
GAZP	0,23 (0,06)	0,08 (0,02)	0,88 (0,02)	0,81 (0,02)	0,75 (0,02)	1							
GMKN	0,21 (0,13)	0,09 (0,04)	0,89 (0,05)	0,69 (0,03)	0,64 (0,03)	0,68 (0,03)	1						
URKA	0,17 (0,10)	0,06 (0,02)	0,93 (0,03)	0,57 (0,04)	0,54 (0,03)	0,56 (0,04)	0,55 (0,04)	1					
MTSS	0,04 (0,02)	0,06 (0,01)	0,93 (0,02)	0,61 (0,03)	0,67 (0,03)	0,64 (0,03)	0,53 (0,03)	0,50 (0,04)	1				
IRAO	0,14 (0,08)	0,07 (0,02)	0,92 (0,02)	0,42 (0,05)	0,48 (0,05)	0,42 (0,06)	0,35 (0,05)	0,29 (0,04)	0,41 (0,05)	1			
AFLT	2,52 (1,06)	0,38 (0,15)	0,25 (0,25)	0,46 (0,04)	0,51 (0,04)	0,50 (0,04)	0,41 (0,04)	0,42 (0,04)	0,45 (0,04)	0,32 (0,05)	1		
RASP	0,59 (0,23)	0,16 (0,06)	0,80 (0,06)	0,54 (0,04)	0,53 (0,04)	0,57 (0,04)	0,52 (0,04)	0,47 (0,04)	0,49 (0,04)	0,35 (0,05)	0,37 (0,04)	1	
DIXY	0,24 (0,11)	0,20 (0,06)	0,81 (0,04)	0,39 (0,05)	0,36 (0,05)	0,39 (0,05)	0,37 (0,04)	0,31 (0,04)	0,34 (0,05)	0,26 (0,06)	0,31 (0,05)	0,32 (0,05)	1
	a		b										
	0,0007 (0,0002)		0,90 (0,04)										

Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия.

В скобках приведены стандартные ошибки.

Жирным показана значимость на 5% уровне.

Таблица 2.11 Оценки параметров модели VAR(1)-DCC-GARCH(1,1)
с *t*-распределением со скаляром степеней свободы для набора акций №1

	<i>c</i>			ROSN	SBER	GAZP	GMKN	URKA	MTSS	IRAO	AFLT	RASP	DIXY									
	<i>Q</i>																					
ROSN	-0,06 (0,09)			0,04 (0,07)	-0,06 (0,07)	0,05 (0,07)	-0,02 (0,05)	0,05 (0,04)	-0,03 (0,08)	-0,05 (0,03)	-0,05 (0,06)	0,00 (0,04)	-0,01 (0,04)									
SBER	0,02 (0,10)			-0,09 (0,07)	0,08 (0,08)	-0,05 (0,07)	0,03 (0,06)	0,07 (0,04)	-0,13 (0,09)	-0,03 (0,03)	0,00 (0,07)	-0,06 (0,04)	0,03 (0,03)									
GAZP	0,00 (0,09)			-0,06 (0,06)	-0,07 (0,06)	0,18 (0,06)	-0,01 (0,05)	0,03 (0,03)	-0,07 (0,07)	-0,05 (0,03)	-0,04 (0,06)	-0,03 (0,03)	0,03 (0,03)									
GMKN	0,06 (0,08)			-0,11 (0,07)	0,00 (0,08)	0,08 (0,08)	0,04 (0,06)	0,08 (0,04)	-0,02 (0,09)	-0,04 (0,04)	-0,01 (0,06)	-0,02 (0,04)	0,00 (0,03)									
URKA	0,10 (0,10)			0,03 (0,08)	-0,07 (0,08)	0,05 (0,09)	-0,03 (0,07)	0,10 (0,05)	-0,05 (0,10)	-0,11 (0,04)	-0,04 (0,07)	-0,04 (0,05)	0,04 (0,04)									
MTSS	0,01 (0,05)			-0,01 (0,06)	0,04 (0,05)	-0,04 (0,05)	-0,03 (0,04)	0,02 (0,03)	-0,07 (0,05)	-0,02 (0,03)	-0,01 (0,05)	0,00 (0,02)	0,01 (0,02)									
IRAO	-0,01 (0,12)			-0,09 (0,09)	0,09 (0,07)	-0,06 (0,07)	0,06 (0,07)	0,01 (0,05)	-0,17 (0,08)	0,11 (0,05)	-0,06 (0,08)	0,03 (0,05)	-0,04 (0,03)									
AFLT	0,00 (0,08)			-0,12 (0,06)	0,01 (0,05)	0,05 (0,06)	0,00 (0,04)	0,07 (0,03)	-0,03 (0,05)	0,00 (0,02)	0,05 (0,05)	0,00 (0,03)	-0,01 (0,03)									
RASP	0,03 (0,10)			-0,12 (0,07)	-0,03 (0,07)	0,14 (0,07)	-0,01 (0,07)	0,06 (0,04)	-0,05 (0,09)	-0,06 (0,03)	0,04 (0,06)	0,10 (0,04)	0,01 (0,05)									
DIXY	0,05 (0,08)			0,04 (0,06)	0,07 (0,05)	-0,06 (0,06)	-0,05 (0,04)	-0,02 (0,03)	-0,11 (0,07)	-0,04 (0,03)	0,01 (0,05)	0,11 (0,04)	0,04 (0,05)									
	<i>ω</i>	<i>α</i>	<i>β</i>	<i>S</i>																		
ROSN	0,28 (0,11)	0,06 (0,03)	0,90 (0,03)	1																		
SBER	0,54 (0,18)	0,10 (0,03)	0,85 (0,04)	0,73 (0,02)	1																	
GAZP	0,35 (0,10)	0,07 (0,02)	0,88 (0,03)	0,79 (0,02)	0,73 (0,02)	1																
GMKN	0,32 (0,14)	0,09 (0,03)	0,87 (0,04)	0,68 (0,03)	0,62 (0,03)	0,68 (0,03)	1															
URKA	0,30 (0,14)	0,06 (0,02)	0,91 (0,03)	0,52 (0,03)	0,49 (0,03)	0,50 (0,03)	0,50 (0,04)	1														
MTSS	0,05 (0,02)	0,05 (0,01)	0,93 (0,02)	0,60 (0,03)	0,63 (0,03)	0,62 (0,03)	0,51 (0,03)	0,46 (0,04)	1													
IRAO	1,35 (0,74)	0,27 (0,14)	0,65 (0,15)	0,46 (0,04)	0,51 (0,04)	0,46 (0,04)	0,37 (0,04)	0,29 (0,04)	0,43 (0,04)	1												
AFLT	2,77 (2,76)	0,31 (0,25)	0,28 (0,60)	0,44 (0,04)	0,49 (0,04)	0,49 (0,03)	0,39 (0,04)	0,39 (0,04)	0,43 (0,04)	0,36 (0,04)	1											
RASP	0,59 (0,21)	0,13 (0,04)	0,82 (0,04)	0,52 (0,03)	0,51 (0,03)	0,53 (0,03)	0,49 (0,03)	0,40 (0,04)	0,44 (0,04)	0,37 (0,04)	0,36 (0,04)	1										
DIXY	0,50 (0,29)	0,25 (0,09)	0,73 (0,10)	0,37 (0,04)	0,33 (0,04)	0,34 (0,04)	0,34 (0,04)	0,28 (0,04)	0,30 (0,04)	0,23 (0,04)	0,24 (0,04)	0,27 (0,04)	1									
	<i>a</i>		<i>b</i>		<i>v</i>																	
	0,0006 (0,0003)		0,93 (0,04)		7,46 (0,25)																	

Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия.

В скобках приведены стандартные ошибки.

Жирным показана значимость на 5% уровне.

Таблица 2.12 Оценки параметров модели VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) с *t*-распределением с вектором степеней свободы для набора акций №1

	<i>c</i>			ROSN	SBER	GAZP	GMKN	URKA	MTSS	IRAO	AFLT	RASP	DIXY
	<i>Q</i>												
ROSN	-0,06 (0,08)			0,04 (0,06)	-0,06 (0,06)	0,05 (0,07)	-0,03 (0,05)	0,04 (0,03)	-0,01 (0,07)	-0,07 (0,03)	-0,05 (0,04)	0,00 (0,04)	-0,01 (0,04)
SBER	0,03 (0,09)			-0,09 (0,07)	0,08 (0,07)	-0,05 (0,08)	0,02 (0,06)	0,06 (0,03)	-0,10 (0,07)	-0,04 (0,04)	0,00 (0,05)	-0,06 (0,05)	0,03 (0,03)
GAZP	-0,02 (0,08)			-0,06 (0,06)	-0,08 (0,05)	0,20 (0,07)	-0,01 (0,05)	0,02 (0,03)	-0,05 (0,06)	-0,06 (0,03)	-0,04 (0,04)	-0,03 (0,03)	0,02 (0,03)
GMKN	0,06 (0,08)			-0,08 (0,06)	-0,01 (0,08)	0,09 (0,08)	0,04 (0,06)	0,06 (0,03)	-0,01 (0,07)	-0,05 (0,04)	-0,01 (0,05)	-0,02 (0,04)	0,00 (0,04)
URKA	0,09 (0,10)			0,04 (0,08)	-0,08 (0,07)	0,07 (0,10)	-0,04 (0,07)	0,09 (0,04)	-0,03 (0,09)	-0,12 (0,04)	-0,04 (0,06)	-0,04 (0,05)	0,03 (0,04)
MTSS	0,00 (0,05)			0,00 (0,04)	0,03 (0,04)	-0,05 (0,05)	-0,03 (0,04)	0,02 (0,02)	-0,05 (0,05)	-0,03 (0,03)	0,00 (0,03)	0,00 (0,02)	0,00 (0,02)
IRAO	-0,07 (0,08)			-0,07 (0,07)	0,09 (0,06)	-0,06 (0,07)	0,05 (0,06)	0,01 (0,03)	-0,15 (0,07)	0,09 (0,05)	-0,05 (0,06)	0,01 (0,05)	-0,04 (0,03)
AFLT	-0,07 (0,07)			-0,12 (0,05)	0,01 (0,05)	0,05 (0,06)	0,01 (0,04)	0,06 (0,02)	-0,03 (0,05)	-0,01 (0,02)	0,04 (0,05)	0,00 (0,03)	0,00 (0,04)
RASP	-0,07 (0,09)			-0,09 (0,07)	0,00 (0,07)	0,12 (0,08)	-0,02 (0,07)	0,05 (0,04)	-0,05 (0,08)	-0,07 (0,03)	0,02 (0,06)	0,09 (0,05)	0,01 (0,05)
DIXY	0,02 (0,07)			0,06 (0,05)	0,04 (0,04)	-0,06 (0,06)	-0,05 (0,04)	-0,03 (0,03)	-0,03 (0,07)	-0,06 (0,03)	0,02 (0,05)	0,09 (0,04)	0,02 (0,05)
	<i>ω</i>	<i>α</i>	<i>β</i>	<i>S</i>									
ROSN	0,26 (0,10)	0,05 (0,02)	0,91 (0,03)	1									
SBER	0,48 (0,17)	0,09 (0,03)	0,85 (0,04)	0,75 (0,02)	1								
GAZP	0,31 (0,08)	0,07 (0,02)	0,88 (0,02)	0,80 (0,02)	0,75 (0,02)	1							
GMKN	0,23 (0,10)	0,07 (0,03)	0,90 (0,03)	0,70 (0,02)	0,64 (0,03)	0,70 (0,02)	1						
URKA	0,28 (0,13)	0,05 (0,02)	0,92 (0,03)	0,55 (0,03)	0,52 (0,03)	0,53 (0,03)	0,51 (0,03)	1					
MTSS	0,05 (0,02)	0,05 (0,01)	0,93 (0,02)	0,60 (0,03)	0,64 (0,03)	0,63 (0,03)	0,51 (0,03)	0,47 (0,03)	1				
IRAO	1,35 (0,55)	0,30 (0,11)	0,63 (0,10)	0,44 (0,04)	0,49 (0,04)	0,45 (0,04)	0,37 (0,04)	0,29 (0,04)	0,42 (0,04)	1			
AFLT	2,25 (0,99)	0,28 (0,11)	0,41 (0,21)	0,42 (0,04)	0,45 (0,04)	0,46 (0,03)	0,38 (0,04)	0,37 (0,03)	0,40 (0,04)	0,34 (0,04)	1		
RASP	0,71 (0,29)	0,15 (0,04)	0,82 (0,05)	0,47 (0,04)	0,47 (0,04)	0,48 (0,04)	0,43 (0,04)	0,36 (0,04)	0,40 (0,04)	0,32 (0,04)	0,31 (0,04)	1	
DIXY	1,89 (1,64)	0,59 (0,32)	0,55 (0,24)	0,26 (0,04)	0,22 (0,04)	0,23 (0,04)	0,23 (0,04)	0,19 (0,04)	0,19 (0,04)	0,16 (0,04)	0,17 (0,04)	0,18 (0,04)	1
	<i>a</i>	<i>b</i>		<i>v</i>									
	0,0005 (0,0002)	0,91 (0,03)		1,52 (0,20)	2,53 (0,29)	3,80 (0,46)	4,11 (0,34)	5,83 (0,61)	7,05 (0,90)	9,65 (1,49)	9,45 (1,49)	9,85 (1,17)	7,43 (0,33)

Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия.

В скобках приведены стандартные ошибки.

Жирным показана значимость на 5% уровне.

2.5 Оптимизация портфелей

Основы современной портфельной теории заложены в фундаментальных работах (Markowitz, 1959) и (Sharpe, 1970). Обозначим через $w_t = (w_{1t}, w_{2t}, \dots, w_{N_t})'$ вектор долей акций в момент времени t в финансовом портфеле, который необходимо оптимизировать тем или иным образом в момент времени $t-1$. По определению, для данного вектора всегда выполнено $t'w_t = 1$, где $t = (1, 1, \dots, 1)'$. Положительные компоненты вектора w_t соответствуют длинным позициям по тем или иным акциям, а отрицательные компоненты – коротким позициям.

Отметим, что для рассматриваемых в данной главе российских акций существуют определенные ограничения на короткие продажи, которые затрудняют составление тех или иных финансовых портфелей. В настоящей диссертации эта проблема не рассматривается и возможные ограничения на короткие продажи при составлении портфелей игнорируются. Рассматриваемые 14 акций являются одними из наиболее ликвидных на российском фондовом рынке, и ограничения на их короткие продажи не являются жесткими. Тем не менее, полученные в главе выводы из сравнительного анализа показателей портфелей, оптимизированных в рамках различных моделей, верны в той степени, в которой ограничения на короткие продажи не препятствуют составлению этих портфелей.

Для вектора условных ожиданий доходностей и их условной ковариационной матрицы по-прежнему используются обозначения μ_t и H_t соответственно. В моделях, рассматриваемых в данной главе μ_t и H_t определяются формулами (2.1) – (2.5). Информации о μ_t и H_t достаточно для составления портфелей двух типов: портфеля с

минимальной дисперсией доходности при наличии ограничений на ожидаемую доходность, в частности, портфеля с минимальной дисперсией без ограничений, и портфеля с максимальным ожиданием доходности при наличии ограничений на дисперсию доходности. Эти портфели удобны тем, что при оптимизации вектор весов акций в них может быть найден аналитически.

При оптимизации финансового портфеля инвестор может исходить из своих предпочтений относительно желательного уровня доходности портфеля. Пусть \bar{r} – минимальный приемлемый уровень ожидаемой доходности портфеля, установленный инвестором. Наиболее естественной задачей для такого инвестора является нахождение портфеля с минимальной дисперсией доходности среди портфелей с ожидаемой доходностью не ниже \bar{r} . Таким образом, требуется минимизировать дисперсию портфеля:

$$w_t' H_t w_t \Rightarrow \min_{w_t}$$

при ограничениях

$$1' w_t = 1$$

$$\mu_t' w_t \geq \bar{r}$$

Применяя теорему Куна – Таккера, нетрудно убедиться что решение данной задачи условной оптимизации выглядит следующим образом:

$$w_t^{CMV} = \frac{H_t^{-1} \left((\mu_t' H_t^{-1} \mu_t - \bar{r} \mu_t' H_t^{-1} 1) 1 + (\bar{r} 1' H_t^{-1} 1 - \mu_t' H_t^{-1} 1) \mu_t \right)}{1' H_t^{-1} \left((\mu_t' H_t^{-1} \mu_t - \bar{r} \mu_t' H_t^{-1} 1) 1 + (\bar{r} 1' H_t^{-1} 1 - \mu_t' H_t^{-1} 1) \mu_t \right)} \quad (2.8)$$

где аббревиатура CMV, которая в данной главе используется для обозначения портфелей этого типа, означает «conditional minimum variance».

Важным частным случаем этой задачи является минимизация дисперсии доходности портфеля без ограничения на уровень

ожидаемой доходности. Устранение ограничения $\mu'_t w_t \geq \bar{r}$ приводит к решению следующего вида:

$$w_t^{AMV} = \frac{H_t^{-1} \iota}{\iota' H_t^{-1} \iota} \quad (2.9)$$

где AMV означает «absolute minimum variance».

У инвестора могут быть также некоторые предпочтения относительно допустимой волатильности доходности формируемого портфеля. Обозначим через \bar{v} установленный инвестором максимальный допустимый уровень дисперсии доходности портфеля. Искомым портфелем в этом случае естественно считать портфель с максимальной ожидаемой доходностью среди портфелей с дисперсией доходности не выше \bar{v} . Это означает, что оптимизация портфеля проводится путем решения следующей задачи максимизации:

$$\mu'_t w_t \Rightarrow \max_{w_t}$$

при ограничениях

$$\iota' w_t = 1$$

$$w_t' H_t w_t \leq \bar{v}$$

Данная задача также может быть решена с помощью теоремы Куна – Таккера, но ее решение имеет несколько более громоздкий вид, чем решение задачи условной минимизации дисперсии, в силу наличия нелинейного ограничения. Вектор весов акций в оптимизированном портфеле данного типа имеет следующий вид:

$$w_t^{CME} = \frac{H_t^{-1} \left((\iota' H_t^{-1} \iota)^{-1} \left(\left(\frac{\mu'_t H_t^{-1} \mu_t - (\mu'_t H_t^{-1} \iota)^2 (\iota' H_t^{-1} \iota)^{-1}}{\bar{v} - (\iota' H_t^{-1} \iota)^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} - \mu'_t H_t^{-1} \iota \right) \iota + \mu_t \right)}{\iota' H_t^{-1} \left((\iota' H_t^{-1} \iota)^{-1} \left(\left(\frac{\mu'_t H_t^{-1} \mu_t - (\mu'_t H_t^{-1} \iota)^2 (\iota' H_t^{-1} \iota)^{-1}}{\bar{v} - (\iota' H_t^{-1} \iota)^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} - \mu'_t H_t^{-1} \iota \right) \iota + \mu_t \right)} \quad (2.10)$$

где СМЕ – аббревиатура для «conditional maximum expectation».

Перед тем как проводить оптимизацию портфелей для моделей из раздела 2.4, рассмотрим пример построения эффективного фронта портфелей на основе выборочных средних и ковариаций доходностей. В Таблицах 2.13 и 2.14 представлены средние значения, стандартные отклонения и корреляции доходностей акций набора №1, вычисленные по первым 760 наблюдениям, на которых производилась оценка моделей из раздела 2.4. Используя эти величины в формулах (2.8) и (2.10), получим оптимизированные портфели на основе «безусловных» средних и ковариаций. Далее варьируя параметры \bar{r} и \bar{v} , построим множество эффективных портфелей на плоскости $(Var(R), E(R))$, где R – доходность портфеля. Полученная граница эффективных портфелей изображена на Рис. 2.3.

Граница эффективных портфелей на Рис. 2.3 полностью описывается как CMV, так и СМЕ портфелями. При этом нижняя ветвь границы эффективных портфелей, которая на Рис. 2.3 опущена, целиком лежит в области с отрицательной ожидаемой доходностью и поэтому является нерелевантной на практике, поскольку для любого портфеля нижней ветви можно найти портфель на верхней ветви, имеющий ту же дисперсию, но большее ожидание доходности. Таким образом, в данном случае эффективные портфели совпадают с СМЕ портфелями, поскольку в них максимизируется ожидаемая доходность.

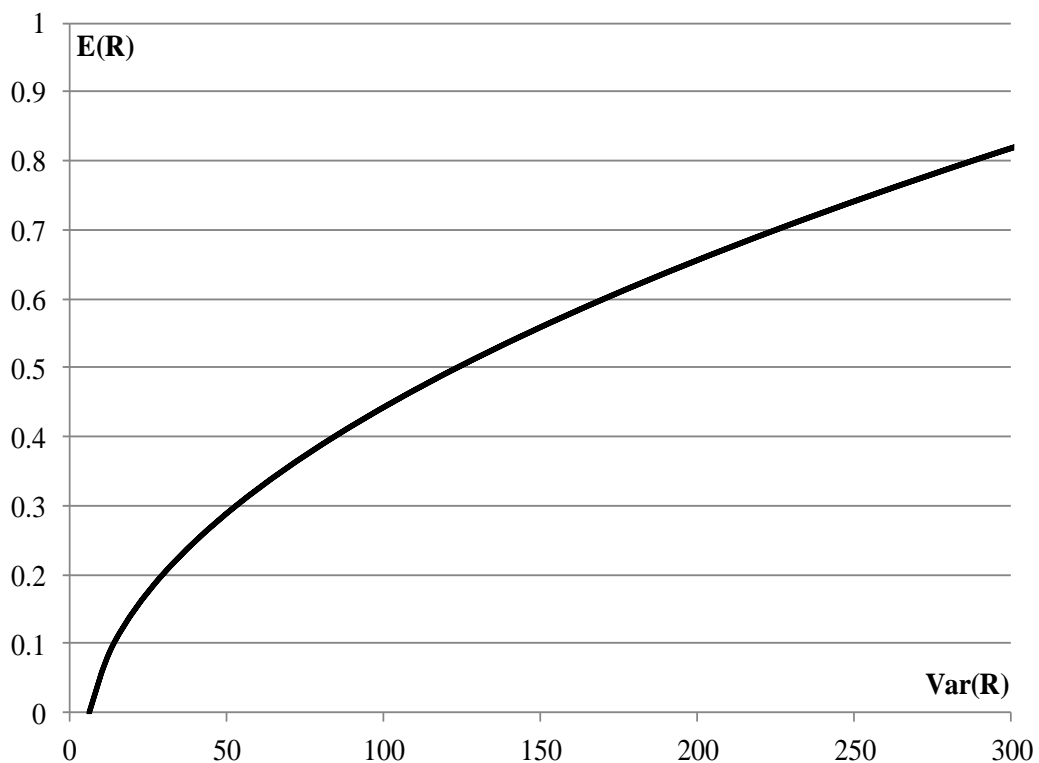
Таблица 2.13 Средние и стандартные отклонения доходностей для набора акций № 1

	AFLT	GMKN	DIXY	GAZP	IRAO	MTSS	RASP	ROSN	SBER	URKA
Среднее	-0,04	0,00	-0,08	0,02	-0,03	-0,04	0,07	-0,05	-0,07	-0,02
Стд.откл.	4,02	4,50	3,64	3,94	5,33	3,30	6,23	2,74	4,28	4,64

Таблица 2.14 Корреляции доходностей для набора акций № 1

	AFLT	GMKN	DIXY	GAZP	IRAO	MTSS	RASP	ROSN	SBER	URKA
AFLT	1									
GMKN	0,81	1								
DIXY	0,87	0,81	1							
GAZP	0,71	0,66	0,72	1						
IRAO	0,65	0,58	0,64	0,51	1					
MTSS	0,75	0,78	0,77	0,61	0,60	1				
RASP	0,47	0,47	0,44	0,29	0,32	0,45	1			
ROSN	0,44	0,46	0,46	0,36	0,37	0,38	0,28	1		
SBER	0,61	0,59	0,65	0,56	0,52	0,61	0,35	0,32	1	
URKA	0,23	0,25	0,25	0,24	0,23	0,23	0,19	0,19	0,18	1

Рис. 2.3 Множество эффективных портфелей для набора акций №1 на основе выборочных средних и ковариаций доходностей



Построенное множество эффективных портфелей позволяет оценить риски³³ стратегии, направленной на обеспечение того или

³³ В данном случае под риском понимается стандартное отклонение общей доходности портфеля, которое является одномерной величиной. Для более полной характеристики риска портфеля могут использоваться многомерные величины. См., например, (Крицкий, Ульянова, 2007).

иного уровня доходности портфеля. В данном случае они достаточно высоки даже для небольшой требуемой доходности. Так, если инвестор задал в качестве ориентира ожидаемую доходность 0,1% в день, портфель с минимальной волатильностью будет иметь стандартное отклонение дневной доходности 3,7%. При ориентире на ожидаемую доходность 0,2% в день, минимальная волатильность составит уже 5,4%, а при ориентире 0,5% она достигнет 11,1%.

Как было сказано в разделе 2.4, для каждого из 16 рассматриваемых наборов акций были оценены VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) модели с нормальным распределением, t -распределением со скаляром степеней свободы и t -распределением с вектором степеней свободы. На основе каждой из полученных 48 моделей были построены прогнозы динамики вектора условных средних μ_t и условной ковариационной матрицы H_t на период с августа 2011 г. по февраль 2013 г. (последние 379 наблюдений в выборке). Далее с помощью полученных рядов μ_t и H_t по формулам (2.8) – (2.10) определялись веса акций в портфелях, оптимизированных по схемам AMV, CMV и CME. В качестве параметров для ограничений использовались $\bar{r} = 0,5$ и $\bar{v} = 50$. На основе вычисленных весов рассчитывались фактические доходности оптимизированных портфелей. По полученным рядам фактических доходностей для всех портфелей были рассчитаны средние значения и стандартные отклонения, которые приведены в Таблице 2.15. На Рис. 2.4 – 2.6 изображена динамика стоимости AMV, CMV и CME портфелей для наборов акций №1, 8 и 16, которые имеют соответственно высокий, средний и относительно низкий уровень ликвидности.

Таблица 2.15 Средние значения и стандартные отклонения доходностей

AMV, CMV и CME портфелей при $\bar{r} = 0,5$, $\bar{v} = 50$

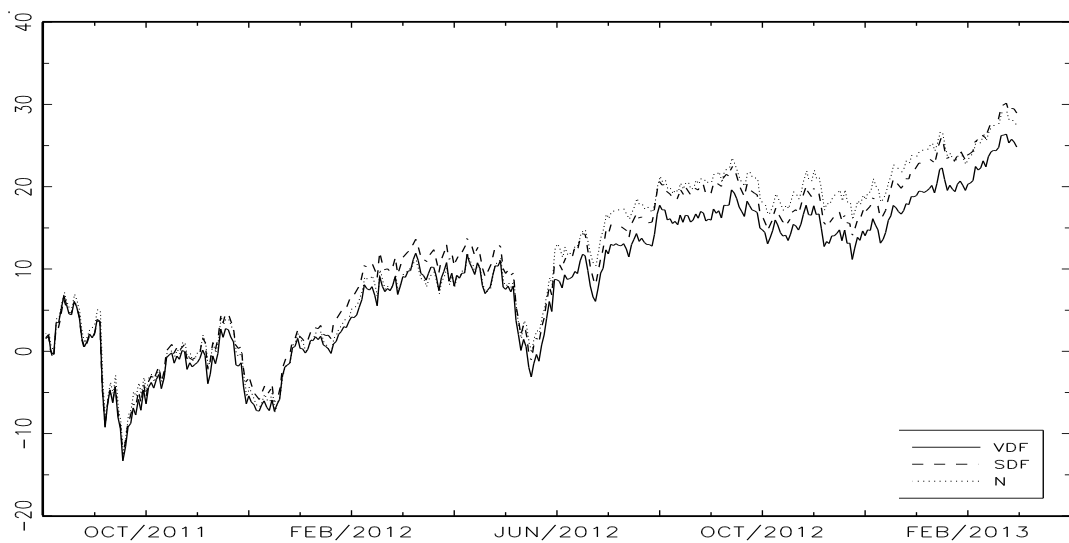
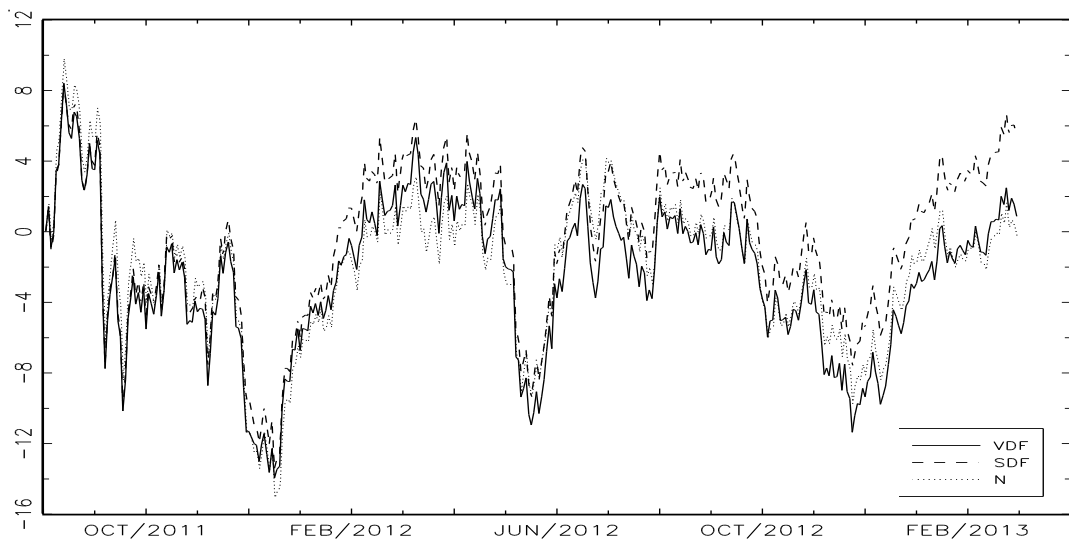
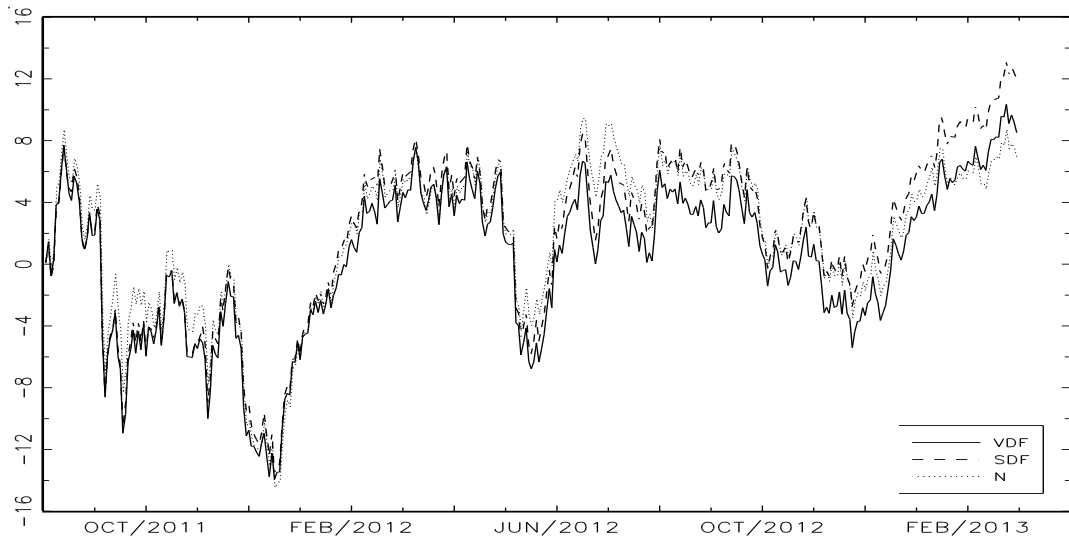
	VDF	SDF	N	VDF	SDF	N	VDF	SDF	N	VDF	SDF	N
№ набора акций	1			2			3			4		
AMV \bar{R}	0,02	0,03	0,02	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,05	0,08	0,08	0,08
$\hat{\sigma}_R$	1,34	1,34	1,32	1,28	1,28	1,26	1,37	1,37	1,35	1,32	1,32	1,30
CMV \bar{R}	0,18	0,15	0,10	0,23	0,19	0,15	0,28	0,24	0,19	0,28	0,24	0,22
$\hat{\sigma}_R$	2,03	1,93	1,73	1,91	1,80	1,66	2,02	1,98	1,68	1,87	1,84	1,60
CME \bar{R}	0,98	0,95	0,96	0,89	0,87	0,94	1,29	1,29	1,34	1,06	1,08	1,24
$\hat{\sigma}_R$	6,00	5,93	6,41	5,98	5,97	6,42	5,69	5,89	6,23	5,72	5,88	6,29
№ набора акций	5			6			7			8		
AMV \bar{R}	0,04	0,05	0,04	0,06	0,07	0,07	0,06	0,07	0,07	0,00	0,01	0,00
$\hat{\sigma}_R$	1,36	1,36	1,33	1,28	1,29	1,28	1,37	1,38	1,35	1,34	1,34	1,32
CMV \bar{R}	0,23	0,20	0,17	0,27	0,22	0,19	0,34	0,26	0,23	0,09	0,08	0,08
$\hat{\sigma}_R$	2,00	1,94	1,73	1,87	1,73	1,62	1,98	1,89	1,67	2,02	1,86	1,64
CME \bar{R}	1,12	1,07	1,10	1,02	0,97	1,05	1,42	1,30	1,42	0,57	0,59	0,70
$\hat{\sigma}_R$	5,92	6,09	6,50	5,75	5,84	6,18	5,49	5,81	6,15	6,30	6,12	6,28
№ набора акций	9			10			11			12		
AMV \bar{R}	0,09	0,09	0,09	0,02	0,03	0,02	0,03	0,04	0,03	0,05	0,06	0,06
$\hat{\sigma}_R$	1,30	1,32	1,29	1,27	1,27	1,26	1,37	1,37	1,35	1,31	1,31	1,30
CMV \bar{R}	0,30	0,25	0,24	0,06	0,07	0,07	0,18	0,18	0,18	0,14	0,15	0,16
$\hat{\sigma}_R$	1,89	1,79	1,59	1,94	1,77	1,65	2,00	1,94	1,64	1,85	1,84	1,59
CME \bar{R}	1,17	1,11	1,28	0,26	0,38	0,50	0,93	1,02	1,20	0,55	0,71	0,88
$\hat{\sigma}_R$	5,49	5,76	6,13	6,04	5,94	6,28	5,91	6,02	6,11	5,76	5,84	6,07
№ набора акций	13			14			15			16		
AMV \bar{R}	0,02	0,04	0,02	0,04	0,05	0,04	0,05	0,06	0,06	0,07	0,08	0,07
$\hat{\sigma}_R$	1,36	1,36	1,34	1,27	1,27	1,26	1,37	1,38	1,35	1,29	1,30	1,28
CMV \bar{R}	0,14	0,13	0,14	0,12	0,13	0,11	0,22	0,20	0,23	0,16	0,17	0,17
$\hat{\sigma}_R$	1,99	1,88	1,65	1,90	1,79	1,61	1,94	1,85	1,65	1,85	1,79	1,56
CME \bar{R}	0,60	0,67	0,76	0,43	0,53	0,56	0,92	0,95	1,20	0,65	0,77	0,88
$\hat{\sigma}_R$	6,18	6,17	6,29	5,92	5,93	6,18	5,62	5,88	6,10	5,64	5,81	6,08

Обозначения моделей: VDF – t -распределение с вектором степеней свободы, SDF – t -распределение со скаляром степеней свободы, N – нормальное распределение

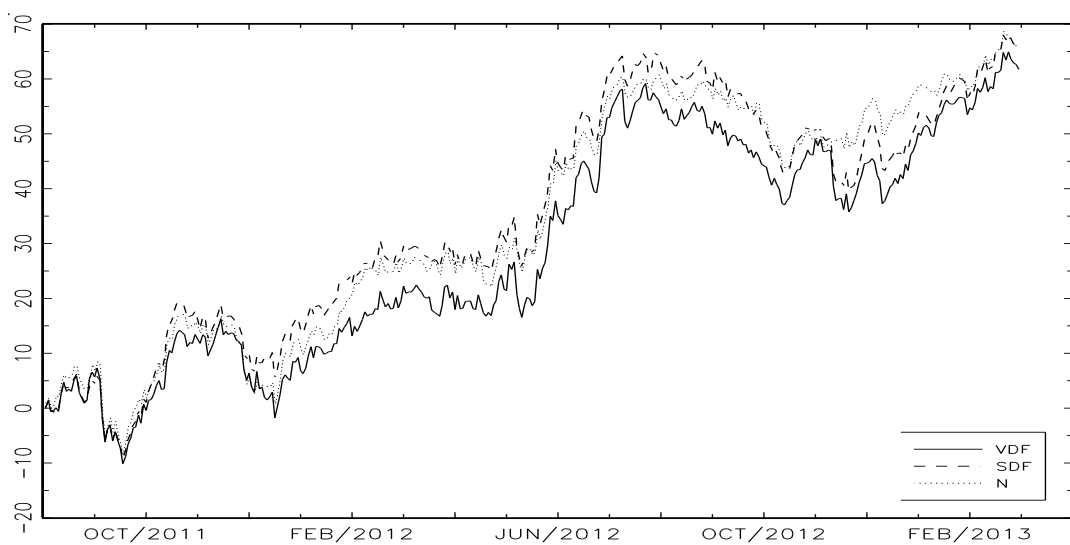
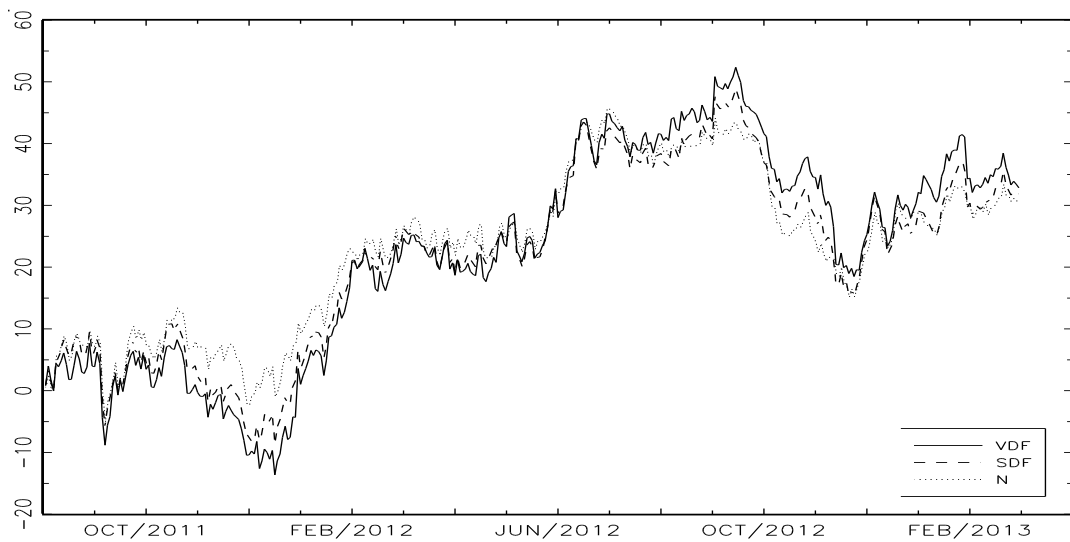
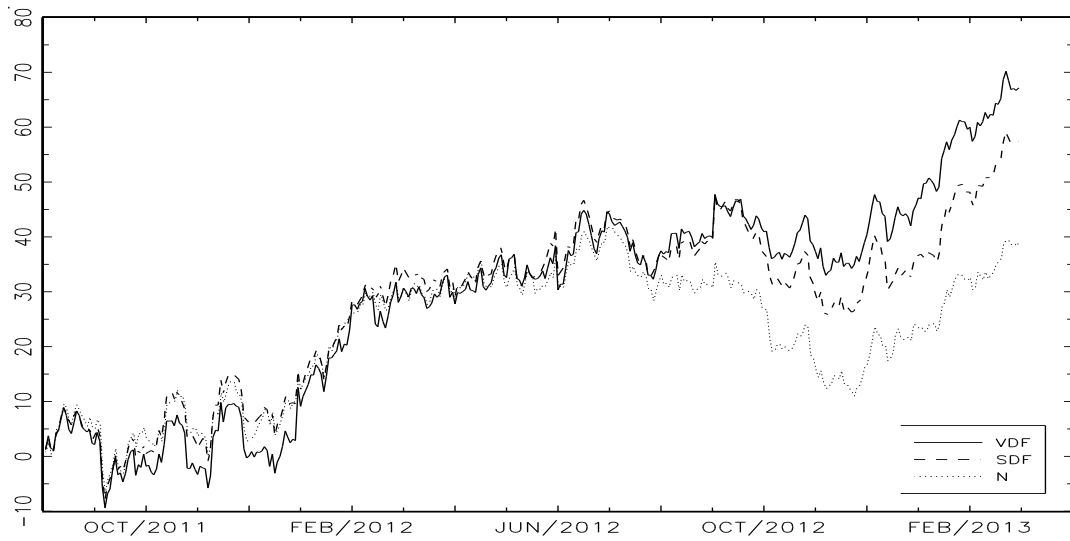
Обозначения портфелей: AMV – минимум дисперсии, CMV – минимум дисперсии при ожидании не ниже \bar{r} , CME – максимум ожидания при дисперсии не выше \bar{v} .

Серым выделены: наибольшая среди N, SDF и VDF фактическая средняя доходность \bar{R} и наименьшее фактическое стандартное отклонение $\hat{\sigma}_R$.

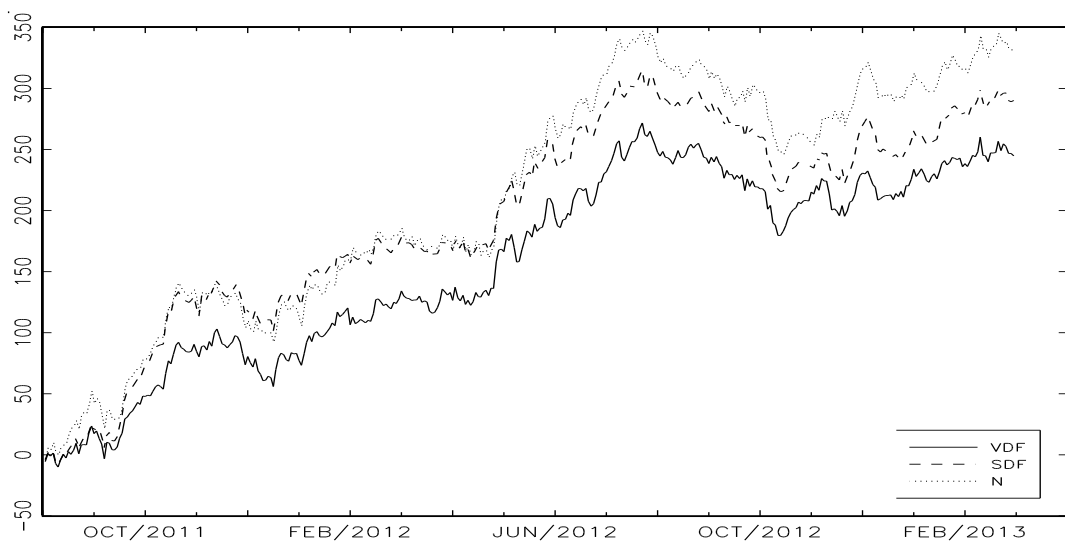
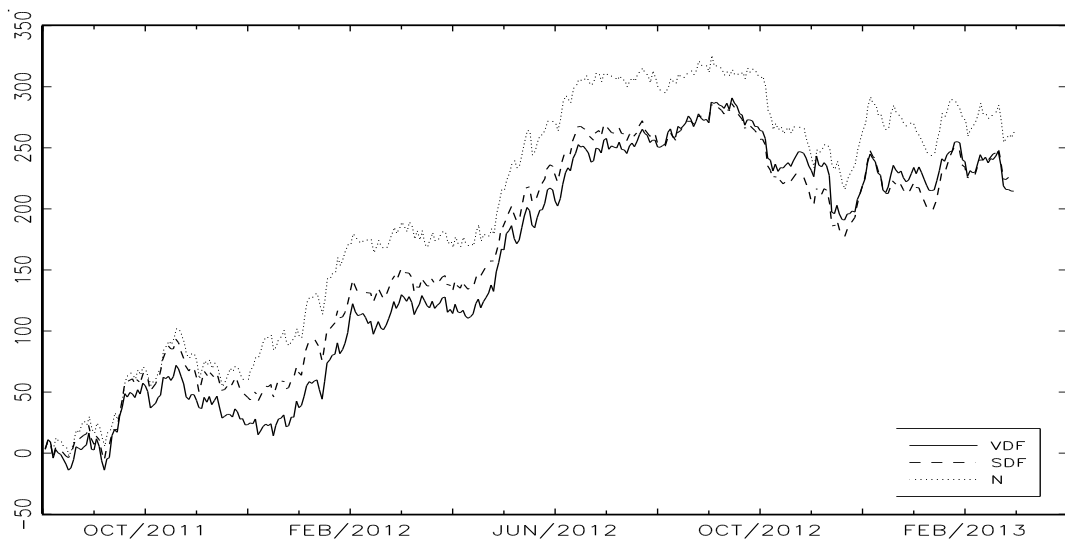
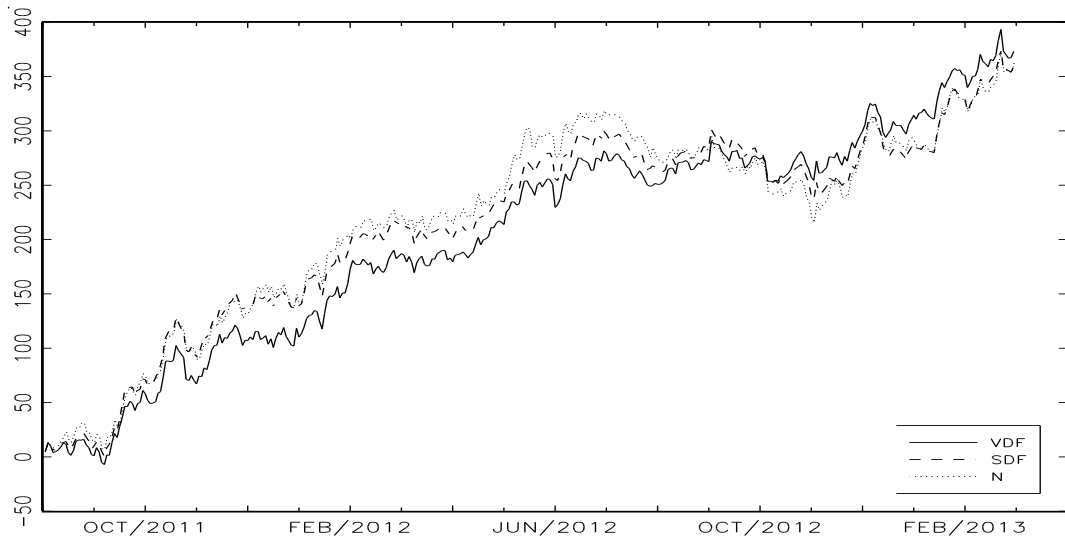
**Рис 2.4 Накопленная доходность AMV портфелей для наборов
акций № 1, 8, 16, %**



**Рис 2.5 Накопленная доходность CMV портфелей для наборов
акций № 1, 8, 16, %**



**Рис 2.6 Накопленная доходность СМЕ портфелей для наборов
акций № 1, 8, 16, %**



Согласно Таблице 2.15, для AMV портфелей модели на основе нормального распределения и t -распределений со скаляром и вектором степеней свободы показывают примерно одинаковые результаты. Средние доходности AMV портфелей для этих моделей различаются в большинстве случаев не более чем на 0,02 процентных пункта (далее – п.п.), а стандартные отклонения – не более чем на 0,03 п.п. Таким образом, ни одна из моделей не имеет явных преимуществ по сравнению с другими в задаче абсолютной минимизации дисперсии доходности портфеля.

Для CMV портфелей минимальная фактическая дисперсия достигается в модели с нормальным распределением. Стандартное отклонение в этой модели оказывается ниже, чем в модели на основе t -распределения со скаляром степеней свободы, на 0,1 – 0,3 п.п., и ниже, чем в модели с вектором степеней свободы, на 0,3 – 0,4 п.п. Примечательно, что для всех CMV портфелей учет наличия тяжелых хвостов увеличивает фактическую дисперсию доходности оптимизированного портфеля, а учет различий в тяжести хвостов для различных акций увеличивает ее дополнительно. Однако t -распределение с вектором степеней свободы дает хорошие результаты с точки зрения фактической средней доходности CMV портфелей. Для большинства CMV портфелей, составленных для наборов акций с высокой ликвидностью (наборы 1 – 9) средняя доходность для модели на основе t -распределения с вектором степеней свободы выше, чем в модели со скаляром степеней свободы, на 0,03 – 0,08 п.п. и выше, чем в модели с нормальным распределением, на 0,06 – 0,11 п.п. Для наборов из менее ликвидных акций лидера среди моделей не наблюдается: средние значения доходностей для моделей с нормальным распределением и t -распределениями различаются не более чем на 0,02 п.п.

Для СМЕ портфелей по фактической средней доходности лидирует модель на основе нормального распределения. Средняя доходность большинства СМЕ портфелей для нее превосходит средние доходности для моделей на основе t -распределений со скаляром и вектором степеней свободы на 0,1 – 0,3 п.п. При этом для большинства портфелей с наименее ликвидными наборами акций (наборы 10 – 16) t -распределение с вектором степеней свободы уступает по средней доходности t -распределению со скаляром степеней свободы. Таким образом, учет различий в толщине хвостов для различных акций в данном случае снижает среднюю результативность торговли. Однако для СМЕ портфелей модель на основе t -распределения с вектором степеней свободы дает, как правило, наименьшее фактическое стандартное отклонение: в большинстве портфелей оно оказывается меньшим, чем в модели со скаляром степеней свободы на 0,1 – 0,3 п.п., и ниже, чем в модели с нормальным распределением на 0,2 – 0,7 п.п. Для данных портфелей волатильность снижается как за счет учета наличия тяжелых хвостов, так и за счет учета различия в их толщине для различных акций.

На Рис. 2.4 траектории стоимости AMV портфелей в моделях с нормальным распределением и t -распределениями достаточно близки в силу близости средних и стандартных отклонений доходностей этих портфелей, причем это наблюдается вне зависимости от уровня ликвидности набора акций. На Рис 2.5 для ликвидного набора акций №1 видно, что стоимость CMV портфеля, построенного по модели на основе t -распределения с вектором степеней свободы, превышает стоимость портфелей, построенных на основе других моделей начиная с осени 2012 г. К февралю 2013 г. разница в стоимости портфеля с моделью со скаляром степеней свободы составляет 10%. Для других ликвидных наборов акций эта разница в стоимости CMV

портфелей достигает к февралю 2013 г. 20 – 30%. На Рис. 2.6 стоимость СМЕ портфеля №1 для модели с нормальным распределением выше на большей части периода, что наблюдается и для большинства остальных СМЕ портфелей. Нормальное распределение может превосходить t -распределение для рассматриваемых данных, поскольку условное распределение доходностей многих акций близко к нормальному, как показывает Рис. 2.2. В частности, толщина хвостов условного распределения доходностей невелика.

2.6 Выводы

В данной главе сопоставлялись некоторые многомерные модели финансовых доходностей, и рассматривалось их применение к формированию портфелей из акций российских компаний. В качестве основы для моделей были взяты нормальное распределение, t -распределение со скалярным числом степеней свободы и t -распределение с вектором степеней свободы. На основе построенных моделей были составлены финансовые портфели трех типов: портфель с минимальной дисперсией (AMV), портфель с минимальной дисперсией при ограничении снизу на ожидаемую доходность (CMV) и портфель с максимальной ожидаемой доходностью при ограничении сверху на дисперсию (СМЕ).

В результате сравнительного анализа составленных портфелей были сделаны следующие выводы. Во-первых, в задаче безусловной минимизации дисперсии доходности портфеля ни одно из рассмотренных распределений не может считаться предпочтительным по сравнению с другими, поскольку динамика стоимости AMV портфелей для построенных моделей оказалась достаточно близкой.

Во-вторых, в рамках задачи минимизации дисперсии с заданной минимальной ожидаемой доходностью наилучшие результаты дают многомерное нормальное распределение и многомерное t -распределение с вектором степеней свободы. Нормальное распределение обеспечивает минимальную фактическую волатильность для всех CMV портфелей, а t -распределение с вектором степеней свободы – максимальную фактическую среднюю доходность для наиболее ликвидных CMV портфелей. Наконец, в-третьих, в задаче максимизации ожидаемой доходности с заданной максимальной дисперсией лидируют также нормальное распределение и t -распределение с вектором степеней свободы. Максимум фактической средней доходности для СМЕ портфелей обеспечивает нормальное распределение, а минимум фактической волатильности для большинства таких портфелей – t -распределение с вектором степеней свободы.

В задачах, рассматриваемых в главе 2, многомерное t -распределение не обладает столь заметным преимуществом перед многомерным нормальным распределением, как в задачах, рассматриваемых в главе 1. Можно высказать предположение, что это связано с относительной неразвитостью российского фондового рынка.

Глава 3. Теоретические свойства многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, используемые при составлении портфелей ценных бумаг

3.1 Постановка задачи

Задачей данной главы является вывод некоторых теоретических свойств многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, которое использовалось в моделях доходностей мировых фондовых индексов в главе 1 и в моделях доходностей российских акций в главе 2.³⁴ Классическое многомерное t -распределение со скаляром степеней свободы хорошо изучено, и его теория подробно рассмотрена, например, в книге (Kotz, Nadarajah, 2004). В то же время t -распределение с вектором степеней свободы является новым, и его теория еще недостаточно развита. В настоящей главе выведена общая формула и условия существования моментов данного распределения, а также формулы его одномерных маргинальных функций плотности и характеристических функций. Все полученные формулы проиллюстрированы примерами. В данной главе также предложен алгоритм симулирования многомерного t -распределения с вектором степеней свободы. Кроме того, построен возможный алгоритм выбора расположения активов в векторе доходностей, имеющем многомерное t -распределение с вектором степеней свободы.

Глава 3 имеет следующую структуру. Раздел 3.2 содержит определение многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, его стандартизованную форму и вывод формулы смешанного момента общего вида с условиями существования. В разделах 3.3 и 3.4 выведены одномерные маргинальные функции

³⁴ Результаты главы 3 представлены в работе (Балаев, 2012).

плотности и характеристические функции. В разделе 3.5 рассмотрен пример 3-мерного t -распределения с вектором степеней свободы с иллюстрацией маргинальных распределений и формулами моментов 1-го и 2-го порядков. В разделе 3.6 предложен алгоритм симулирования многомерного t -распределения с вектором степеней свободы. Раздел 3.7 содержит алгоритм выбора расположения активов в векторе доходностей, который моделируется с помощью многомерного t -распределения с вектором степеней свободы. Наконец, в разделе 3.8 приведены выводы данной главы.

3.2 Стандартизованная форма и моменты

В разделе 2.4 уже приводилось определение многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, предложенного в работе (Шведов, 2009). Однако для удобства построения доказательств в данной главе приведем его еще раз. Примем следующие обозначения.

Для матрицы $M = \{m_{ij}\}$, $1 \leq i, j \leq d$ и $k = 1, \dots, d$ обозначим подматрицы $M^{[k]} = \{m_{ij}\}$, $1 \leq i, j \leq k$ и $M_{[k]} = \{m_{ij}\}$, $d - k + 1 \leq i, j \leq d$.

Пусть $\mu \in \mathbb{R}^d$ и A – положительно определенная $d \times d$ матрица.

Для вектора $a = (a_1, \dots, a_d)'$ предполагаем $a_j > \frac{j-1}{2}$, $j = 1, \dots, d$. Также

положим $a_0 = 0$ и $a_{d+1} = \frac{d+1}{2}$. Обозначим $b = (b_1, \dots, b_d)'$, такой что

$b_j = a_j + \frac{1}{2}$, $j = 1, \dots, d$. Пусть также $b_0 = 0$ и $b_{d+1} = \frac{d+1}{2}$.

Многомерная гамма-функция определяется следующим образом

$$\Gamma_d^*(a) = \pi^{\frac{d(d-1)}{4}} \prod_{j=1}^d \Gamma\left(a_j - \frac{j-1}{2}\right)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Определение 1. Случайный вектор $X \in \mathbb{R}^d$ имеет многомерное t -распределение с вектором степеней свободы с параметрами μ , a , A , если его функция плотности имеет вид

$$f_X(x) = C |A|^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2} (x - \mu)^{[d-j]'} (A^{[d-j]})^{-1} (x - \mu)^{[d-j]} \right)^{b_j - b_{j+1}}$$

где

$$C = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} \quad (3.1)$$

Приведем данное распределение к стандартизованной форме. Положим $Z = P^{-1}(X - \mu)$, где $d \times d$ матрица P – нижняя треугольная и $A = PP'$. В работе (Шведов, 2010) показано, что $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d)'$ имеет t -распределение с вектором степеней свободы с параметрами $\mu = 0$ и $A = I_d$, то есть имеет функцию плотности

$$f_Z(z) = C \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{d-j}^2 \right)^{b_j - b_{j+1}} \quad (3.2)$$

Поскольку Z и X связаны линейным преобразованием, в дальнейшем будем работать с распределением Z , что значительно удобнее. Затем можно перейти к распределению X .

В данном разделе приведен вывод условий существования и формулы смешанного момента общего вида $E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} \dots Z_d^{r_d})$ для t -распределения с вектором степеней свободы в стандартизованной форме. Нетрудно проверить, что при $a_1 = a_2 = \dots = a_d$ полученные результаты сводятся к известным результатам для многомерного t -распределения со скалярным параметром степеней свободы.

Обозначим $s_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j r_{d+i-j}$ и в дальнейшем будем использовать стандартное обозначение $B(\cdot, \cdot)$ для бета-функции. При выводе

формул смешанного момента и маргинальных функций плотности нам будет удобна следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $a > 0$, $c > -1$ и $b + \frac{c+1}{2} < 0$, тогда

$$\int_0^{+\infty} \left(a + \frac{1}{2} z^2\right)^b z^c dz = a^{b+\frac{c+1}{2}} 2^{\frac{c-1}{2}} \mathbf{B}\left(-b - \frac{c+1}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$$

Доказательство. Используя замену переменных $t = \frac{a}{a + \frac{1}{2} z^2}$,

имеем

$$\int_0^{+\infty} \left(a + \frac{1}{2} z^2\right)^b z^c dz = a^{b+\frac{c+1}{2}} 2^{\frac{c-1}{2}} \int_0^1 t^{-b-\frac{c+1}{2}-1} (1-t)^{\frac{c+1}{2}-1} dt = a^{b+\frac{c+1}{2}} 2^{\frac{c-1}{2}} \mathbf{B}\left(-b - \frac{c+1}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$$

Лемма 1 доказана.

Теорема 1. Пусть Z имеет функцию плотности распределения (3.2), $r_j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $b_j > \frac{j}{2} + s_j$ для $j = 1, \dots, d$. Тогда смешанный момент $E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} \dots Z_d^{r_d})$ существует. При этом

$$E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} \dots Z_d^{r_d}) = 0$$

если r_j нечетно для некоторого j , и

$$E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} \dots Z_d^{r_d}) = 2^{s_d} \pi^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} \prod_{j=1}^d \mathbf{B}\left(b_j - \frac{j}{2} - s_j, \frac{r_{d-j+1} + 1}{2}\right) \quad (3.3)$$

если r_j четно для всех $j = 1, \dots, d$.

Доказательство. Для смешанного момента общего вида имеем

$$\begin{aligned} E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} \dots Z_d^{r_d}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_d^{r_d} dz_1 dz_2 \dots dz_d = \\ &= \sum_{O \in \mathbb{O}_O} \int f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_d^{r_d} dz_1 dz_2 \dots dz_d \end{aligned}$$

где \mathbb{O} – множество всех 2^d ортантов пространства \mathbb{R}^d . Обозначим через $n(O)$ и $k_1, k_2, \dots, k_{n(O)}$ соответственно количество и номера

переменных, которые являются отрицательными в ортанте O , то есть $z_{k_1} < 0, z_{k_2} < 0, \dots, z_{k_{n(O)}} < 0$. Этим переменным соответствуют порядки моментов $r_{k_1}, r_{k_2}, \dots, r_{k_{n(O)}}$. В интеграле для ортанта O изменим порядок интегрирования следующим образом

$$\int_0 f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_d^{r_d} dz_1 dz_2 \dots dz_d =$$

$$= \int_0 \int_0 \dots \int_0 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \dots \int_{-\infty}^0 f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_{k_1}^{r_{k_1}} z_{k_2}^{r_{k_2}} \dots z_{k_n}^{r_{k_n}} z_{k_{n+1}}^{r_{k_{n+1}}} \dots z_{k_d}^{r_{k_d}} dz_{k_1} dz_{k_2} \dots dz_{k_n} dz_{k_{n+1}} \dots dz_d$$

Используя замену $t_{k_1} = -z_{k_1}$ и четность $f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d)$ по z_{k_1} , получаем

$$\int_0 f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_d^{r_d} dz_1 dz_2 \dots dz_d =$$

$$\int_0 \int_0 \dots \int_0 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \dots \int_{-\infty}^0 f_Z(z_1, z_2, \dots, -t_{k_1}, \dots, z_d) (-t_{k_1})^{r_{k_1}} z_{k_2}^{r_{k_2}} \dots z_{k_n}^{r_{k_n}} z_{k_{n+1}}^{r_{k_{n+1}}} \dots z_{k_d}^{r_{k_d}} (-dt_{k_1}) dz_{k_2} \dots dz_{k_n} dz_{k_{n+1}} \dots dz_d =$$

$$= (-1)^{r_{k_1}} \int_0 \int_0 \dots \int_0 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \dots \int_{-\infty}^0 f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_{k_1}^{r_{k_1}} z_{k_2}^{r_{k_2}} \dots z_{k_n}^{r_{k_n}} z_{k_{n+1}}^{r_{k_{n+1}}} \dots z_{k_d}^{r_{k_d}} dz_{k_1} dz_{k_2} \dots dz_{k_n} dz_{k_{n+1}} \dots dz_d$$

Применяя аналогичную замену для z_{k_2}, \dots, z_{k_n} и полагая $r_{k_0} = 0$, имеем

$$\int_0 f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_d^{r_d} dz_1 dz_2 \dots dz_d = (-1)^{\sum_{i=0}^n r_{k_i}} \int_0 \int_0 \dots \int_0 f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_d^{r_d} dz_1 dz_2 \dots dz_d$$

Тогда смешанный момент общего вида определится следующим образом

$$E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} \dots Z_d^{r_d}) = \left(\sum_{O \in \mathbb{O}} (-1)^{\sum_{i=0}^n r_{k_i(O)}} \right) \int_0 \int_0 \dots \int_0 f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_d^{r_d} dz_1 dz_2 \dots dz_d \quad (3.4)$$

Пусть r_j нечетно для некоторого j . Обозначим через $\bar{\mathbb{O}}$ множество ортантов, в которых $z_j > 0$, а через $\underline{\mathbb{O}}$ – множество ортантов, в которых $z_j < 0$. Возьмем произвольный ортант из первой группы $\bar{O} \in \bar{\mathbb{O}}$. Тогда $z_{k_1(\bar{O})} < 0, z_{k_2(\bar{O})} < 0, \dots, z_{k_{n(\bar{O})}(\bar{O})} < 0$, причем $j \notin \{k_1(\bar{O}), k_2(\bar{O}), \dots, k_{n(\bar{O})}(\bar{O})\}$. Очевидно, что существует ортант из

второй группы $\underline{O} \in \underline{\mathbb{O}}$, для которого знаки всех переменных, кроме z_j , такие же, как в ортанте \bar{O} , так что

$\{k_1(\underline{O}), k_2(\underline{O}), \dots, k_{n(\underline{O})}(\underline{O})\} = \{k_1(\bar{O}), k_2(\bar{O}), \dots, k_{n(\bar{O})}(\bar{O}), j\}$. Тогда в сумме, присутствующей в формуле (3.4), слагаемое, соответствующее

ортанту \bar{O} , имеет вид $(-1)^{\sum_{i=0}^{n(\bar{O})} r_{k_i(\bar{O})}}$, а слагаемое для ортанта \underline{O} равно

$$(-1)^{\sum_{i=0}^{n(\underline{O})} r_{k_i(\underline{O})}} = (-1)^{r_j + \sum_{i=0}^{n(\bar{O})} r_{k_i(\bar{O})}} = -(-1)^{\sum_{i=0}^{n(\bar{O})} r_{k_i(\bar{O})}}. \quad \text{Проводя аналогичные}$$

рассуждения для всех ортантов из $\bar{\mathbb{O}}$ и замечая, что $\bar{\mathbb{O}} \cap \underline{\mathbb{O}} = \emptyset$,

$\mathbb{O} = \bar{\mathbb{O}} \cup \underline{\mathbb{O}}$ и $|\bar{\mathbb{O}}| = |\underline{\mathbb{O}}|$, получаем

$$\sum_{\underline{O} \in \underline{\mathbb{O}}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(\underline{O})} r_{k_i(\underline{O})}} = \sum_{\bar{O} \in \bar{\mathbb{O}}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(\bar{O})} r_{k_i(\bar{O})}} + \sum_{\underline{O} \in \underline{\mathbb{O}}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(\underline{O})} r_{k_i(\underline{O})}} = \sum_{\bar{O} \in \bar{\mathbb{O}}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(\bar{O})} r_{k_i(\bar{O})}} - \sum_{\bar{O} \in \bar{\mathbb{O}}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(\bar{O})} r_{k_i(\bar{O})}} = 0$$

Следовательно, если r_j нечетно для некоторого j и интеграл в формуле (3.4) сходится, то $E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} \dots Z_d^{r_d}) = 0$. Если же r_j четно для всех $j = 1, \dots, d$ и интеграл в (3.4) сходится, то очевидно, что

$$\sum_{\underline{O} \in \underline{\mathbb{O}}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(\underline{O})} r_{k_i(\underline{O})}} = 2^d, \text{ и соответственно}$$

$$E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} \dots Z_d^{r_d}) = 2^d \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_d^{r_d} dz_1 dz_2 \dots dz_d$$

Нахождение смешанного момента общего вида, таким образом, сводится к проверке сходимости и вычислению следующего интеграла

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_d^{r_d} dz_1 dz_2 \dots dz_d = \\ & = C \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_d^2\right)^{-b_1} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{d-1}^2\right)^{b_1 - b_2} \dots \end{aligned}$$

$$\dots \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2\right)^{b_{d-1}-b_d} z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_d^{r_d} dz_1 dz_2 \dots dz_d$$

Для этого проводим последовательное интегрирование по z_d, z_{d-1}, \dots, z_1 .

При интегрировании по z_d с помощью Леммы 1 получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_d^{r_d} dz_1 dz_2 \dots dz_d = \\ & = C 2^{\frac{r_d-1}{2}} \mathbf{B}\left(b_1 - \frac{r_d+1}{2}, \frac{r_d+1}{2}\right) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{d-1}^2\right)^{-b_2 + \frac{r_d+1}{2}} \times \\ & \times \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{d-2}^2\right)^{b_2-b_3} \dots \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2\right)^{b_{d-1}-b_d} z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_{d-1}^{r_{d-1}} dz_1 dz_2 \dots dz_{d-1} \end{aligned}$$

При этом интегрирование на данном шаге возможно, поскольку

$b_1 > \frac{r_d+1}{2}$ и $r_d > -1$ в рамках предположений теоремы, а следовательно

несобственный интеграл $\int_0^1 t^{b_1 - \frac{r_d+1}{2} - 1} (1-t)^{\frac{r_d+1}{2} - 1} dt$, определяющий бета-

функцию, сходится.

Интегрирование по $z_{d-1}, z_{d-2}, \dots, z_2$ проводится аналогичным образом с использованием Леммы 1. При этом на каждом шаге в рамках предположений теоремы соответствующий несобственный интеграл, определяющий бета-функцию, сходится. Применяя данную схему, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} f_Z(z_1, z_2, \dots, z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_d^{r_d} dz_1 dz_2 \dots dz_d = \\ & = C 2^{\frac{r_d-1}{2} + \frac{r_{d-1}-1}{2}} \mathbf{B}\left(b_1 - \frac{r_d+1}{2}, \frac{r_d+1}{2}\right) \mathbf{B}\left(b_2 - \frac{r_d+1}{2} - \frac{r_{d-1}+1}{2}, \frac{r_{d-1}+1}{2}\right) \times \\ & \times \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{d-2}^2\right)^{-b_3 + \frac{r_d+1}{2} + \frac{r_{d-1}+1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{d-3}^2\right)^{b_3-b_4} \times \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2\right)^{b_{d-1}-b_d} z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_{d-2}^{r_{d-2}} dz_1 dz_2 \dots dz_{d-2} = \dots = \\
& = C 2^{\frac{r_d-1}{2} + \frac{r_{d-1}-1}{2} + \dots + \frac{r_1-1}{2}} \mathbf{B}\left(b_1 - \frac{r_d+1}{2}, \frac{r_d+1}{2}\right) \mathbf{B}\left(b_2 - \frac{r_d+1}{2} - \frac{r_{d-1}+1}{2}, \frac{r_{d-1}+1}{2}\right) \times \dots \\
& \dots \mathbf{B}\left(b_d - \frac{r_d+1}{2} - \frac{r_{d-1}+1}{2} - \dots - \frac{r_1+1}{2}, \frac{r_1+1}{2}\right) \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Применение (3.1) и (3.4) дает утверждение теоремы.

Теорема 1 доказана.

Замечание. Если условия Теоремы 1 не выполнены, то $E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} \dots Z_d^{r_d})$ не существует. Действительно, если $r_j \leq -1$ или $b_j \leq \frac{j}{2} + s_j$ для некоторого j , то интеграл, определяющий одну из бета-функций в (3.5), расходится, а значит расходится интеграл в формуле (3.4). Таким образом условия Теоремы 1 являются необходимыми и достаточными для существования $E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} \dots Z_d^{r_d})$.

Используя Теорему 1, получаем, что математическое ожидание вектора Z существует только при $a_j > \frac{j}{2}$, $j=1, \dots, d$ и $E(Z)=0$, а ковариационная матрица существует только при $a_j > \frac{j+1}{2}$, $j=1, \dots, d$ и ее элементы таковы:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Z_1) &= \frac{2}{2a_d - d - 1} \\
\text{Var}(Z_j) &= \frac{2}{2a_{d-j+1} - d + j - 2} \prod_{i=d-j+2}^d \frac{2a_i - i}{2a_i - i - 1}, \quad j=2, \dots, d \\
\text{Cov}(Z_i, Z_j) &= 0, \quad i, j=1, \dots, d; \quad i \neq j
\end{aligned}$$

Заметим, что условия существования математического ожидания для всего вектора Z совпадают с условиями существования математического ожидания его последней компоненты Z_d , а

существование ковариационной матрицы Z равносильно существованию $E(Z_d^2)$.

С помощью Теоремы 1 также может быть получена формула смешанных моментов распределения вектора X . Напомним, что $X - \mu = PZ$, где P – нижняя треугольная матрица и $PP' = A$. Предполагая $r_j \geq 0$ для всех $j=1, \dots, d$, рассмотрим центральный смешанный момент вектора X общего вида

$$\begin{aligned} & E\left((X_1 - \mu_1)^{r_1} (X_2 - \mu_2)^{r_2} \dots (X_i - \mu_i)^{r_i} \dots (X_d - \mu_d)^{r_d}\right) = \\ & = E\left((p_{11}Z_1)^{r_1} (p_{21}Z_1 + p_{22}Z_2)^{r_2} \dots (p_{i1}Z_1 + p_{i2}Z_2 + \dots + p_{ii}Z_i)^{r_i} \dots (p_{d1}Z_1 + p_{d2}Z_2 + \dots + p_{dd}Z_d)^{r_d}\right) \end{aligned}$$

Преобразуя степени в суммы с помощью мультиномиальной теоремы, получаем

$$\begin{aligned} & E\left((X_1 - \mu_1)^{r_1} (X_2 - \mu_2)^{r_2} \dots (X_i - \mu_i)^{r_i} \dots (X_d - \mu_d)^{r_d}\right) = \\ & = E\left(\left(\sum_{\substack{k_1^1 \geq 0 \\ k_1^1 = r_1}} \frac{r_1! p_{11}^{k_1^1}}{k_1^1!} Z_1^{k_1^1}\right) \left(\sum_{\substack{k_1^2, k_2^2 \geq 0 \\ k_1^2 + k_2^2 = r_2}} \frac{r_2! p_{21}^{k_1^2} p_{22}^{k_2^2}}{k_1^2! k_2^2!} Z_1^{k_1^2} Z_2^{k_2^2}\right) \dots \left(\sum_{\substack{k_1^i, k_2^i, \dots, k_i^i \geq 0 \\ k_1^i + k_2^i + \dots + k_i^i = r_i}} \frac{r_i! p_{i1}^{k_1^i} p_{i2}^{k_2^i} \dots p_{ii}^{k_i^i}}{k_1^i! k_2^i! \dots k_i^i!} Z_1^{k_1^i} Z_2^{k_2^i} \dots Z_i^{k_i^i}\right) \dots \right. \\ & \quad \left. \dots \left(\sum_{\substack{k_1^d, k_2^d, \dots, k_d^d \geq 0 \\ k_1^d + k_2^d + \dots + k_d^d = r_d}} \frac{r_d! p_{d1}^{k_1^d} p_{d2}^{k_2^d} \dots p_{dd}^{k_d^d}}{k_1^d! k_2^d! \dots k_d^d!} Z_1^{k_1^d} Z_2^{k_2^d} \dots Z_d^{k_d^d}\right)\right) = \\ & = E\left(\sum_{\substack{k_1^1 = r_1 \\ k_1^2 + k_2^2 = r_2 \\ \dots \\ k_1^d + k_2^d + \dots + k_d^d = r_d}} \left(\prod_{i=1}^d \frac{r_i! p_{i1}^{k_1^i} p_{i2}^{k_2^i} \dots p_{ii}^{k_i^i}}{k_1^i! k_2^i! \dots k_i^i!}\right) Z_1^{k_1^1 + k_1^2 + \dots + k_1^d} Z_2^{k_2^2 + k_2^3 + \dots + k_2^d} \dots Z_d^{k_d^d}\right) = \\ & = \sum_{\substack{k_1^1, k_1^2, k_2^2, \dots, k_1^d, k_2^d, \dots, k_d^d \geq 0 \\ k_1^1 = r_1 \\ k_1^2 + k_2^2 = r_2 \\ \dots \\ k_1^d + k_2^d + \dots + k_d^d = r_d}} \left(\prod_{i=1}^d \frac{r_i! p_{i1}^{k_1^i} p_{i2}^{k_2^i} \dots p_{ii}^{k_i^i}}{k_1^i! k_2^i! \dots k_i^i!}\right) E\left(Z_1^{k_1^1 + k_1^2 + \dots + k_1^d} Z_2^{k_2^2 + k_2^3 + \dots + k_2^d} \dots Z_d^{k_d^d}\right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{k_1^1, k_1^2, k_2^2, \dots, k_1^d, k_2^d, \dots, k_d^d \geq 0 \\ k_1^1 = r_1 \\ k_1^2 + k_2^2 = r_2 \\ \dots \\ k_1^d + k_2^d + \dots + k_d^d = r_d}} \left(\prod_{i=1}^d \frac{r_i! p_{i1}^{k_1^i} p_{i2}^{k_2^i} \dots p_{ii}^{k_i^i}}{k_1^i! k_2^i! \dots k_i^i!} \right) 1 \left\{ \begin{array}{l} k_1^1 + k_1^2 + \dots + k_1^d : 2, \\ k_2^2 + k_2^3 + \dots + k_2^d : 2, \\ \dots \\ k_d^d : 2 \end{array} \right\} 2^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (k_j^j + k_j^{j+1} + \dots + k_j^d)} \pi^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} \times \\ \times \prod_{j=1}^d \mathbf{B} \left(b_j - \frac{j}{2} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^j (k_{d+l-j}^{d+l-j} + k_{d+l-j}^{d+l-j+1} + \dots + k_{d+l-j}^d), \frac{k_{d-j+1}^{d-j+1} + k_{d-j+1}^{d-j+2} + \dots + k_{d-j+1}^d + 1}{2} \right)$$

где $1\{\cdot\}$ – индикаторная функция. Группируя сомножители, для смешанного момента вектора X окончательно получаем

$$E \left((X_1 - \mu_1)^{r_1} (X_2 - \mu_2)^{r_2} \dots (X_i - \mu_i)^{r_i} \dots (X_d - \mu_d)^{r_d} \right) = \\ = \pi^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} \sum_{\substack{k_1^1, k_1^2, k_2^2, \dots, k_1^d, k_2^d, \dots, k_d^d \geq 0 \\ k_1^1 = r_1 \\ k_1^2 + k_2^2 = r_2 \\ \dots \\ k_1^d + k_2^d + \dots + k_d^d = r_d}} 1 \left\{ \begin{array}{l} k_1^1 + k_1^2 + \dots + k_1^d : 2, \\ k_2^2 + k_2^3 + \dots + k_2^d : 2, \\ \dots \\ k_d^d : 2 \end{array} \right\} 2^{\frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ j \leq i \leq d}} k_j^i} \times \\ \times \prod_{j=1}^d \frac{r_j! p_{j1}^{k_1^j} p_{j2}^{k_2^j} \dots p_{jj}^{k_j^j}}{k_1^j! k_2^j! \dots k_j^j!} \mathbf{B} \left(b_j - \frac{j}{2} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^j (k_{d+l-j}^{d+l-j} + k_{d+l-j}^{d+l-j+1} + \dots + k_{d+l-j}^d), \frac{k_{d-j+1}^{d-j+1} + k_{d-j+1}^{d-j+2} + \dots + k_{d-j+1}^d + 1}{2} \right)$$

При этом, как и в случае вектора Z , для существования $E \left((X_1 - \mu_1)^{r_1} (X_2 - \mu_2)^{r_2} \dots (X_d - \mu_d)^{r_d} \right)$ требуется положительность аргументов всех бета-функций, входящих в полученную формулу.

3.3 Одномерные маргинальные функции плотности

При выводе одномерных маргинальных функций плотности t -распределения с вектором степеней свободы используются интегральные представления обобщенных гипергеометрических функций ${}_p F_q(m_1, \dots, m_p; n_1, \dots, n_q; y)$. Далее приведены интегральные представления для тех значений аргументов, которые будут встречаться при выводе маргинальных распределений. Леммы 2 и 3

могут быть найдены в книгах (Градштейн, Рыжик, 2011) и (Прудников и др., 2003)³⁵.

Лемма 2. Пусть $m_1, m_2, n, y \in \mathbb{R}$, $n > m_2 > 0$ и $y \leq 0$. Тогда

$${}_2F_1(m_1, m_2; n; y) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m_2)\Gamma(n-m_2)} \int_0^{+\infty} t^{-m_2+n-1} (t+1)^{m_1-n} (t-y+1)^{-m_1} dt$$

Лемма 3. Пусть $q \in \{2, 3, \dots\}$, $m_1, \dots, m_{q+1}, n_1, \dots, n_q, y \in \mathbb{R}$, $n_1, \dots, n_{q-1} \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, $n_q > m_{q+1} > 0$ и $y \leq 0$. Тогда

$${}_{q+1}F_q(m_1, \dots, m_{q+1}; n_1, \dots, n_q; y) = \frac{\Gamma(n_q)}{\Gamma(m_{q+1})\Gamma(n_q - m_{q+1})} \times \\ \times \int_0^1 t^{m_{q+1}-1} (1-t)^{n_q - m_{q+1} - 1} {}_qF_{q-1}(m_1, \dots, m_q; n_1, \dots, n_{q-1}; yt) dt$$

Базовые свойства обобщенной гипергеометрической функции, приведенные в Леммах 4 и 5, также приведены в книге (Прудников и др., 2003).

Лемма 4. Значение функции ${}_pF_q(m_1, \dots, m_p; n_1, \dots, n_q; y)$ не зависит от порядка расположения параметров внутри групп m_1, \dots, m_p и n_1, \dots, n_q .

Лемма 5. Имеет место следующая формула понижения порядка обобщенной гипергеометрической функции при совпадении значений параметров в первой и второй группах

$${}_pF_q(m_1, \dots, m_{p-r}, m_{p-r+1}, \dots, m_p; n_1, \dots, n_{q-r}, m_{p-r+1}, \dots, m_p; y) = \\ = {}_{p-r}F_{q-r}(m_1, \dots, m_{p-r}; n_1, \dots, n_{q-r}; y)$$

В Теореме 2 приведена общая формула одномерной маргинальной функций плотности для t -распределения с вектором

³⁵ См. также

<http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1/07/01/01/002/> и

<http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/HypergeometricPFQ/07/01/01/0001/> соответственно.

степеней свободы в стандартизованной форме. Заметим, что в случае векторного параметра степеней свободы все одномерные маргинальные распределения имеют разную функциональную форму, в то время как при скалярном параметре степеней свободы все они являются t -распределениями.

Теорема 2. Пусть Z имеет функцию плотности распределения (3.2). Тогда маргинальная функция плотности распределения компоненты Z_j имеет вид

$$f_{Z_j}(z_j) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}\right)}{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j}{2}\right)} \prod_{k=d-j+2}^d \frac{\Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)^2}{\Gamma\left(a_k - \frac{k-3}{2}\right)\Gamma\left(a_k - \frac{k-1}{2}\right)} \times$$

$$\times {}_jF_{j-1}\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}, a_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}, \dots, a_d - \frac{d-2}{2};$$

$$; a_{d-j+2} - \frac{d-j-1}{2}, a_{d-j+3} - \frac{d-j}{2}, \dots, a_d - \frac{d-3}{2}; -\frac{1}{2}z_j^2\right)$$

Доказательство. С учетом (3.1) для маргинальной функции плотности распределения компоненты Z_j имеем

$$f_{Z_j}(z_j) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \dots + \frac{1}{2}z_{d-j}^2\right)^{b_j - b_{j+1}} dz_1 \dots dz_{j-1} dz_{j+1} \dots dz_d =$$

$$= 2^{d-1} C \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \dots + \frac{1}{2}z_{d-j}^2\right)^{b_j - b_{j+1}} dz_1 \dots dz_{j-1} dz_{j+1} \dots dz_d$$

На первом этапе интегрируем последовательно по $z_d, z_{d-1}, \dots, z_{j+1}$, применяя Лемму 1.

$$f_{Z_j}(z_j) = 2^{d-1-\frac{1}{2}} B\left(b_1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) C \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \dots + \frac{1}{2}z_{d-1}^2\right)^{-b_2 + \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \dots + \frac{1}{2}z_{d-2}^2\right)^{b_2 - b_3} \dots$$

$$\dots \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \dots + \frac{1}{2}z_j^2\right)^{b_{d-j} - b_{d-j+1}} \dots \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2\right)^{b_{d-1} - b_d} dz_1 \dots dz_{j-1} dz_{j+1} \dots dz_{d-1} = \dots =$$

$$= 2^{d-1-\frac{d-j}{2}} \mathbf{B}\left(b_1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \mathbf{B}\left(b_2 - 1, \frac{1}{2}\right) \dots \mathbf{B}\left(b_{d-j} - \frac{d-j}{2}, \frac{1}{2}\right) C \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_j^2\right)^{-b_{d-j+1} + \frac{d-j}{2}} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{j-1}^2\right)^{b_{d-j+1} - b_{d-j+2}} \dots \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2\right)^{b_{d-1} - b_d} dz_1 \dots dz_{j-1}$$

На втором этапе интегрируем последовательно по $z_{j-1}, z_{j-2}, \dots, z_1$.

Положим

$$D = 2^{d-1-\frac{d-j}{2}} \mathbf{B}\left(b_1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \mathbf{B}\left(b_2 - 1, \frac{1}{2}\right) \dots \mathbf{B}\left(b_{d-j} - \frac{d-j}{2}, \frac{1}{2}\right) C \quad (3.6)$$

Используем замену переменных $t = \frac{\frac{1}{2} z_{j-1}^2}{1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{j-2}^2}$. Тогда

$$f_{Z_j}(z_j) = 2^{\frac{1}{2}} D \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} (1+t)^{b_{d-j+1} - b_{d-j+2}} \left(1 + t - \frac{-\frac{1}{2} z_j^2}{1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{j-2}^2}\right)^{-b_{d-j+1} + \frac{d-j}{2}} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{j-2}^2\right)^{\frac{d-j}{2} - b_{d-j+3} + \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{j-3}^2\right)^{b_{d-j+3} - b_{d-j+4}} \dots \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2\right)^{b_{d-1} - b_d} dz_1 \dots dz_{j-2} dt$$

Применяя Лемму 2, имеем

$$f_{Z_j}(z_j) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}\right) \pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}\right)} D \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} {}_2F_1\left(b_{d-j+1} - \frac{d-j}{2}, b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}; b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}; \frac{-\frac{1}{2} z_j^2}{1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{j-2}^2}\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{j-2}^2\right)^{\frac{d-j}{2} - b_{d-j+3} + \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{j-3}^2\right)^{b_{d-j+3} - b_{d-j+4}} \dots \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2\right)^{b_{d-1} - b_d} dz_1 \dots dz_{j-2}$$

Далее произведем замену переменных $s = \frac{1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{j-3}^2}{1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2} z_{j-2}^2}$. Тогда

имеем

$$\begin{aligned}
f_{Z_j}(z_j) &= 2^{\frac{1-1}{2} \frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(b_{d-j+2} - \frac{d-j-1}{2}\right) \pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}\right)} D \times \\
&\times \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 {}_2F_1\left(b_{d-j+1} - \frac{d-j}{2}, b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}; b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}; \left(\frac{-\frac{1}{2}z_j^2}{1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \dots + \frac{1}{2}z_{j-3}^2}\right) s\right) \times \\
&\times s^{b_{d-j+3} - \frac{d-j-1}{2} - \frac{3}{2}} (1-s)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \dots + \frac{1}{2}z_{j-3}^2\right)^{\frac{d-j-b_{d-j+4}+1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \dots + \frac{1}{2}z_{j-4}^2\right)^{b_{d-j+4} - b_{d-j+5}} \dots \\
&\dots \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2\right)^{b_{d-1} - b_d} dz_1 \dots dz_{j-3} ds
\end{aligned}$$

Применяя Лемму 3, получаем

$$\begin{aligned}
f_{Z_j}(z_j) &= 2^{\frac{1-1}{2} \frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(b_{d-j+2} - \frac{d-j-1}{2}\right) \Gamma\left(b_{d-j+3} - \frac{d-j-1}{2} - \frac{1}{2}\right) \pi^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}{\Gamma\left(b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}\right) \Gamma\left(b_{d-j+3} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}\right)} D \times \\
&\times \int_0^1 \dots \int_0^1 {}_3F_2\left(b_{d-j+1} - \frac{d-j}{2}, b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}, b_{d-j+3} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}; \right. \\
&\quad \left. ; b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}, b_{d-j+3} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}; \frac{-\frac{1}{2}z_j^2}{1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \dots + \frac{1}{2}z_{j-3}^2}\right) \times \\
&\times \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \dots + \frac{1}{2}z_{j-3}^2\right)^{\frac{d-j-b_{d-j+4}+1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \dots + \frac{1}{2}z_{j-4}^2\right)^{b_{d-j+4} - b_{d-j+5}} \dots \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2\right)^{b_{d-1} - b_d} dz_1 \dots dz_{j-3}
\end{aligned}$$

Используя аналогичную замену переменных вида

$$s = \frac{1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \dots + \frac{1}{2}z_{k-1}^2}{1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \dots + \frac{1}{2}z_k^2} \text{ последовательно для } k = j-3, \dots, 2 \text{ и } s = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z_1^2}$$

для z_1 и интегрируя после замены каждый раз по s , имеем

$$f_{Z_j}(z_j) = 2^{-\frac{j-1}{2}} \frac{\Gamma\left(b_{d-j+2} - \frac{d-j-1}{2}\right) \Gamma\left(b_{d-j+3} - \frac{d-j-1}{2}\right) \dots \Gamma\left(b_d - \frac{d-j-j-1}{2}\right) \pi^{\frac{j-1}{2}}}{\Gamma\left(b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}\right) \Gamma\left(b_{d-j+3} - \frac{d-j-1}{2}\right) \dots \Gamma\left(b_d - \frac{d-j-j-2}{2}\right)} D \times$$

$$\times {}_j F_{j-1}\left(b_{d-j+1} - \frac{d-j}{2}, b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}, \dots, b_d - \frac{d-j-j-1}{2};\right.$$

$$\left.; b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}, b_{d-j+3} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}, \dots, b_d - \frac{d-j-j-2}{2}; -\frac{1}{2} z_j^2\right)$$

Применяя (3.1), (3.6), свойство бета-функции $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$,

а также обозначение $b_j = a_j + \frac{1}{2}$, $j=1, \dots, d$, получаем утверждение теоремы.

Теорема 2 доказана.

В случае скалярного параметра степеней свободы, то есть при $a_1 = a_2 = \dots = a_d = a$, порядок обобщенной гипергеометрической функции в формуле маргинальной функции плотности распределения Z_j понижается на $j-1$, поскольку $j-1$ параметров первой группы совпадают с $j-1$ параметрами второй группы (использованы Леммы 4 и 5). Имеем

$${}_j F_{j-1}\left(a - \frac{d-j-1}{2}, a - \frac{d-j}{2}, \dots, a - \frac{d-2}{2}; a - \frac{d-j-1}{2}, a - \frac{d-j}{2}, \dots, a - \frac{d-3}{2}; -\frac{1}{2} z_j^2\right) =$$

$$= {}_1 F_0\left(a - \frac{d-2}{2}; -\frac{1}{2} z_j^2\right) = \left(1 + \frac{1}{2} z_j^2\right)^{-a + \frac{d-2}{2}}$$

где мы использовали таблицу значений обобщенной гипергеометрической функции (см. (Прудников и др., 2003)). Получаем, что маргинальная функция плотности распределения Z_j сводится к

$$f_{Z_j}(z_j) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(a - \frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma\left(a - \frac{d-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{2} z_j^2\right)^{-a + \frac{d-2}{2}}$$

Таким образом, для любого $j=1, \dots, d$ случайная величина $\sqrt{\frac{2a-d+1}{2}} Z_j$ имеет стандартное t -распределение с $2a-d+1$ степенями свободы, что является известным результатом из теории многомерного t -распределения со скалярным параметром степеней свободы.

3.4 Характеристические функции одномерных маргинальных распределений

Обобщенную гипергеометрическую функцию можно выразить через более общую специальную функцию – G -функцию Мейера. Лемма 6 приведена в книгах (Градштейн, Рыжик, 2011) и (Прудников, 2003)³⁶.

Лемма 6. Пусть $q \in \{0, 1, \dots\}$, $p = q + 1$, $m_1, \dots, m_p, n_1, \dots, n_q, y \in \mathbb{R}$, $n_1, \dots, n_q \notin \{0, -1, -2, \dots\}$. Тогда

$${}_p F_q(w_1, \dots, w_p; v_1, \dots, v_q; y) = \frac{\prod_{k=1}^q \Gamma(v_k)}{\prod_{k=1}^p \Gamma(w_k)} G_{p,q+1}^{1,p} \left(-y \left| \begin{matrix} 1-w_1, \dots, 1-w_p \\ 0, 1-v_1, \dots, 1-v_q \end{matrix} \right. \right).$$

Для G -функции Мейера нам необходим следующий результат, который также может быть найден в книгах (Градштейн, Рыжик, 2011) и (Прудников и др., 2003)³⁷.

³⁶ См. также

<http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/HypergeometricPFQ/26/03/01/0001/>.

³⁷ См. также

Лемма 7. Пусть $q \in \{0, 1, \dots\}$, $p = q + 1$, $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$, $p + q < 2(m + n)$, $\alpha > 0$, $c > 0$ и

$$w_j < \frac{1}{2}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$w_j \in \mathbb{R}, \quad j = n + 1, \dots, p$$

$$v_j > -\frac{1}{2}, \quad j = 1, \dots, m$$

$$v_j \in \mathbb{R}, \quad j = m + 1, \dots, q$$

Тогда

$$\int_0^{+\infty} G_{p,q}^{m,n} \left(\alpha y^2 \left| \begin{matrix} w_1, \dots, w_p \\ v_1, \dots, v_q \end{matrix} \right. \right) \cos(cy) dy = \pi^{\frac{1}{2}} c^{-1} G_{p+2,q}^{m,n+1} \left(\frac{4\alpha}{c^2} \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}, w_1, \dots, w_p, 0 \\ v_1, \dots, v_q \end{matrix} \right. \right)$$

Базовые свойства G-функции Мейера, приведенные в Леммах 8 и 9, также приведены в книге (Прудников и др., 2003).

Лемма 8. Значение функции $G_{p,q}^{m,n} \left(y \left| \begin{matrix} w_1, \dots, w_p \\ v_1, \dots, v_q \end{matrix} \right. \right)$ не зависит от порядка расположения параметров внутри групп w_1, \dots, w_n ; w_{n+1}, \dots, w_p ; v_1, \dots, v_m и v_{m+1}, \dots, v_q .

Лемма 9. Имеют место следующие формулы понижения порядка G-функции Мейера при совпадении значений крайних параметров в первой и второй группах

$$\text{I. } G_{p,q}^{m,n} \left(y \left| \begin{matrix} w_1, \dots, w_p \\ v_1, \dots, v_{q-1}, w_1 \end{matrix} \right. \right) = G_{p-1,q-1}^{m,n-1} \left(y \left| \begin{matrix} w_2, \dots, w_p \\ v_1, \dots, v_{q-1} \end{matrix} \right. \right)$$

$$\text{II. } G_{p,q}^{m,n} \left(y \left| \begin{matrix} w_1, \dots, w_{p-1}, v_1 \\ v_1, \dots, v_q \end{matrix} \right. \right) = G_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left(y \left| \begin{matrix} w_1, \dots, w_{p-1} \\ v_2, \dots, v_q \end{matrix} \right. \right)$$

В следующей теореме приведена общая формула одномерной маргинальной характеристической функции для t -распределения с вектором степеней свободы. Характеристические функции компонент вектора также имеют разную форму вследствие различий функций плотности распределения.

Теорема 3. Пусть Z имеет функцию плотности распределения (3.2). Тогда характеристическая функция маргинального распределения компоненты Z_j имеет вид

$$\varphi_{Z_j}(t) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{\prod_{k=d-j+2}^d \Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^d \Gamma\left(a_k - \frac{k-1}{2}\right)} \frac{1}{|t|} G^{0,j+1} \left(\frac{2}{t^2} \left| \frac{1}{2}, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1}, \dots, \frac{d}{2} - a_d \right. \right)$$

Доказательство. Обозначим через C_j константу интегрирования в маргинальной функции плотности распределения компоненты Z_j , то есть

$$C_j = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}\right)}{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j}{2}\right)} \prod_{k=d-j+2}^d \frac{\Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)^2}{\Gamma\left(a_k - \frac{k-3}{2}\right)\Gamma\left(a_k - \frac{k-1}{2}\right)}$$

Тогда применяя Лемму 6, для характеристической функции маргинального распределения Z_j имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_j}(t) &= E\left(\exp(itZ_j)\right) = E\left(\cos(tZ_j) + i \sin(tZ_j)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_j}(z_j) (\cos(tz_j) + i \sin(tz_j)) dz_j = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_j}(z_j) \cos(tz_j) dz_j = 2 \int_0^{+\infty} f_{Z_j}(z_j) \cos(|t|z_j) dz_j = \\ &= 2C_j \int_0^{+\infty} {}_jF_{j-1} \left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}, a_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}, \dots, a_d - \frac{d-2}{2}; \right. \\ &\left. ; a_{d-j+2} - \frac{d-j-1}{2}, a_{d-j+3} - \frac{d-j}{2}, \dots, a_d - \frac{d-3}{2}; -\frac{1}{2}z_j^2 \right) \cos(|t|z_j) dz_j = \end{aligned}$$

$$= 2C_j \frac{\prod_{k=d-j+2}^d \Gamma\left(a_k - \frac{k-3}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^d \Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)} \int_0^{+\infty} G_{j,j}^{1,j} \left(\frac{1}{2} z_j^2 \left| \begin{array}{c} \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1}, \dots, \frac{d}{2} - a_d \\ 0, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+2}, \dots, \frac{d-1}{2} - a_d \end{array} \right. \right) \cos(|t| z_j) dz_j$$

Применяя Лемму 7 к интегралу в данном выражении, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_j}(t) &= 2C_j \frac{\prod_{k=d-j+2}^d \Gamma\left(a_k - \frac{k-3}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^d \Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|t|} G_{j+2,j}^{1,j+1} \left(\frac{2}{t^2} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2}, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1}, \dots, \frac{d}{2} - a_d, 0 \\ 0, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+2}, \dots, \frac{d-1}{2} - a_d \end{array} \right. \right) = \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \frac{\prod_{k=d-j+2}^d \Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^d \Gamma\left(a_k - \frac{k-1}{2}\right)} \frac{1}{|t|} G_{j+2,j}^{1,j+1} \left(\frac{2}{t^2} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2}, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1}, \dots, \frac{d}{2} - a_d, 0 \\ 0, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+2}, \dots, \frac{d-1}{2} - a_d \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

Поскольку в G-функции Мейера, входящей в данное выражение, последний параметр первой группы и первый параметр второй группы совпадают, из пункта II Леммы 9 следует, что

$$G_{j+2,j}^{1,j+1} \left(\frac{2}{t^2} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2}, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1}, \dots, \frac{d}{2} - a_d, 0 \\ 0, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+2}, \dots, \frac{d-1}{2} - a_d \end{array} \right. \right) = G_{j+1,j-1}^{0,j+1} \left(\frac{2}{t^2} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2}, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1}, \dots, \frac{d}{2} - a_d \\ \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+2}, \dots, \frac{d-1}{2} - a_d \end{array} \right. \right)$$

Подстановка данного результата в выражение для характеристической функции Z_j дает утверждение теоремы.

Теорема 3 доказана.

В случае $a_1 = a_2 = \dots = a_d = a$ в выражении для характеристической функции Z_j используем свойство симметрии G-функции Мейера (Лемму 8), а затем $j-1$ раз понизим порядок данной функции (пункт I Леммы 9). Получим

$$\varphi_{Z_j}(t) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{\prod_{k=d-j+2}^d \Gamma\left(a - \frac{k-2}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^d \Gamma\left(a - \frac{k-1}{2}\right)} \frac{1}{|t|} G_{j+1,j-1}^{0,j+1} \left(\frac{2}{t^2} \left| \begin{array}{c} \frac{d-j+1}{2} - a, \dots, \frac{d-1}{2} - a, \frac{1}{2}, \frac{d}{2} - a \\ \frac{d-1}{2} - a, \dots, \frac{d-j+1}{2} - a \end{array} \right. \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{\frac{1}{2}} \frac{\prod_{k=d-j+2}^d \Gamma\left(a - \frac{k-2}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^d \Gamma\left(a - \frac{k-1}{2}\right)} \frac{1}{|t|} G_{j,j-2}^{0,j} \left(\frac{2}{t^2} \left| \begin{array}{c} d-j+2-a, \dots, \frac{d-1}{2}-a, \frac{1}{2}, \frac{d}{2}-a \\ d-1-a, \dots, \frac{d-j+2}{2}-a \end{array} \right. \right) = \dots = \\
&= 2^{\frac{1}{2}} \frac{\prod_{k=d-j+2}^d \Gamma\left(a - \frac{k-2}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^d \Gamma\left(a - \frac{k-1}{2}\right)} \frac{1}{|t|} G_{2,0}^{0,2} \left(\frac{2}{t^2} \left| \begin{array}{c} 1 \\ \frac{d}{2}-a \end{array} \right. \right)
\end{aligned}$$

Используя таблицу значений G-функции Мейера (см. (Прудников и др., 2003)), окончательно получаем

$$\varphi_{Z_j}(t) = \frac{2^{\frac{3+d}{4}} \frac{a}{2}}{\Gamma\left(a - \frac{d-1}{2}\right)} |t|^{a - \frac{d-1}{2}} K_{a - \frac{d-1}{2}}(\sqrt{2}|t|)$$

где $K_\nu(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) с параметром ν . Полученная характеристическая функция также показывает, что $\sqrt{\frac{2a-d+1}{2}} Z_j$ имеет стандартное t -распределение с $2a-d+1$ степенями свободы. Таким образом, при $a_1 = a_2 = \dots = a_d$ Теоремы 2 и 3 сводятся к известным результатам о многомерном t -распределении со скалярным параметром степеней свободы.

3.5 Примеры

Рассмотрим случай $d=3$ при ограничениях на параметры $a_1 > 0, a_2 > \frac{1}{2}, a_3 > 1$. При построении приведенных ниже графиков одномерных функций плотности (Рис. 3.1) и характеристических функций (Рис. 3.2) заданы следующие значения параметров: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$.

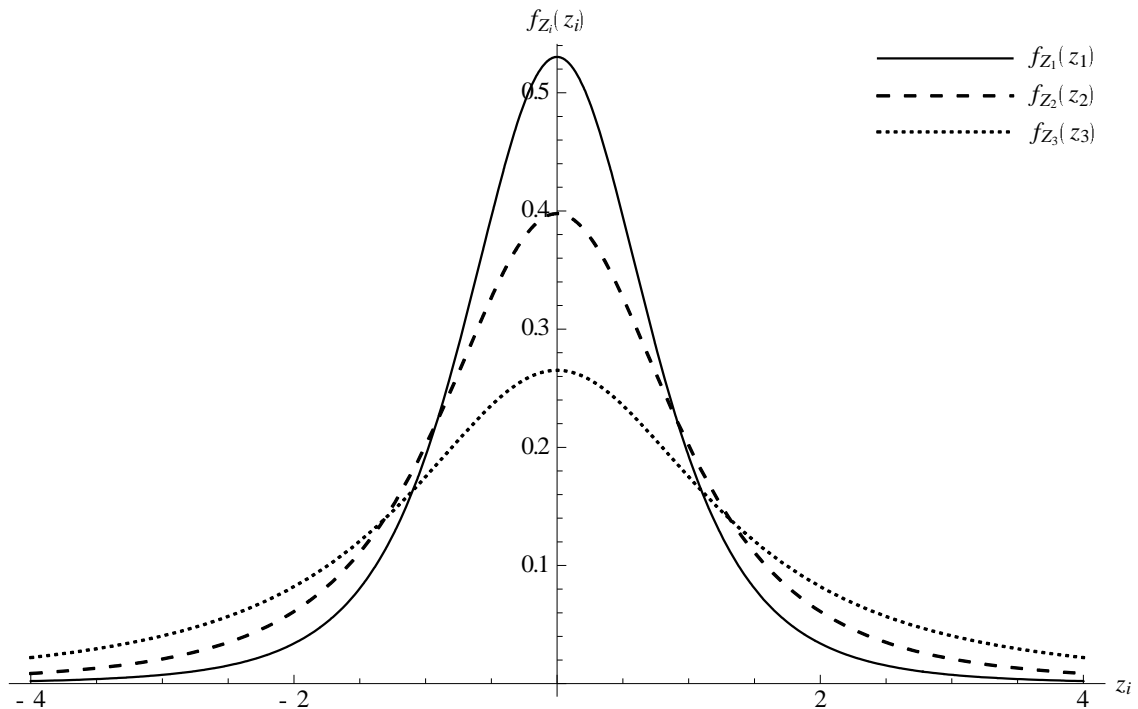
Одномерные маргинальные функции плотности

Первая компонента вектора Z имеет обычное t -распределение (нестандартно нормированное, поскольку для стандартизации распределения предполагается $A=I_3$). С помощью Теоремы 2 можно убедиться, что для любого d верно:

$$f_{z_1}(z_1) = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(a_3 - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a_3 - 1)} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2\right)^{-a_3 + \frac{1}{2}}.$$

Рис. 3.1 Функции плотности распределения Z_1, Z_2, Z_3

при $d=3$ и $a_1=1, a_2=2, a_3=3$



Вторая и следующие за ней компоненты вектора Z имеют функции плотности, которые уже не выражаются через элементарные функции при произвольных a_j . А именно:

$$f_{z_2}(z_2) = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma(a_2) \Gamma\left(a_3 - \frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(a_2 - \frac{1}{2}\right) \Gamma(a_3 - 1) \Gamma(a_3)} {}_2F_1\left(a_2, a_3 - \frac{1}{2}; a_3; -\frac{1}{2} z_2^2\right),$$

$$f_{Z_3}(z_3) = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(a_1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma(a_2)^2 \Gamma\left(a_3 - \frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(a_1) \Gamma\left(a_2 - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(a_2 + \frac{1}{2}\right) \Gamma(a_3 - 1) \Gamma(a_3)} {}_3F_2\left(a_1 + \frac{1}{2}, a_2, a_3 - \frac{1}{2}; a_2 + \frac{1}{2}, a_3; -\frac{1}{2} z_3^2\right).$$

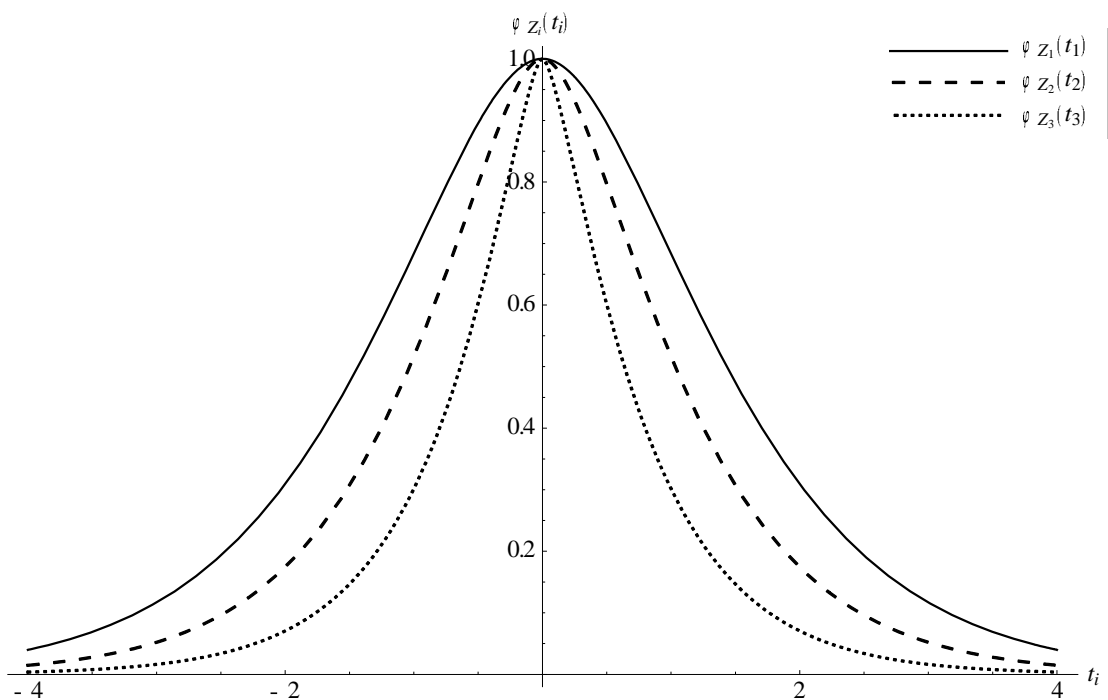
Характеристические функции одномерных маргинальных распределений

Характеристическая функция маргинального распределения первой компоненты вектора Z может быть упрощена по сравнению с ее общим видом в Теореме 3, поскольку первая компонента имеет обычное t -распределение:

$$\varphi_{Z_1}(t) = \frac{2^{\frac{3-a_3}{2}} |t|^{a_3-1}}{\Gamma(a_3-1)} K_{a_3-1}(\sqrt{2}|t|).$$

Рис. 3.2 Характеристические функции Z_1, Z_2, Z_3

при $d=3$ и $a_1=1, a_2=2, a_3=3$



Характеристические функции следующих компонент, начиная со второй не упрощаются до функций Бесселя или других базовых специальных функций, а могут быть выражены только через достаточно общую G-функцию Мейера. А именно:

$$\varphi_{Z_2}(t) = \frac{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(a_3 - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a_2 - \frac{1}{2}\right)\Gamma(a_3 - 1)} \frac{1}{|t|} G_{3,1}^{0,3} \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, 1 - a_2, \frac{3}{2} - a_3 \\ \frac{2}{t^2}, 1 - a_3 \end{matrix} \right),$$

$$\varphi_{Z_3}(t) = \frac{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(a_2)\Gamma\left(a_3 - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a_1)\Gamma\left(a_2 - \frac{1}{2}\right)\Gamma(a_3 - 1)} \frac{1}{|t|} G_{4,2}^{0,4} \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - a_1, 1 - a_2, \frac{3}{2} - a_3 \\ \frac{2}{t^2}, \frac{1}{2} - a_2, 1 - a_3 \end{matrix} \right)$$

Моменты

Математическое ожидание вектора $E(Z) = 0$, существует при

$$a_1 > \frac{1}{2}, a_2 > 1, a_3 > \frac{3}{2}.$$

$$E(Z_1) = 0, \text{ существует при } a_3 > \frac{3}{2}.$$

$$E(Z_2) = 0, \text{ существует при } a_2 > 1, a_3 > \frac{3}{2}.$$

$$E(Z_3) = 0, \text{ существует при } a_1 > \frac{1}{2}, a_2 > 1, a_3 > \frac{3}{2}.$$

Ковариационная матрица вектора $V(Z)$ существует при

$$a_1 > 1, a_2 > \frac{3}{2}, a_3 > 2.$$

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) = 0, \text{ существует при } a_2 > 1, a_3 > 2.$$

$$\text{Cov}(Z_1, Z_3) = E(Z_1 Z_3) = 0, \text{ существует при } a_1 > \frac{1}{2}, a_2 > 1, a_3 > 2.$$

$$\text{Cov}(Z_2, Z_3) = E(Z_2 Z_3) = 0, \text{ существует при } a_1 > \frac{1}{2}, a_2 > \frac{3}{2}, a_3 > 2.$$

$$\text{Var}(Z_1) = E(Z_1^2) = \frac{1}{a_3 - 2}, \text{ существует при } a_3 > 2.$$

$$\text{Var}(Z_2) = E(Z_2^2) = \frac{2a_3 - 3}{(2a_2 - 3)(a_3 - 2)}, \text{ существует при } a_2 > \frac{3}{2}, a_3 > 2.$$

$$\text{Var}(Z_3) = E(Z_3^2) = \frac{(a_2 - 1)(2a_3 - 3)}{(a_1 - 1)(2a_2 - 3)(a_3 - 2)}, \quad \text{существует} \quad \text{при}$$

$$a_1 > 1, a_2 > \frac{3}{2}, a_3 > 2.$$

3.6 Алгоритм симулирования

Пусть необходимо симулировать набор независимых d -мерных случайных векторов $X^{(1)}, \dots, X^{(N)}$, имеющих t -распределение с вектором степеней свободы с параметрами μ , A , a . В данном разделе предложен удобный способ решения этой задачи.

Определение 2. Положительно определенная случайная $d \times d$ матрица W имеет гамма-распределение Беллмана с параметрами a и A , если ее функция плотности имеет вид

$$f(w) = \gamma_{a,A} \text{etr}(-Aw) \prod_{j=1}^d |w_{[j]}|^{a_j - a_{j+1}}$$

где

$$\gamma_{a,A} = \left(\Gamma_d^*(a) \prod_{j=0}^{d-1} |A^{[d-j]}|^{a_j - a_{j+1}} \right)^{-1}$$

Лемма 10. Пусть L – нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами, такая что $W = L'L$ имеет гамма-распределение Беллмана с параметрами a и $A = I_d$.

Тогда функция плотности матрицы L имеет вид

$$f_L(l) = \left(\prod_{j=1}^d 2\Gamma\left(\frac{2a_{d-j+1} - d + j}{2}\right) \right)^{-1} l_{jj}^{(2a_{d-j+1} - d + j) - 1} \exp(-l_{jj}^2) \times \left(\prod_{i \neq j} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-l_{ij}^2) \right)$$

где l_{ij} – элементы матричного аргумента l .

Доказательство. С учетом того, что модуль якобиана преобразования $W = L'L$ имеет вид $J(W, L) = 2^d \prod_{j=1}^d l_{jj}^j$ (см. (Шведов, 2009)), для функции плотности матрицы L имеем

$$\begin{aligned}
f_L(l) &= \pi^{-\frac{d(d-1)}{4}} \prod_{j=1}^d \Gamma\left(a_j - \frac{j-1}{2}\right)^{-1} \exp\left(-\sum_{j=1}^d l_{jj}^2\right) \exp\left(-\sum_{i \neq j} l_{ij}^2\right) 2^d \prod_{j=1}^d l_{jj}^{2a_{d-j+1}-d-1+j} = \\
&= \pi^{-\frac{d(d-1)}{4}} \exp\left(-\sum_{i \neq j} l_{ij}^2\right) \exp\left(-\sum_{j=1}^d l_{jj}^2\right) 2^d \Gamma\left(\frac{2a_1}{2}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{2a_2-1}{2}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{2a_3-2}{2}\right)^{-1} \dots \Gamma\left(\frac{2a_d-d+1}{2}\right)^{-1} \times \\
&\quad \times l_{11}^{2a_d-d+1-1} l_{22}^{2a_{d-1}-(d-1)+1-1} l_{33}^{2a_{d-2}-(d-2)+1-1} \dots l_{dd}^{2a_1-1} = \\
&= \pi^{-\frac{d(d-1)}{4}} \exp\left(-\sum_{i \neq j} l_{ij}^2\right) \left(2\Gamma\left(\frac{2a_1}{2}\right)^{-1} l_{dd}^{2a_1-1} \exp(-l_{dd}^2)\right) \dots \left(2\Gamma\left(\frac{2a_d-d+1}{2}\right)^{-1} l_{11}^{(2a_d-d+1)-1} \exp(-l_{11}^2)\right) = \\
&= \left(\prod_{j=1}^d 2\Gamma\left(\frac{2a_{d-j+1}-d+j}{2}\right)^{-1} l_{jj}^{(2a_{d-j+1}-d+j)-1} \exp(-l_{jj}^2)\right) \times \left(\prod_{i \neq j} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-l_{ij}^2)\right)
\end{aligned}$$

Лемма 10 доказана.

Согласно Лемме 10, функция плотности распределения матрицы L распадается в произведение функций плотности ее элементов. Значит элементы матрицы L распределены независимо. Диагональные элементы имеют функцию плотности

$$f_{l_{jj}}(l_{jj}) = 2\Gamma\left(\frac{2a_{d-j+1}-d+j}{2}\right)^{-1} l_{jj}^{(2a_{d-j+1}-d+j)-1} \exp(-l_{jj}^2) \quad (3.7)$$

соответствующую обобщенному гамма-распределению с параметрами $a = 1$, $p = 2$, $d = 2a_{d-j+1} - d + j$. Элементы вне диагонали имеют функцию плотности

$$f_{l_{ij}}(l_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-l_{ij}^2) \quad (3.8)$$

то есть внедиагональные элементы имеют нормальное распределение $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Пусть матрица L удовлетворяет условиям Леммы 10, а вектор V имеет нормальное распределение $N(0, I_d)$. В работе (Шведов, 2010) показано, что в этом случае вектор $Z = L^{-1}V$ имеет t -распределение с вектором степеней свободы с параметрами $\mu = 0, A = I_d, a$. Следовательно симулирование вектора Z , а значит и вектора X с произвольными μ и A , сводится к симулированию матрицы L . А по Лемме 10 симулирование матрицы L сводится к ее поэлементному независимому симулированию с функциями плотности (3.7) для диагональных элементов и (3.8) для внедиагональных. Это может быть легко реализовано на компьютере, поскольку симулирование обобщенного гамма-распределения (3.7) в настоящее время доступно во многих математических программных пакетах.

Таким образом, предлагается следующий способ симулирования набора $X^{(1)}, \dots, X^{(N)}$ независимых случайных векторов, имеющих t -распределение с вектором степеней свободы с параметрами μ, A, a . Для $k = 1, \dots, N$ независимо осуществляется следующая процедура.

1. В соответствии с функциями плотности (3.7) и (3.8) производится независимое поэлементное симулирование матрицы L , а также независимо симулируется стандартный нормальный вектор V .

2. Далее вектор $X^{(k)}$, имеющий t -распределение с вектором степеней свободы с параметрами μ, A, a вычисляется как $X^{(k)} = PL^{-1}V + \mu$, где P – нижняя треугольная матрица, такая что $A = PP'$.

Отметим, что Лемма 10 неверна для верхней треугольной матрицы L с положительными диагональными элементами, поскольку в этом случае $(L'L)_{[j]} \neq L'_{[j]}L_{[j]}$. Элементы верхней

треугольной матрицы L с положительными диагональными элементами, такой что $W = L'L$, имеют существенно более сложное распределение. В частности, в функциях плотности диагональных элементов этой матрицы возникает вырожденная (конфлюэнтная) гипергеометрическая функция второго рода (функция Трикоми).

3.7 Выбор расположения активов в векторе доходностей

Согласно Теореме 2, маргинальные функции плотности распределения компонент вектора Z , имеющего стандартизованное t -распределение с вектором степеней свободы, записываются в виде

$$f_{Z_j}(z_j) = C_j \times {}_jF_{j-1} \left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}, \dots, a_d - \frac{d-2}{2}; a_{d-j+2} - \frac{d-j-1}{2}, \dots, a_d - \frac{d-3}{2}; -\frac{z_j^2}{2} \right),$$

где

$$C_j = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma \left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2} \right)}{\Gamma \left(a_{d-j+1} - \frac{d-j}{2} \right)} \prod_{k=d-j+2}^d \frac{\Gamma \left(a_k - \frac{k-2}{2} \right)^2}{\Gamma \left(a_k - \frac{k-3}{2} \right) \Gamma \left(a_k - \frac{k-1}{2} \right)}$$

для $j = 1, \dots, d$.

Заметим, что если для функции плотности последнего компонента

$$f_{Z_d}(z) = C_d \times {}_dF_{d-1} \left(a_1 + \frac{1}{2}, a_2, a_3 - \frac{1}{2}, \dots, a_d - \frac{d-2}{2}; a_2 + \frac{1}{2}, a_3, a_4 - \frac{1}{2}, \dots, a_d - \frac{d-3}{2}; -\frac{z^2}{2} \right)$$

ввести ограничение $a_1 = a_2 = \dots = a_r$, где $r = 2, \dots, d$, получим

$$f_{Z_d}(z_d) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma \left(a_1 + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma(a_1)} \prod_{k=2}^d \frac{\Gamma \left(a_k - \frac{k-2}{2} \right)^2}{\Gamma \left(a_k - \frac{k-3}{2} \right) \Gamma \left(a_k - \frac{k-1}{2} \right)} \times$$

$$\times {}_dF_{d-1} \left(a_r + \frac{1}{2}, a_r, a_r - \frac{1}{2}, \dots, a_r - \frac{r-3}{2}, a_r - \frac{r-2}{2}, a_{r+1} - \frac{r-1}{2}, \dots, a_d - \frac{d-2}{2}; \right);$$

$$\begin{aligned}
& ; a_r + \frac{1}{2}, a_r, a_r - \frac{1}{2}, \dots, a_r - \frac{r-3}{2}, a_{r+1} - \frac{r-2}{2}, \dots, a_d - \frac{d-3}{2}; -\frac{z^2}{2} \Big) = \\
& = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(a_r - \frac{r-2}{2}\right)}{\Gamma\left(a_r - \frac{r-1}{2}\right)} \prod_{k=r+1}^d \frac{\Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)^2}{\Gamma\left(a_k - \frac{k-3}{2}\right)\Gamma\left(a_k - \frac{k-1}{2}\right)} \times \\
& \times {}_{d-r+1}F_{d-r}\left(a_r - \frac{r-2}{2}, a_{r+1} - \frac{r-1}{2}, \dots, a_d - \frac{d-2}{2}; a_{r+1} - \frac{r-2}{2}, \dots, a_d - \frac{d-3}{2}; -\frac{z^2}{2}\right) = \\
& = C_{d-r+1} \times {}_{d-r+1}F_{d-r}\left(a_r - \frac{r-2}{2}, a_{r+1} - \frac{r-1}{2}, \dots, a_d - \frac{d-2}{2}; a_{r+1} - \frac{r-2}{2}, \dots, a_d - \frac{d-3}{2}; -\frac{z^2}{2}\right) = \\
& = f_{Z_{d-r+1}}(z),
\end{aligned}$$

где использованы Лемма 4 о независимости значения обобщенной гипергеометрической функции от расположения параметров внутри групп, а также Лемма 5 о понижении порядка данной функции.

Таким образом, $f_{Z_d}(z) \Big|_{a_1=a_2=\dots=a_r} = f_{Z_{d-r+1}}(z)$, то есть

$$f_{Z_1}(z) = f_{Z_d}(z) \Big|_{a_1=a_2=\dots=a_d}$$

$$f_{Z_2}(z) = f_{Z_d}(z) \Big|_{a_1=a_2=\dots=a_{d-1}}$$

...

$$f_{Z_{d-2}}(z) = f_{Z_d}(z) \Big|_{a_1=a_2=a_3}$$

$$f_{Z_{d-1}}(z) = f_{Z_d}(z) \Big|_{a_1=a_2},$$

что приводит маргинальные распределения компонент вектора Z к одинаковой функциональной форме. В таком представлении данные распределения отличаются лишь ограничениями на параметры.

Пусть имеются временные ряды доходностей d активов $\{r_{1t}\}_{t=1}^T, \dots, \{r_{dt}\}_{t=1}^T$, и необходимо определить порядок следования активов в векторе доходностей r_t , который моделируется с помощью многомерного t -распределения с вектором степеней свободы.

Для доходности каждого актива j рассмотрим одномерный аналог многомерной модели для вектора доходностей r_t . В случае VAR(1)-BEKK(1,1) и VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) моделей, рассмотренных в главах 1 и 2 соответственно, одномерным аналогом является, например, модель AR(1)-GARCH(1,1)³⁸, которая запишется в следующем виде

$$\begin{aligned} r_{jt} &= \mu_{jt} + \varepsilon_{jt} \\ \varepsilon_{jt} &= \sigma_{jt} \eta_j \\ \mu_{jt} &= \mu_{0j} + \mu_{1j} r_{jt-1} \\ \sigma_{jt}^2 &= \delta_{0j} + \delta_{1j} \varepsilon_{jt}^2 + \delta_{2j} \sigma_{jt-1}^2, \end{aligned}$$

где μ_{jt} и σ_{jt} – условное ожидание и дисперсия доходности r_{jt} в момент времени t , ε_{jt} – шок доходности в момент t и η_j – его нормированная версия. При этом для η_j полагаем

$$\eta_j = Y_j / \sqrt{\frac{2}{2a_1^j - 1} \prod_{i=0}^{d-1} \frac{2a_{d-i}^j - d + i}{2a_{d-i}^j - d + i - 1}},$$

где Y_j имеет функцию плотности распределения

$$f_{Y_j}(y_j) = C_d \times {}_d F_{d-1} \left(a_1^j + \frac{1}{2}, a_2^j, a_3^j - \frac{1}{2}, \dots, a_d^j - \frac{d-2}{2}; a_2^j + \frac{1}{2}, a_3^j, a_4^j - \frac{1}{2}, \dots, a_d^j - \frac{d-3}{2}; -\frac{y_j^2}{2} \right),$$

то есть функцию плотности $f_{Z_d}(y_j)$ с параметрами a_1^j, \dots, a_d^j .

Актив j следует поставить на место k в векторе доходностей r_t , если $f_{Y_j}(y_j)$ с параметрами a_1^j, \dots, a_d^j близко к $f_{Z_k}(y_j)$ с параметрами $a_{d-k+1}^j, \dots, a_d^j$, то есть если $f_{Z_d}(y_j)$ с параметрами a_1^j, \dots, a_d^j близко к $f_{Z_d}(y_j) \Big|_{a_1^j = a_2^j = \dots = a_{d-k+1}^j}$. Таким образом, степень соответствия актива j

³⁸ Для условной дисперсии доходности можно также рассматривать и другие одномерные GARCH модели. Широкий обзор таких моделей приведен в работе (Росси, 2010). См. также книгу (Gourieroux, 1997).

месту k в векторе доходностей определяется степенью выполнения ограничений на параметры $a_1^j = a_2^j = \dots = a_{d-k+1}^j$. Соответственно, возможен следующий алгоритм подбора расположения активов в векторе доходностей:

1. Для каждого актива $j=1, \dots, d$ оценивается приведенная выше одномерная модель с использованием временного ряда $\{r_{jt}\}_{t=1}^T$.
2. Для каждой полученной модели $j=1, \dots, d$ проверяется, в какой мере выполнены ограничения на параметры $a_1^j = a_2^j = \dots = a_{d-k+1}^j$ для $k=1, \dots, d-1$. Эта проверка может быть эвристической или основываться на стандартных тестах отношения правдоподобия либо других тестах. В результате проверки некоторые ограничения вида $a_1^j = a_2^j = \dots = a_{d-k+1}^j$ признаются выполненными. Среди них выбирается ограничение с минимальным k и активу j присваивается номер k .
3. Если по результатам шагов 1 и 2 некоторые активы претендуют на одно и то же место в векторе доходностей, то допускаются несколько возможных порядков расположения активов. В этом случае для всех полученных порядков расположения оцениваются соответствующие многомерные модели. Данные модели могут затем дополнительно сравниваться на основе точности прогнозов доходностей активов либо исходя из других показателей, например, динамики стоимости оптимальных портфелей.

В представленном алгоритме выбора расположения активов в векторе доходностей необходимо оценить d моделей и проверить не более чем $d-1$ ограничений для каждой из них, а также, возможно, дополнительно сравнить несколько многомерных моделей. Данная процедура представляется существенно менее затратной, чем оценка и сравнение между собой $d!$ моделей размерности d .

3.8 Выводы

В данной главе были выведены общая формула моментов многомерного t -распределения с вектором степеней свободы и условия существования моментов, одномерные маргинальные функции плотности и характеристические функций, а также предложены алгоритм симулирования t -распределения с вектором степеней свободы и алгоритм выбора расположения активов в векторе доходностей с данным распределением. Общая формула моментов позволяет, в частности, определить вид ковариационной матрицы, который необходим для построения многомерных GARCH моделей на основе t -распределения с вектором степеней свободы. Эта формула использовалась при построении многомерных моделей доходностей в главах 1 и 2. Формулы одномерных маргинальных функций плотности необходимы для построения копулы на основе t -распределения с вектором степеней свободы, чему посвящена глава 5. Предложенный алгоритм симулирования многомерного t -распределения с вектором степеней свободы может использоваться в задачах, требующих применение метода Монте-Карло. Наконец, алгоритм выбора расположения активов в векторе доходностей, имеющем многомерное t -распределение с вектором степеней свободы, может использоваться при построении различных многомерных моделей финансовых доходностей.

Глава 4. Введение скошенности в многомерное t -распределение с вектором степеней свободы

4.1 Постановка задачи

В настоящей главе рассматривается задача модификации многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, позволяющая дополнительно моделировать отрицательные скошенности, присущие многим эмпирическим распределениям финансовых рынков.³⁹ Согласно результатам, полученным в главе 3, многомерное t -распределение с вектором степеней свободы имеет симметричные одномерные маргинальные функции плотности, а значит не способно учитывать отрицательную скошенность распределений финансовых доходностей, которая довольно часто наблюдается на практике. По этой причине в настоящей главе предложено обобщение t -распределения с вектором степеней свободы, призванное решить проблему симметрии маргинальных распределений. Строится так называемое многомерное t -распределение с вектором параметров скошенности и вектором степеней свободы. Это распределение является обобщением многомерного скошенного t -распределения со скалярным параметром степеней свободы, предложенного в работе (Bauwens, Laurent, 2005).

Глава 4 имеет следующую структуру. В разделе 4.2 приведен небольшой обзор многомерных асимметричных распределений, рассматриваемых в финансовой эконометрике. Раздел 4.3 посвящен построению скошенного многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, а раздел 4.4 – его применению в многомерных моделях финансовых доходностей вида VAR-MGARCH, которые

³⁹ Результаты главы 4 представлены в работе (Балаев, 2011а).

рассматривались в главах 1 и 2. Наконец, раздел 4.5 содержит выводы данной главы.

4.2 Литература о многомерных скошенных распределениях

Одномерное распределение случайной величины будем называть отрицательно (положительно) скошенным, если его третий центральный момент отрицателен (положителен). Данное определение скошенности не является единственно возможным (например, ее можно определить как несовпадение медианы и среднего значения). Однако такое определение наиболее удобно, поскольку позволяет сформулировать один из основных эмпирических фактов о финансовых доходностях достаточно просто: одномерное распределение доходностей имеет отрицательную скошенность. Кроме того, данное определение соответствует типичному пониманию скошенности в финансовой эконометрике.

Поскольку одномерное распределение доходностей какого-либо актива, как правило, отрицательно скошено, совместное распределение доходностей нескольких активов нужно строить таким образом, чтобы при некоторых значениях его параметров возникала скошенность по всем компонентам случайного вектора. Распределение, удовлетворяющее этому требованию, назовем многомерным скошенным распределением. Подчеркнем, что возможность наличия скошенности по всем компонентам существенна. Если в распределении, в силу его особенностей, возможна скошенность только по одной или нескольким (но не всем одновременно) компонентам вектора, то на практике его можно использовать только в узком кругу ситуаций, когда доходность одного или нескольких активов имеют распределение с нулевой

скошенностью. Практическая ценность таких распределений невелика.

Прежде чем перейти к рассмотрению многомерного скошенного t -распределения с вектором степеней свободы, кратко остановимся на некоторых других многомерных скошенных распределениях, используемых в финансовой эконометрике.

Достаточно широкий класс скошенных эллиптических функций плотности предложен в работе (Branco, Dey, 2001). Данный класс функций плотности был получен на основе обобщения многомерного скошенного нормального распределения, рассмотренного в работах (Azzalini, Dalla Valle, 1996) и (Azzalini, Capitanio, 1999).

В статье (Fernandez et al., 1995) предложен класс многомерных непрерывных распределений, известных как ν -сферические. Такие распределения имеют существенное ограничение для применения в моделях финансовых доходностей, поскольку скошенность вдоль каждой оси координат в них предполагается одинаковой.

Скошенность и тяжелые хвосты способны учитывать также и многомерные устойчивые распределения (см., например, (Samorodinsky, Taqqu, 1994)). Однако функцию плотности этих распределений, как правило, нельзя записать в аналитическом виде, и для них известна лишь характеристическая функция, что значительно затрудняет оценивание методом максимального правдоподобия.

Широкий класс многомерных распределений представляют поли t -распределения. Этому классу принадлежит и многомерное t -распределение со скалярным параметром степеней свободы. Поли t -распределения получаются как апостериорные распределения в байесовском анализе, как например, в работе (Dreze, 1978), и допускают скошенность, тяжелые хвосты, а также могут иметь несколько модальных точек. Однако соотношение параметров и

моментов данных распределений достаточно сложно. Это приводит к тому, что оценивание параметров поли t -распределений, даже для выборки из независимых одинаково распределенных случайных величин, значительно затруднено на практике.

Многомерные скошенные распределения могут строиться на основе заданных одномерных скошенных распределений. Так, в работе (Ferreira, Steel, 2003) многомерные скошенные распределения строятся путем линейного преобразования случайного вектора, компоненты которого независимы и имеют широко известные одномерные скошенные распределения.

Скошенные распределения также могут быть построены как смеси конечного числа симметричных распределений, у которых различаются вектора средних значений. Например, в работе (Vlaar, Palm, 1993) для моделирования шоков используется смесь двух многомерных нормальных распределений. Недостатком смесей распределений, хотя они и получили достаточно широкое распространение, является большое количество параметров.

В работах (Jones, 2001; 2002) рассматриваются многомерные плотности, получившие название многомерных функций плотности Джонса. Эти функции плотности предполагают только положительную ковариацию между компонентами случайного вектора, и поэтому не всегда применимы при моделировании финансовых доходностей.

В одной из моделей в главе 1 использовалась функция плотности Эджворта-Саргана, которая получается урезанием многомерного разложения Грама-Шарлье после третьего члена. Данная функция плотности также учитывает асимметрию и тяжелые хвосты. В работе (Mauleon, Perote, 1999) показано, что функция плотности Эджворта-

Саргана дает хорошие результаты при моделировании распределения шоков в двумерных GARCH моделях.

Многомерное скошенное t -распределение со скаляром степеней свободы, рассматриваемое, в частности, в работе (Bauwens, Laurent, 2005), дает достаточно хорошие эмпирические результаты по сравнению с другими гибкими многомерными распределениями. Например, в работе (Балаев, 2011б) показано, что в задаче предсказания условного распределения доходностей многомерное скошенное t -распределение дает более качественные прогнозы, чем многомерное скошенное нормальное распределение, скошенное обобщенное распределение ошибки и распределение Грама-Шарлье. В следующем разделе рассматривается многомерное скошенное t -распределение с вектором степеней свободы, которое позволяет учесть не только асимметрию маргинальных распределений доходностей, но и различия в толщине хвостов этих распределений.

4.3 Построение многомерного скошенного t -распределения

Пусть $x = (x_1, \dots, x_d)'$ и $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)'$. В выражении для функции плотности многомерного t -распределения с вектором степеней свободы (см. главу 3)

$$f_X(x) = C |A|^{\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2} (x - \mu)^{[d-j]'} (A^{[d-j]})^{-1} (x - \mu)^{[d-j]} \right)^{b_j - b_{j+1}} \quad (4.1)$$

положим $x_i = \mu_i$ для $i \neq j$, $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, d$. Тогда, очевидно, что получившаяся функция плотности будет симметрична по x_j относительно μ_j , то есть распределение компоненты X_j при условии $X_i = \mu_i$, $i \neq j$ симметрично вокруг μ_j , и, в частности, не имеет отрицательной скошенности. Следовательно, для использования

многомерного t -распределения с вектором степеней свободы в моделировании финансовых доходностей, его желательно модифицировать так, чтобы оно допускало скошенность. В этом разделе приводится одна из возможных модификаций на основе процедуры введения скошенности в симметричное многомерное распределение, предложенной в работе (Bauwens, Laurent, 2005).

Для 2^d ортантов пространства \mathbb{R}^d введем обозначения O_1, \dots, O_{2^d} (порядок нумерации не имеет значения), и для каждого ортанта O_α определим следующие величины $\pi_1^\alpha, \dots, \pi_d^\alpha$:

$$\pi_i^\alpha = \begin{cases} -1, & \text{если } O_\alpha \text{ соответствует } x_i \geq 0 \\ 1, & \text{если } O_\alpha \text{ соответствует } x_i < 0 \end{cases}$$

Пусть $f(x)$ – заданная на \mathbb{R}^d функция плотности некоторого d -мерного распределения, которое порождает симметричные (вокруг нуля) одномерные условные распределения. Далее, пусть $f(x)$ такова, что для любых α и β выполнено

$$\int_{O_\alpha} f(x) dx = \int_{O_\beta} f(x) dx = 2^{-d}, \quad (4.2)$$

т.е. вероятностная масса каждого из ортантов одинакова. Введем вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)'$ параметров скошенности вдоль каждой оси, где $\xi_i > 0$, $i = 1, \dots, d$. На основе функции $f(x)$ и вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)'$ предложенная в (Bauwens, Laurent, 2005) процедура строит функцию $f^s(x|\xi)$ плотности многомерного скошенного распределения. Эта процедура представляет собой следующее преобразование исходной функции плотности

$$f^s(x|\xi) = 2^d \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \right) f(x^*), \quad (4.3)$$

где

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_d^*)', \quad x_i^* = x_i \xi_i^{I_i(x)}, \quad i = 1, \dots, d, \quad I_i(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x_i \geq 0 \\ 1, & \text{если } x_i < 0 \end{cases}.$$

Тот факт, что полученная функция $f^s(x|\xi)$ является функцией плотности, может быть установлен непосредственно:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f^s(x|\xi) dx &= 2^d \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \right) \int_{\mathbb{R}^d} f(x^*) dx = 2^d \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \right) \sum_{\alpha=1}^{2^d} \int_{O_\alpha} f(x^*) dx = \\ &= 2^d \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \right) \sum_{\alpha=1}^{2^d} \int_{O_\alpha} \left(\prod_{i=1}^d \xi_i^{-I_i(x)} \right) f(x^*) dx^* = 2^d \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \right) \sum_{\alpha=1}^{2^d} \left(\xi_1^{\pi_1^\alpha} \dots \xi_d^{\pi_d^\alpha} \int_{O_\alpha} f(x^*) dx^* \right) = \\ &= 2^d \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \right) \sum_{\alpha=1}^{2^d} \xi_1^{\pi_1^\alpha} \dots \xi_d^{\pi_d^\alpha} \frac{1}{2^d} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{2^d} \xi_1^{\pi_1^\alpha + 1} \dots \xi_d^{\pi_d^\alpha + 1}}{\prod_{i=1}^d (1 + \xi_i^2)} = 1, \end{aligned}$$

где использовано предположение (4.2). В работе (Bauwens, Laurent, 2005) используется более сильное предположение о так называемой М-симметрии распределения, согласно которому для любой $d \times d$ диагональной матрицы Q , каждый элемент диагонали которой равен 1 или -1, и любого x выполнено $f(Qx) = f(x)$. С точки зрения приложений, вопрос о том, использовать ли предположение М-симметрии или предположение (4.2), несущественен.

Преобразование (4.3), очевидно, состоит в различном масштабировании положительных и отрицательных значений каждой из компонент вектора X . Случай $\xi_i > 1$ соответствует положительной скошенности по компоненте X_i , а случай $\xi_i < 1$ – отрицательной скошенности.

Преимуществом данной процедуры является простота реализации на практике при использовании метода максимального правдоподобия и применимость к широкому классу распределений: она позволяет ввести скошенность в любое многомерное

распределение с непрерывной функцией плотности, удовлетворяющее условию (4.2). Отметим, однако, что преобразованная функция плотности $f^s(x|\xi)$ не является дифференцируемой в точке $x=0$, хотя и является в ней непрерывной, если исходная функция $f(x)$ непрерывна в $x=0$. При этом, если функция $f(x)$ дифференцируема по своим параметрам, то функция правдоподобия, соответствующая $f^s(x|\xi)$, также дифференцируема по параметрам и может быть максимизирована градиентными методами, что важно на практике.

В работе (Bauwens, Laurent, 2005) преобразование (4.3) применяется к стандартизованному (со скалярной ковариационной матрицей) многомерному t -распределению со скалярным параметром степеней свободы. Полученное распределение авторы называют стандартизованным многомерным скошенным t -распределением и используют его для моделирования динамики шоков в многомерных GARCH моделях. В (Bauwens, Laurent, 2005) эмпирически устанавливается, что при введении скошенности с помощью преобразования (4.3) в многомерное t -распределение со скалярным параметром степеней свободы у соответствующей многомерной GARCH модели улучшается предсказательная способность вне выборки.

При произвольной положительно определенной матрице A для функции плотности (4.1) может быть нарушено условие (4.2). Поэтому, прежде чем применить преобразование (4.3), будем предполагать, что $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_d)$, где $A_i > 0$, $i = 1, \dots, d$. Матрица A частично определяет ковариационную матрицу вектора X . В финансовых приложениях динамика условной ковариационной матрицы часто моделируется отдельно от эффектов скошенности и тяжелых хвостов. Поэтому ограничение $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_d)$ не

означает, что все условные ковариации между компонентами вектора доходностей равны нулю.

При сделанных предположениях применим преобразование (4.3) к функции плотности (4.1). Полученная функция плотности, допускающая скошенность по каждой компоненте вектора X , имеет вид

$$f_X^s(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} |A|^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1+\xi_i^2} \left(1 + \frac{1}{2} x^{*[d-i+1]'} (A^{[d-i+1]})^{-1} x^{*[d-i+1]}\right)^{b_{i-1}-b_i} \quad (4.4)$$

где $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_d)$ и

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_d^*)'; \quad x_i^* = (x_i - \mu_i) \xi_i^{I_i}, \quad i = 1, \dots, d; \quad I_i = \begin{cases} -1, & \text{если } x_i \geq \mu_i \\ 1, & \text{если } x_i < \mu_i \end{cases}.$$

Распределение, отвечающее функции плотности (4.4), будем называть многомерным скошенным t -распределением с вектором степеней свободы. Это распределение задается вектором расположения $\mu \in \mathbb{R}^d$, диагональной положительно определенной матрицей A , вектором направлений скошенности ξ с положительными компонентами и вектором степеней свободы $a = (a_1, \dots, a_d)'$, где $a_j > \frac{j-1}{2}$, $j = 1, \dots, d$, $a_0 = 0$ и $a_{d+1} = \frac{d+1}{2}$, а для вектора $b = (b_1, \dots, b_d)'$ имеем $b_j = a_j + \frac{1}{2}$, $j = 1, \dots, d$, $b_0 = 0$ и $b_{d+1} = \frac{d+1}{2}$.

Положив в формуле (4.4) $b_1 = \dots = b_d = \frac{\nu+d}{2}$ и $A = I_d$, получим функцию плотности стандартизованного многомерного скошенного t -распределения со скалярным параметром степеней свободы

$$g_X^s(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1+\xi_i^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} x^{*'} x^*\right)^{-\frac{\nu+d}{2}}$$

Такая функция плотности в несколько иной параметризации рассмотрена в работе (Bauwens, Laurent, 2005).

В таблице 4.1 приведены коэффициенты асимметрии и эксцесса распределений дневных логарифмических доходностей мировых фондовых индексов, рассмотренных в главе 1 (использована та же выборка, что и в главе 1).

Таблица 4.1 Асимметрия и эксцесс распределений доходностей

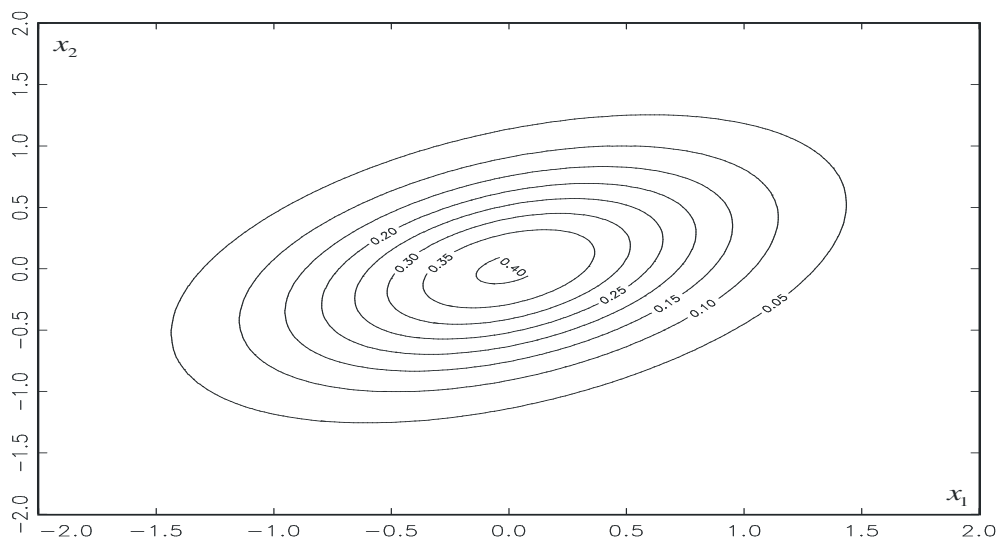
	S&P 500	FTSE 100	CAC 40	DAX	Hang Seng	Nikkei 225
Асимметрия	-0,23	0,01	0,11	-0,01	-0,01	-0,17
Эксцесс	7,59	7,32	5,21	5,57	9,45	5,34

Таблица показывает, что некоторые фондовые индексы существенно различаются по показателю толщины хвостов распределения доходностей (эксцессу) и степени скошенности (коэффициенту асимметрии). Например, большие различия по обоим показателям наблюдаются между индексами Hang Seng (Китай) и Nikkei 225 (Япония). Следовательно, при моделировании совместного распределения доходностей данных индексов желательно использовать распределение, допускающее разную меру скошенности и толщины хвостов для различных индексов. Именно таким и является многомерное скошенное t -распределение с вектором степеней свободы.

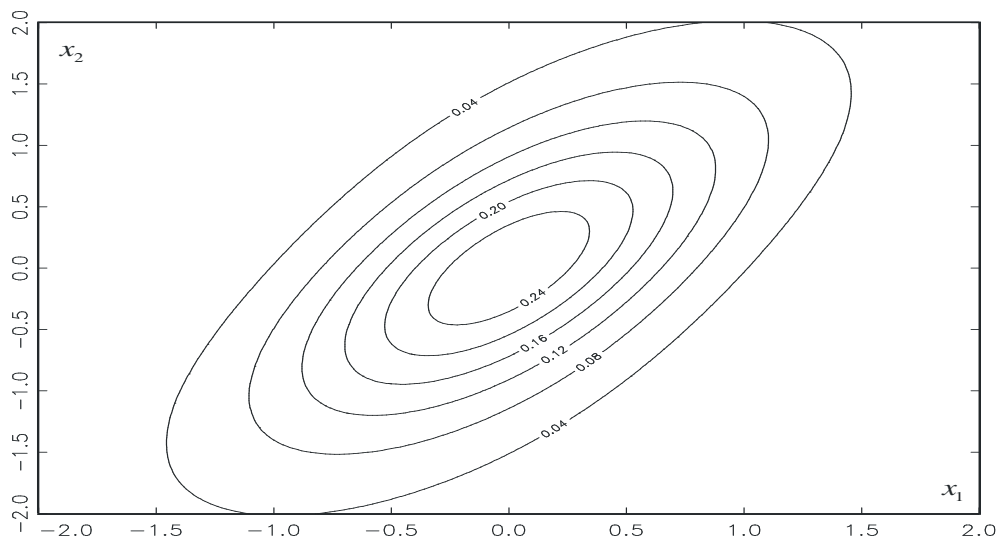
На рисунках 4.1 и 4.2 приведены линии уровня двумерной функции плотности (4.4) с положительной ковариацией между доходностями (плотность распределения вектора X , умноженного на $H^{1/2}$, где H — ковариационная матрица 2×2 с положительной ковариацией). Предполагается, что $\mu = 0$, $A = I_d$, и рассмотрены случаи различных ξ и a , т.е. различной скошенности и толщины хвостов по компонентам вектора X .

Рис. 4.1 Линии уровня скошенного t -распределения с вектором степеней свободы - 1

Нет скошенности или тяжелых хвостов по x_1 и x_2



Тяжелые хвосты по x_1



Тяжелые хвосты по x_2

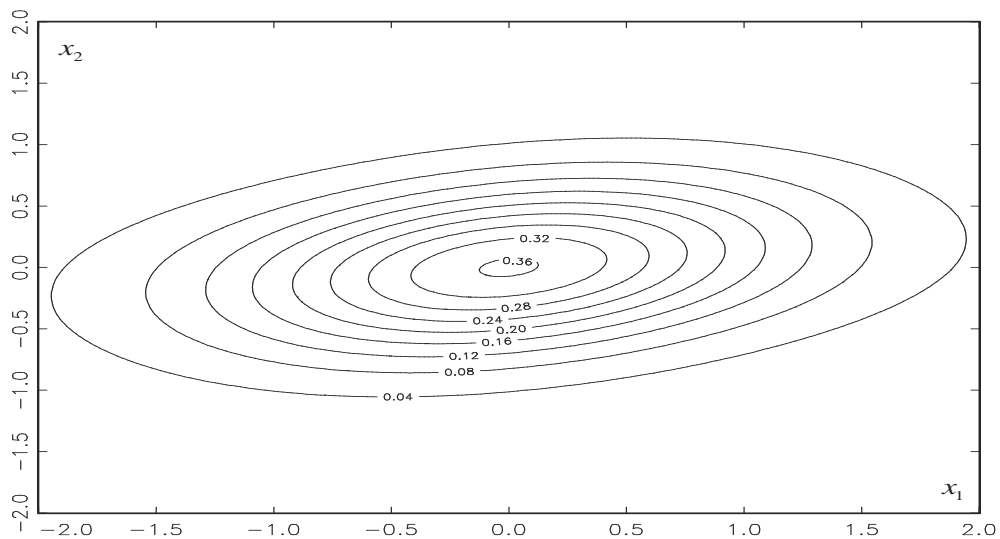


Рис. 4.2 Линии уровня скошенного t -распределения с вектором степеней свободы - 2

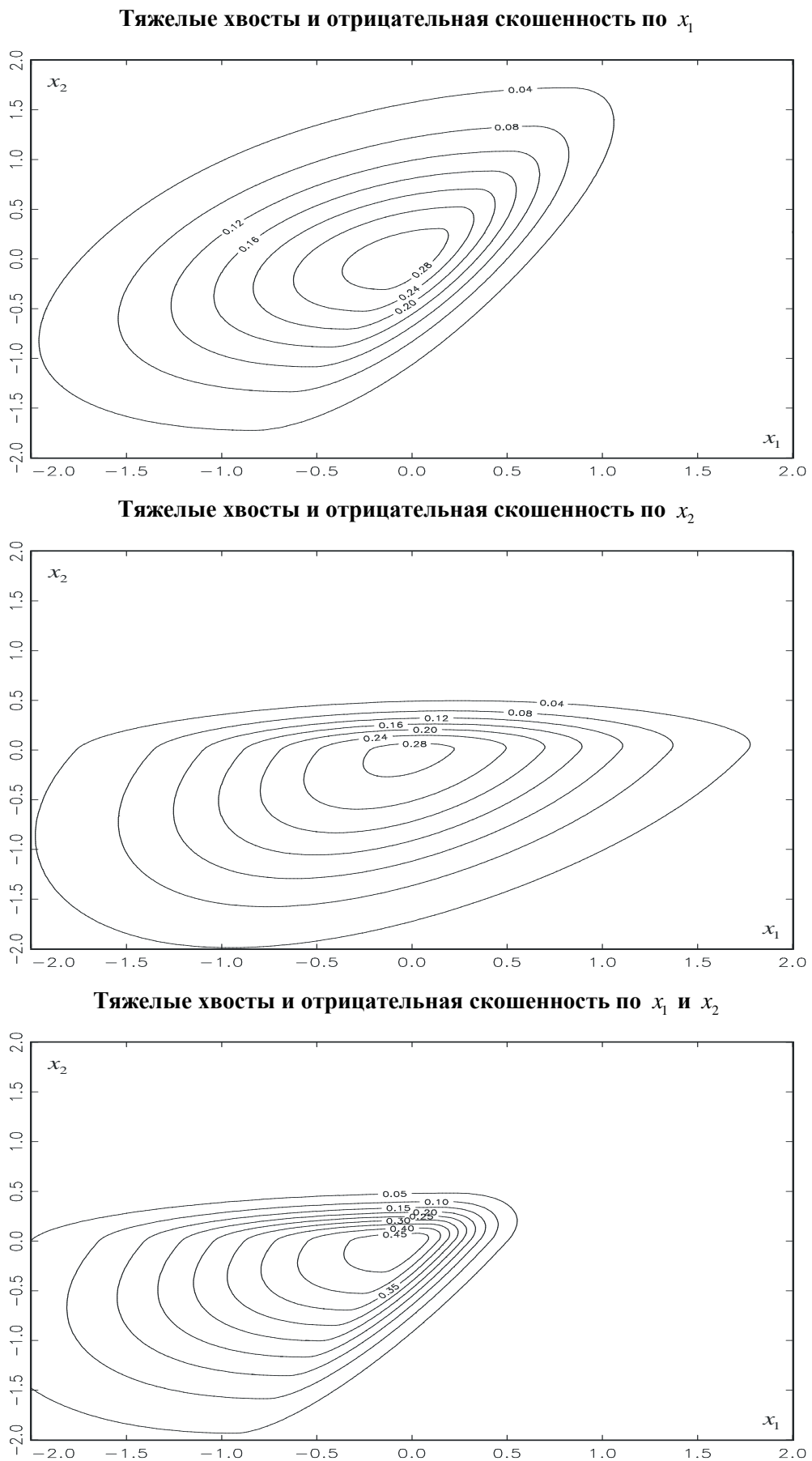


Рис. 4.1 и 4.2 показывают, что построенное многомерное скошенное t -распределение с вектором степеней свободы, задаваемое функцией плотности (4.4), достаточно гибко, то есть способно учитывать особенности распределения доходностей каждого из активов в широком круге ситуаций. В частности, оно может быть использовано в случае, когда меры скошенности и толщины хвостов для доходностей различных активов существенно различаются, как например, для индексов Hang Seng и Nikkei 225.

4.4 Применение в моделях VAR-MGARCH

В главе 1 было показано, что между доходностями основных мировых фондовых индексов существуют статистически значимые динамические связи, а в главе 2 подобные связи были выделены для доходностей акций российских компаний. В первом случае наличие динамических связей объясняется различиями во времени проведения торгов, во втором – существованием устойчивых шаблонов поведения инвесторов в условиях роста стоимости тех или иных акций.

Пусть, как и в главах 1 и 2, для учета динамических связей используется простейшая векторная авторегрессия первого порядка:

$$r_t = E_{t-1}r_t + \varepsilon_t, \quad (4.5)$$

$$E_{t-1}r_t = c + Qr_{t-1}. \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2} X, \quad (4.7)$$

где r_t есть d -мерный вектор доходностей некоторых активов в момент t , c и Q – произвольный d -мерный вектор и $d \times d$ матрица соответственно, H_t – условная ковариационная матрица вектора шоков ε_t с точностью до умножения на положительно определенную матрицу, а ковариационная матрица вектора X постоянна.

Будем также считать, что для учета индивидуальной кластеризации волатильности и динамических связей между волатильностями используется любая известная многомерная GARCH модель. Например, в главе 1 применялась модель BEKK(1,1):

$$H_t = \Omega\Omega' + A\varepsilon_t\varepsilon_t'A' + BH_{t-1}B', \quad (4.8)$$

где A и B — произвольные $d \times d$ матрицы и Ω — нижняя треугольная матрица, а в главе 2 использовалась модель DDC-GARCH(1,1):

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (4.9)$$

$$\sigma_{t,i}^2 = \omega_i + \alpha_i \varepsilon_{t-1,i} + \beta_i \sigma_{t-1,i}^2 \quad i = 1, \dots, d \quad (4.10)$$

$$Q_t = (1 - a - b)S + a\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}' + bQ_{t-1} \quad (4.11)$$

$$R_t = \text{diag}\{Q_{t,11}^{-1/2}, \dots, Q_{t,dd}^{-1/2}\} Q_t \text{diag}\{Q_{t,11}^{-1/2}, \dots, Q_{t,dd}^{-1/2}\} \quad (4.12)$$

где $D_t = \text{diag}\{\sigma_{t,1}, \dots, \sigma_{t,d}\}$ — матрица условных стандартных отклонений шоков, R_t — условная корреляционная матрица, Q_t — некоторая положительно определенная матрица, S — матрица безусловных корреляций вектора шоков ε_t , $a > 0$, $b > 0$, $a + b < 1$ и стартовая матрица Q_0 положительно определена.

Для завершения построения модели осталось задать условное распределение вектора X в уравнении (4.7). С учетом эмпирических свойств распределений финансовых доходностей, желательно, чтобы условное распределение вектора X допускало возможность отрицательной скошенности и тяжелых хвостов по каждой компоненте X . При этом, поскольку каждый актив имеет свою специфику, желательно, чтобы для разных активов допускалась различная мера скошенности и тяжести хвостов. Рассмотренное в предыдущем разделе многомерное t -распределение с вектором направлений скошенности и вектором степеней свободы как раз

допускает такие различия и этим выгодно отличается от многих других многомерных распределений, используемых при моделировании динамики финансовых доходностей. Соответственно, будем считать, что распределение вектора X задано функцией плотности (4.4). При этом предварительно полагаем $\mu = 0$ и $A = I_d$, поскольку вектор условных средних уже задан выражением (4.6), а условная ковариационная матрица – выражением (4.8), (4.9) или им подобным.

Таким образом, полная модель условного распределения вектора финансовых доходностей r_t описывается уравнениями (4.4) – (4.7) при $\mu = 0$ и $A = I_d$ вместе с многомерной GARCH моделью (4.8), (4.9) – (4.12) или другого вида. Построенная модель учитывает динамические связи между доходностями различных активов, стандартные GARCH эффекты и связи между волатильностями различных доходностей, а также допускает скошенность и тяжелые хвосты для одномерных распределений доходностей. При этом для каждого актива мера скошенности и толщина хвостов задаются индивидуально.

4.5 Выводы

В настоящей главе предложена модификация многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, позволяющая моделировать отрицательную скошенность. Построено многомерное t -распределение с вектором параметров скошенности и вектором степеней свободы и показана целесообразность его применения в финансовых приложениях, когда меры скошенности и толщины хвостов для доходностей различных активов существенно разнятся. В качестве примера практического использования многомерного

скошенного t -распределения с вектором степеней свободы рассмотрено его применение в VAR-MGARCH моделях, состоящих из векторной авторегрессии и многомерной GARCH-структуры. Данная конструкция может применяться для описания динамики многомерных финансовых временных рядов, существенно различающихся по динамике условных моментов 1 – 4 порядка.

Глава 5. t -копула с вектором степеней свободы

5.1 Постановка задачи

Задачей данной главы является построение копулы, основанной на многомерном t -распределении с вектором степеней свободы.⁴⁰ О перспективах и значении подхода, связанного с использованием копул, сказано во введении. Копула, построенная на основе классического многомерного t -распределения со скаляром степеней свободы, называемая t -копулой, позволяет учитывать наличие так называемой хвостовой зависимости между доходностями различных активов, то есть зависимости этих доходностей в области, где они принимают экстремальные положительные или отрицательные значения. Способность учитывать хвостовую зависимость – не менее важное свойство многомерного t -распределения, чем возможность учета тяжелых хвостов маргинальных распределений.

Хвостовые зависимости между компонентами случайного вектора с классической t -копулой определяются одним общим для всех активов скалярным параметром степеней свободы и параметрами корреляций, которые определяют различия хвостовых зависимостей. Однако на практике хвостовые зависимости могут достаточно сильно различаться для различных пар активов, и параметров корреляции может быть недостаточно для учета этих различий. Таким образом, классическая t -копула со скалярным параметром степеней свободы представляется недостаточно гибкой для практического применения. По этой причине в настоящей главе предложена t -копула с вектором степеней свободы, которая дает больше свободы для моделирования различий хвостовых зависимостей за счет наличия индивидуального

⁴⁰ Результаты главы 5 представлены в работе (Балаев, 2014).

параметра степеней свободы у каждой компоненты случайного вектора.

Глава 5 построена следующим образом. В разделе 5.2 приведен обзор литературы, посвященной свойствам классической t -копулы и ее приложениям. В разделе 5.3 рассмотрена t -копула с вектором степеней свободы. Раздел 5.4 посвящен стандартизованной t -копуле с вектором степеней свободы, более удобной с вычислительной точки зрения. В разделе 5.5 рассматривается применение t -копулы с вектором степеней свободы в моделях VAR-MGARCH. Раздел 5.6 содержит алгоритм симулирования случайных векторов, имеющих t -копулу с вектором степеней свободы. Наконец, в разделе 5.7 представлены выводы данной главы.

5.2 Литература о классической t -копуле

Исследованию теоретических свойств t -копулы, а также ее эмпирическим приложениям посвящено достаточно много работ. При этом в эмпирических работах в основном рассматривается применение t -копулы к многомерному моделированию финансовых данных и составлению оптимальных портфелей, однако имеются и другие ее приложения.

Так называемые коэффициенты хвостовой зависимости (см., например, (Фантаццини, 2011б)) многомерного распределения показывают меру зависимости между компонентами случайного вектора в “правом верхнем” и “левом нижнем” многомерных хвостах распределения. Они используются для анализа зависимости случайных величин, с некоторой вероятностью принимающих экстремальные значения. В статье (Chan, Li, 2008) анализируется хвостовая зависимость для многомерного t -распределения. В

указанной работе представлены формулы коэффициентов хвостовой зависимости, которые содержат совместные моменты многомерного нормального распределения, лежащего в основе многомерного t -распределения. Авторы анализируют влияние параметров распределения на коэффициенты хвостовой зависимости и рассматривают некоторые примеры симуляций.

В работе (Frahm et al., 2003) анализируются копулы, построенные на основе эллиптических многомерных распределений, и в частности, t -копула. В работе показано, что коэффициенты хвостовой зависимости эллиптических распределений могут быть вычислены при известных коэффициентах ранговой корреляции Кендала и “индексе хвоста” (порядке затухания хвоста распределения по гиперболическому закону). При этом в работе установлено, что соответствующая формула коэффициентов хвостовой зависимости для t -распределения может использоваться и для любого другого эллиптического распределения. Используя этот результат, авторы показывают, что семейство копул, построенных на основе субгауссовского α -стабильного распределения (см., например, (Ortobelli et al., 2002)) не способно в полной мере учитывать хвостовую зависимость, наблюдающуюся в финансовых данных.

Работа (Demarta, McNeil, 2005) также посвящена теоретическим свойствам t -копулы, в особенности вопросам хвостовой зависимости. Используя представление многомерного t -распределения как смеси многомерных нормальных распределений, авторы строят две модификации t -копулы: так называемые скошенную t -копулу и сгруппированную t -копулу, которые дают больше гибкости при моделировании зависимостей случайных величин. В работе также предложена t -копула экстремальных значений – предельная копула вектора покомпонентных максимумов для последовательности

случайных векторов с многомерным t -распределением, и двумерная t -копула отрицательного хвоста – предельная копула вектора с двумерным t -распределением при условии, что обе компоненты вектора не превосходят некоторый общий последовательно снижающийся пороговый уровень. Авторы также показывают, что для практического применения эти копулы могут быть приближены копулами Гумбела и Клейтона соответственно.

Как было упомянуто в главах 1 и 2, использование метода максимального правдоподобия при оценке моделей, основанных на t -распределении, сопряжено с вычислительными проблемами. По этой причине в литературе также рассматриваются и технические аспекты максимизации функции правдоподобия на основе t -копулы. Например, существует достаточно эффективный алгоритм применения метода максимального правдоподобия – так называемая максимизация по частям, при которой функция правдоподобия разбивается на два слагаемых, максимизируемых итеративно посредством решения уравнений-условий первого порядка. Данный алгоритм относительно недавно начал применяться для оценки моделей на основе гауссовской копулы, а в работе (Zhang et al., 2011) он применяется к многомерным мета t -распределениям, основанным на t -копулах. Проводя симуляции, авторы показывают, что применительно к t -копуле алгоритм максимизации по частям превосходит некоторые стандартные алгоритмы по качеству полученных оценок.

Вопросу модификации t -копулы посвящена работа (Smith et al., 2012), в которой предложен вариант копулы на основе скошенного многомерного t -распределения. Данная копула, так же как и предложенная в (Demarta, McNeil, 2005), позволяет моделировать зависимость экстремальных значений с учетом асимметрии. Среди

обладающих этим достоинством копул скошенная t -копула является одной из немногих спецификаций, которые могут эффективно применяться на практике в многомерном случае. Оценка моделей на основе копул может быть сопряжена с вычислительными проблемами, если модель имеет большую размерность, маргинальные распределения являются дискретными или параметры копулы и маргинальных распределений оцениваются совместно. Для решения этих проблем в (Smith et al., 2012) предлагается использовать байесовский подход. Используя представление многомерного скошенного t -распределения как условно-нормального распределения, авторы применяют метод Монте-Карло с цепями Маркова для симулирования случайных векторов. Применение данного подхода в работе (Smith et al., 2012) продемонстрировано в двух эмпирических приложениях. В первом приложении рассмотрено моделирование региональных спотовых цен на электроэнергию в Австралии: эмпирический анализ выявляет наличие негауссовских маргинальных распределений и нелинейной межрегиональной зависимости между ценами. Во втором приложении, авторы анализируют зависимость между посещаемостью некоторых популярных веб-сайтов, и в этом примере маргинальные распределения являются дискретными. В обоих приложениях скошенная t -копула показывает значительно более качественное соответствие данным, чем альтернативные симметричные эллиптические копулы, что говорит об эффективности использования скошенной t -копулы вместе с байесовским подходом к оценке параметров.

В статье (Hörmann, Sak, 2010) рассматривается задача симулирования случайных векторов, распределение которых построено на основе t -копулы, с целью оценки какой-либо величины методом Монте-Карло. Если маргинальные распределения компонент

случайного вектора не сильно отличаются от нормального, а параметр степеней свободы t -копулы не слишком мал, то соответствующее многомерное распределение может быть приближено нормальным. Использование многомерного нормального распределения в задаче оценки какой-либо величины удобно, поскольку позволяет получить аналитическое или достаточно точное численное решение. По этой причине переменную с нормальным распределением удобно использовать в качестве контрольной случайной величины для понижения дисперсии оценки при использовании метода Монте-Карло. Однако в (Hörmann, Sak, 2010) продемонстрировано, что использование такой контрольной переменной для модели с t -копулой дает относительно небольшое понижение дисперсии оценки методом Монте-Карло. Как показывают авторы, причина – в несовершенстве стандартного алгоритма симулирования случайных векторов с многомерным t -распределением. В работе предложен альтернативный алгоритм симулирования многомерного t -распределения и показано, что его использование дает существенно большее понижение дисперсии оценок различных величин, чем использование стандартного алгоритма.

В работе (Diks et al., 1995) предложен тест на сравнение предсказательной способности двух конкурирующих копул в задаче многомерного прогнозирования (вопросы эмпирического подбора копулы рассматриваются также в (Фантаццини, 2011в)). Предложенный тест основан на информационном критерии Кульбака – Лейблера и может использоваться при достаточно общих предположениях, в том числе для невложенных копул. Применяя тест на данных о динамике обменного курса доллара США по отношению к другим мировым валютам, авторы показывают, что t -копула

является более предпочтительной спецификацией по сравнению с гауссовской копулой, а также копулами Гумбела и Клейтона.

t -копула также находит применение в задачах, связанных с построением оптимальных финансовых портфелей. Например, в работе (Sak et al., 2010) рассматривается задача вычисления вероятностей экстремальных значений доходностей портфелей, или так называемых хвостовых вероятностей. В качестве спецификации для маргинальных распределений авторы используют обобщенное гиперболическое распределение, а структура зависимости моделируется при помощи t -копулы. Точный расчет хвостовых вероятностей для такой модели представляется затруднительным, а использование стандартных методов симулирования сопряжено с вычислительными проблемами. В работе предлагается альтернативный алгоритм, включающий новый метод численного обращения функции при симулировании маргинальных распределений, а также некоторые другие элементы. Авторы показывают, что для рассматриваемой модели на основе t -копулы предложенный алгоритм симулирования дает ощутимую прибавку к точности вычисления хвостовых вероятностей.

Применение t -копулы для анализа рисков финансового портфеля рассмотрено также в работе (Kole et al., 2007). Авторы рассматривают некоторые тесты на качество подгонки, которые основаны на прямом сопоставлении копулы с имеющимися данными и могут применяться к копулам произвольной структуры и размерности. С помощью данных тестов авторы проводят эмпирические сравнения различных копул для портфелей, состоящих из акций, облигаций и недвижимости. В работе продемонстрировано, что модель на основе t -копулы лучше соответствует рассматриваемым данным, чем гауссовская копула и копула Гумбела. Показано, что по сравнению с t -

копулой гауссовская копула занижает вероятность одновременного экстремального падения цен активов, а копула Гумбела завышает ее. При этом гауссовская копула переоценивает выгоду от диверсификации финансового портфеля, а копула Гумбела – недооценивает.

Работа (Chan, Kroese, 2010) посвящена задаче оценки кредитного риска портфеля, состоящего из ссуд, облигаций и других финансовых активов. В качестве меры риска в работе рассматривается вероятность большой потери в стоимости портфеля на фиксированном временном промежутке. Для учета хвостовых зависимостей, которые отражают возможность наступления дефолта по нескольким активам одновременно, в работе используется t -копула. Авторы предлагают два симуляционных алгоритма с t -копулой для оценки вероятности больших потерь в стоимости портфеля и показывают, что данные алгоритмы превосходят существующие по качеству получаемых оценок. В работе также рассмотрена модель с асимметричной t -копулой и предложены методы ее оценивания.

t -копула может успешно использоваться для многомерного моделирования не только на финансовых, но и на товарных рынках. Так, в работе (Reboredo, 2011) t -копула применяется для анализа зависимости между мировыми ценами на нефть различной марки. В данной работе t -копула также превосходит копулы Гаусса, Гумбела, Клейтона и некоторые их модификации с точки зрения качества соответствия данным. Анализируя построенные модели зависимости цен на нефть на основе t -копул, автор оценивает степень глобализации мирового нефтяного рынка.

Статья (Trottini et al., 2011) посвящена применению t -копулы в другой области – защите данных. Использование гауссовской копулы предполагает отсутствие зависимости экстремальных значений.

Однако на практике информация о хвостовой зависимости между переменными может быть ценной, и при работе с данными желательно ее сохранить. В (Trottini et al., 2011) предлагается метод перестановки, основанный на t -копуле, которая учитывает хвостовую зависимость переменных и позволяет сохранить больше информации.

5.3 Построение t -копулы с вектором степеней свободы

Напомним (см. главу 3), что случайный вектор X имеет многомерное t -распределение с вектором степеней свободы с параметрами μ , a , A , если его функция плотности имеет вид

$$f_X(x) = C |A|^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2} (x - \mu)^{[d-j]'} (A^{[d-j]})^{-1} (x - \mu)^{[d-j]} \right)^{b_j - b_{j+1}}$$

где

$$C = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)}$$

Очевидно, что данное многомерное распределение не является эллиптическим, и соответственно его копула также не принадлежит классу эллиптических копул (см., например, (Фантаццини, 2011a)). Построение копулы на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы осуществляется стандартным путем с помощью теоремы Склера (см., например, (Demarta, McNeil, 2005), (Фантаццини, 2011a), (Благовещенский, 2012)). Напомним, что копулой C размерности d называется d -мерная функция распределения с равномерными на $[0, 1]$ одномерными маргинальными распределениями. Согласно теореме Склера, для любой многомерной функции распределения $F_X(x_1, \dots, x_d)$ с

маргинальными функциями распределения $F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)$ существует копула C такая, что

$$F_X(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (5.1)$$

При этом копула C единственна, если функции $F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)$ абсолютно непрерывны. И обратно, на основе любой копулы C и маргинальных функций распределения $F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)$ по формуле (5.1) может быть построена некоторая многомерная функция распределения.

Если для некоторого многомерного распределения маргинальные функции распределения непрерывны и строго возрастают, можно построить копулу на его основе с помощью (5.1) следующим образом:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F_X(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_d}^{-1}(u_d))$$

где $F_{X_i}^{-1}(u_i)$ – функции квантилей маргинальных распределений. Копула, построенная на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, запишется следующим образом:

$$C_{a,A}^t(u_1, \dots, u_d) = C|A|^{-\frac{1}{2}} \times \int_{-\infty}^{F_{X_1}^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{F_{X_2}^{-1}(u_2)} \dots \int_{-\infty}^{F_{X_d}^{-1}(u_d)} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2}(x-\mu)^{[d-j]'} (A^{[d-j]})^{-1} (x-\mu)^{[d-j]} \right)^{b_j - b_{j+1}} dx_1 \dots dx_d \quad (5.2)$$

где маргинальные функции распределения $F_{X_i}(t)$ определяются как

$$F_{X_i}(t) = C|A|^{-\frac{1}{2}} \times \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2}(x-\mu)^{[d-j]'} (A^{[d-j]})^{-1} (x-\mu)^{[d-j]} \right)^{b_j - b_{j+1}} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_d dx_i \quad (5.3)$$

По построению, если некоторый случайный вектор имеет t -копулу с вектором степеней свободы и маргинальные функции распределения $F_{X_i}(t)$ из (5.3), то данный случайный вектор имеет многомерное t -распределение с вектором степеней свободы. Однако,

если использовать в формуле (5.1) другие наборы одномерных маргинальных функций распределения, получим многомерные функции распределения, которые можно назвать функциями мета t -распределений с вектором степеней свободы по аналогии со случаем классического многомерного t -распределения со скалярным параметром степеней свободы.

Использование t -копулы с вектором степеней свободы осложняется тем, что маргинальные функции распределения (5.3) представлены в виде кратных интегралов, которые должны определяться численно. В случае многомерного t -распределения со скаляром степеней свободы данные функции представлены в виде однократных интегралов, поскольку маргинальные функции распределения могут быть записаны в явном виде. Вычисление маргинальных функций плотности для многомерного t -распределения с вектором степеней свободы общего вида представляется затруднительным. Однако для финансовых приложений достаточно использовать стандартизованную версию данного распределения, вычисление маргинальных функций плотности для которой было произведено в главе 3.

5.4 Стандартизованная копула

Стандартизованное t -распределение с вектором степеней свободы имеет параметры $\mu = 0$ и $A = I_d$, то есть его функция плотности такова (см. главу 3):

$$f_X(x) = C \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \dots + \frac{1}{2} x_{d-j}^2 \right)^{b_j - b_{j+1}}$$

Построение копулы на основе этого распределения облегчается тем, что маргинальные функции плотности компонент такого вектора X выведены в явном виде в главе 3.

По аналогии с формулами (5.2) и (5.3) t -копула на основе стандартизованного многомерного t -распределения с вектором степеней свободы определяется как

$$C_a^t(u_1, \dots, u_d) = C \int_{-\infty}^{F_{X_1}^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{F_{X_2}^{-1}(u_2)} \dots \int_{-\infty}^{F_{X_d}^{-1}(u_d)} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \dots + \frac{1}{2} x_{d-j}^2 \right)^{b_j - b_{j+1}} dx_1 \dots dx_d \quad (5.4)$$

Маргинальные функции распределения в данном случае определяются уже однократными интегралами, так же как и в случае скалярного параметра степеней свободы (см. Теорему 2 в главе 3):

$$F_{X_j}(x_j) = C_j \int_{-\infty}^{x_j} F_{j-1} \left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}, a_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}, \dots, a_d - \frac{d-2}{2}; \right. \\ \left. ; a_{d-j+2} - \frac{d-j-1}{2}, a_{d-j+3} - \frac{d-j}{2}, \dots, a_d - \frac{d-3}{2}; -\frac{1}{2} t^2 \right) dt \quad (5.5)$$

где

$$C_j = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}\right)}{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j}{2}\right)} \prod_{k=d-j+2}^d \frac{\Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)^2}{\Gamma\left(a_k - \frac{k-3}{2}\right)\Gamma\left(a_k - \frac{k-1}{2}\right)}$$

При оценке параметров моделей, содержащих стандартизованную t -копулу с вектором степеней свободы, необходимо перейти к многомерной функции плотности, построенной на основе этой копулы. Дифференцируя выражение (5.4), получаем, что функция плотности случайного вектора $U = (U_1, \dots, U_d)'$ со стандартизованной t -копулой с вектором степеней свободы имеет вид:

$$c_a^t(u_1, \dots, u_d) = \frac{c \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2} (F_{X_1}^{-1}(u_1))^2 + \frac{1}{2} (F_{X_2}^{-1}(u_2))^2 + \dots + \frac{1}{2} (F_{X_{d-j}}^{-1}(u_{d-j}))^2 \right)^{b_j - b_{j+1}}}{\prod_{i=1}^d f_{X_i}(F_{X_i}^{-1}(u_i))} \quad (5.6)$$

5.5 Применение в моделях VAR-MGARCH

Для моделирования многомерных распределений финансовых доходностей можно использовать непосредственно копулу общего вида (5.2). Однако это сопряжено с вычислительными трудностями, поскольку маргинальные функции распределения (5.3) заданы кратными интегралами. В то же время в финансовых приложениях часто прибегают к приему, состоящему в том, что моделирование распределения вектора центрированных и нормированных доходностей проводится отдельно от моделирования динамики вектора условных средних и условной ковариационной матрицы. В рамках этого подхода для моделирования распределения центрированных и нормированных доходностей удобно использовать стандартизованную копулу (5.4), поскольку в отличие от (5.3) маргинальные функции распределения (5.5) определяются однократными интегралами.

В разделе 4.4 предыдущей главы было рассмотрено применение многомерного скошенного t -распределения с вектором степеней свободы в моделях VAR-MGARCH. Стандартизованная t -копула с вектором степеней свободы (5.4) также может применяться в этих моделях по аналогичной схеме. Пусть, как и в разделе 4.4, используются уравнения (4.5) – (4.7) вместе с некоторой многомерной GARCH конструкцией для условной ковариационной матрицы.

Имеется два требования к условному распределению вектора центрированных и нормированных шоков X (для удобства

используем его обозначение из главы 4). Во-первых, желательно, чтобы оно учитывало наличие хвостовых зависимостей между компонентами X . И во-вторых, в силу специфики различных активов, желательно, чтобы для разных пар активов допускалась различная мера хвостовой зависимости. Классическая t -копула со скалярным параметром степеней свободы позволяет учитывать такие различия только за счет параметров корреляций между доходностями. Однако на практике этого может оказаться недостаточно. Копула, построенная на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы позволяет более гибко моделировать различия хвостовых зависимостей за счет наличия индивидуальных параметров степеней свободы у каждой компоненты случайного вектора. Этим t -копула с вектором степеней свободы выгодно отличается от многих других копул, используемых при моделировании динамики финансовых доходностей. Поэтому будем считать, что для построения распределения вектора X используется стандартизованная t -копула с вектором степеней свободы (5.4).

Полная модель условного распределения вектора доходностей r_t описывается уравнениями (4.5) – (4.7) вместе с некоторой многомерной GARCH моделью для условной ковариационной матрицы и следующей функцией плотности распределения для вектора X :

$$\tilde{f}_X(x_1, \dots, x_d) = C \frac{\prod_{i=1}^d \tilde{f}_{X_i}(x_i)}{\prod_{i=1}^d f_{X_i}(F_{X_i}^{-1}(\tilde{F}_{X_i}(x_i)))} \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2} (F_{X_1}^{-1}(\tilde{F}_{X_1}(x_1)))^2 + \frac{1}{2} (F_{X_2}^{-1}(\tilde{F}_{X_2}(x_2)))^2 + \dots + \frac{1}{2} (F_{X_{d-j}}^{-1}(\tilde{F}_{X_{d-j}}(x_{d-j})))^2 \right)^{b_j - b_{j+1}}$$

где $f_{x_j}(x_j)$ и $F_{x_j}(x_j)$ для $j=1,\dots,d$ определяются Теоремой 2 из главы 3 и соотношением (5.5) соответственно, а $\tilde{f}_{x_j}(x_j)$ и $\tilde{F}_{x_j}(x_j)$ для $j=1,\dots,d$ – соответственно маргинальные функции плотности и функции распределения компонент вектора X , которые задаются отдельно от копулы и могут учитывать любые особенности одномерных распределений доходностей активов.

Использование стандартизованной t -копулы с вектором степеней свободы в предложенной модели позволяет учитывать наличие хвостовой зависимости между доходностями различных активов. При этом за счет того, что параметр степеней свободы является вектором, имеется дополнительная гибкость для моделирования структуры хвостовой зависимости. В рассмотренной модели мера хвостовой зависимости для каждой пары активов определяется индивидуальной корреляцией и индивидуальным параметром степеней свободы, в то время как в случае классической t -копулы параметр степеней свободы является общим и влияет на все хвостовые зависимости одновременно.

5.6 Симулирование t -копулы с вектором степеней свободы

Предлагается следующий способ симулирования набора $U^{(1)}, \dots, U^{(N)} \in [0, 1]^d$ независимых случайных векторов, имеющих d -мерную t -копулу с вектором степеней свободы с параметрами μ , A , a . Для $k=1, \dots, N$ независимо осуществляется следующая процедура:

1. В соответствии с алгоритмом симулирования, предложенным в разделе 3.6 главы 3, производится симулирование набора $X^{(1)}, \dots, X^{(N)}$

независимых случайных векторов, имеющих t -распределение с вектором степеней свободы с параметрами μ , A , a .

2. Для каждого $k = 1, \dots, N$ вычисляется $U^{(k)} = (F_{X_1}(X_1^{(k)}), \dots, F_{X_d}(X_d^{(k)}))'$, где функции $F_{X_i}(x_i)$ определяются согласно (5.3).

В результате получаем набор $U^{(1)}, \dots, U^{(N)} \in [0, 1]^d$ независимых случайных векторов, имеющих t -копулу с вектором степеней свободы с теми же параметрами, что и у t -распределения с вектором степеней свободы, которому подчиняются $X^{(1)}, \dots, X^{(N)}$.

5.7 Выводы

В настоящей главе построена копула, основанная на многомерном t -распределении с вектором степеней свободы. Данная копула дает возможность более гибко моделировать различия хвостовых зависимостей между компонентами случайного вектора, чем классическая t -копула, за счет наличия отдельного параметра степеней свободы у каждой компоненты. В главе также рассмотрена стандартизованная версия t -копулы с вектором степеней свободы, которая является более удобной с вычислительной точки зрения, поскольку используемые для ее построения маргинальные функции плотности были выведены в явном виде в главе 3. В качестве примера практического использования t -копулы с вектором степеней свободы рассмотрено применение ее стандартизованной версии в VAR-MGARCH моделях для многомерных финансовых временных рядов. За счет использования t -копулы с вектором степеней свободы в этих моделях различия хвостовых зависимостей между доходностями активов определяются не только корреляциями, но и

индивидуальными параметрами степеней свободы. В данной главе также предложен алгоритм симулирования случайных векторов, имеющих t -копулу с вектором степеней свободы.

Заключение

В настоящей диссертации изучаются теоретические свойства многомерного t -распределения с вектором степеней свободы и рассмотрено его практическое применение для прогнозирования распределений финансовых доходностей и составления оптимальных портфелей. В работе получены следующие результаты.

Во-первых, проведено эмпирическое сравнение нескольких вероятностных моделей для доходностей ключевых мировых фондовых индексов: S&P 500, FTSE 100, CAC 40, DAX, Hang Seng и Nikkei 225. Новая модель на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы сравнивается с известными моделями на основе классического многомерного t -распределения, многомерного обобщенного распределения ошибки и многомерного распределения Грама – Шарлье. С помощью теста на основе информационного критерия Кульбака – Лейблера установлено, что на рассмотренных рядах финансовых доходностей наилучшее качество соответствия данным и предсказательную способность вне выборки имеют модели на основе многомерных t -распределений со скаляром и вектором степеней свободы. Им уступают модели с многомерным обобщенным распределением ошибки и модели с многомерным распределением Грама – Шарлье. При этом многомерное t -распределение с вектором степеней свободы в половине рассмотренных случаев оказалось более предпочтительным, чем классическое t -распределение со скаляром степеней свободы.

Во-вторых, построены модели для доходностей акций российских компаний на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, а также классического многомерного t -распределения и многомерного нормального распределения. С

помощью построенных моделей составлены различные финансовые портфели и проведено их сравнение с точки зрения риска и выгоды вложений. На рассмотренных рядах доходностей установлено, что для портфелей с минимальной дисперсией построенные модели в целом эквивалентны: они дают близкие фактические значения средней доходности и волатильности. Для портфелей с минимальной дисперсией при заданной ожидаемой доходности многомерное нормальное распределение обеспечивает минимальную фактическую волатильность, а многомерное t -распределение с вектором степеней свободы – максимальную фактическую среднюю доходность при использовании наиболее ликвидных акций. Наконец, для портфелей с максимальной ожидаемой доходностью при заданной дисперсии многомерное нормальное распределение обеспечивает максимум фактической средней доходности, а многомерное t -распределение с вектором степеней свободы – минимум фактической волатильности в большинстве случаев.

В-третьих, установлены некоторые теоретические свойства многомерного t -распределения с вектором степеней свободы. Выведена формула смешанного момента общего вида с условиями существования, и с ее помощью получен вид ковариационной матрицы, который необходим для построения многомерных GARCH моделей на основе t -распределения с вектором степеней свободы. Кроме того, выведены формулы одномерных маргинальных функций плотности и характеристических функций. Полученные вероятностные распределения могут использоваться при построении достаточно широкого класса одномерных моделей финансовых доходностей с тяжелыми хвостами. По-видимому, данные одномерные распределения являются новыми, но из осторожности в число результатов диссертации они не включаются. В работе также

предложен алгоритм симулирования многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, который может использоваться в задачах с данным распределением, требующих применения метода Монте-Карло. Наконец, построен возможный алгоритм выбора расположения активов в векторе доходностей, который моделируется с помощью многомерного t -распределения с вектором степеней свободы.

В-четвертых, предложена модификация стандартизованной версии многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, которая предусматривает введение вектора параметров скошенности по каждой компоненте. Показаны преимущества применения данной модификации в финансовых приложениях, когда меры скошенности и толщины хвостов для доходностей различных активов существенно разнятся. В качестве примера рассмотрено применение построенной модификации в моделях VAR-MGARCH, состоящих из векторной авторегрессии и многомерной GARCH-структуры. VAR-MGARCH модели на основе многомерного t -распределения с вектором параметров скошенности и вектором степеней свободы могут применяться при совместном моделировании временных рядов, существенно различающихся по динамике условных моментов 1 – 4 порядка.

Наконец в пятых, построена копула на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, которая позволяет более гибко моделировать различия хвостовых зависимостей между компонентами случайного вектора, чем классическая t -копула, за счет наличия отдельного параметра степеней свободы у каждой компоненты. С помощью полученных ранее формул одномерных маргинальных распределений выведена стандартизованная версия данной копулы, более удобная с вычислительной точки зрения, чем копула общего вида. Рассмотрены VAR-MGARCH модели на основе

стандартизированной t -копулы с вектором степеней свободы. В этих моделях различия хвостовых зависимостей между доходностями активов определяются не только корреляциями, как в случае классической t -копулы, но и индивидуальными параметрами степеней свободы.

Возможным направлением дальнейшей работы является оценка качества соответствия данным и предсказательной способности эконометрических моделей на основе многомерного t -распределения с вектором параметров скошенности и вектором степеней свободы. В частности, интерес представляет сравнение моделей со скошенностью и без нее. В качестве направления дальнейшей работы также может рассматриваться построение и эмпирическое тестирование скошенной версии матричного t -распределения с вектором степеней свободы, предложенного в работе (Шведов, 2010). Оно может быть использовано для моделирования совместного распределения текущих и прошлых векторов доходностей активов, если из этих векторов составить матрицу⁴¹. Можно также рассмотреть альтернативные способы введения скошенности в многомерное t -распределение и провести их сравнение.

Дальнейшая работа также может быть связана с эмпирическим тестированием эконометрических моделей на основе t -копулы с вектором степеней свободы. В первую очередь, интерес представляет сравнение моделей с векторным и скалярным параметрами степеней свободы. Работа также может быть продолжена в направлении модификации t -копулы с вектором степеней свободы. Например, можно рассмотреть задачу построения копулы на основе многомерного t -распределения с вектором параметров скошенности и

⁴¹ Распределениям случайных матриц посвящена, например, книга (Gupta, Nagar, 1999).

вектором степеней свободы. Такая копула могла бы допускать несимметричные хвостовые зависимости между доходностями и различия этих зависимостей для разных пар активов.

Список литературы

1. Айвазян С.А. Методы эконометрики. – М.: Магистр, ИНФРА-М, 2010. – 512 с.
2. Айвазян, С.А., Мхитарян, В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1023 с.
3. Анатольев С.А. Объекты неструктурного моделирования временных рядов [Электронный ресурс] // Квантиль. – 2013. – №11. – С. 1–11 (02.08.2013). – URL: <http://quantile.ru/11/11-SA.pdf> (Дата обращения: 09.03.2014).
4. Артемьев С.С., Якунин М.А. Многомерная модель динамики цен акций и задача формирования инвестиционного портфеля // Сибирский журнал вычислительной математики, 2001. – 4(1). – С. 13–20.
5. Балаев А.И. Анализ многомерных временных рядов финансовых доходностей: сравнение различных подходов к моделированию тяжелых хвостов // Экономический журнал Высшей школы экономики, 2013а. – 17(2). – С. 239–263.
6. Балаев А.И. Многомерное скошенное t -распределение с вектором степеней свободы и его применение в моделях финансовых рынков // Прикладная эконометрика, 2011а. – 23(3). – С. 79–97.
7. Балаев А.И. Моделирование доходностей и составление портфелей из акций российских компаний / Препринты. Серия WP2 «Количественный анализ в экономике», 2013б. – № 03. – 48 с.
8. Балаев А.И. Моделирование многомерных параметрических плотностей финансовых доходностей [Электронный ресурс] // Квантиль. – 2011б. – №9. – С. 39–60 (19.07.2011). – URL: <http://quantile.ru/09/09-AB.pdf> (Дата обращения: 09.03.2014).

9. Балаев А.И. Моменты многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, одномерные маргинальные функции плотности и характеристические функции / Препринты. Серия WP2 «Количественный анализ в экономике», 2012. – № 03. – 36 с.
10. Балаев А.И. Копула на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы // Прикладная эконометрика, 2014. – 1(33). – С. 90–110.
11. Балаев А.И., Шведов А.С. Применение многомерного t -распределения с вектором степеней свободы при анализе финансовых временных рядов / Сборник научных статей конференции «Эконометрические методы в исследовании глобальных экономических процессов» (Москва, МГИМО, 29 октября 2013 г.). 2014.
12. Белоусов С.С. Моделирование волатильности со скачками: применение к российскому и американскому фондовым рынкам [Электронный ресурс] // Квантиль. – 2006. – №1. – С. 101–110 (03.10.2006). – URL: <http://quantile.ru/01/01-SB.pdf> (Дата обращения: 09.03.2014).
13. Благовещенский Ю.Н. Основные элементы теории копул // Прикладная эконометрика, 2012. – 26(2). – С. 113–130.
14. Богл Д. Руководство разумного инвестора. Надежный способ получения прибыли на фондовом рынке: Пер. с англ. – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2013. – 224 с.
15. Винс Р. Математика управления капиталом: Методы анализа риска для трейдеров и портфельных менеджеров: Пер. с англ. – 3-е изд. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2007. – 400 с.
16. Гибсон Р. Формирование инвестиционного портфеля: Управление финансовыми рисками: Пер. с англ. – 2-е изд., испр. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2008. – 276 с.

17. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. – 7-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1182 с.
18. Грэхем Б., Цвейг Д. Разумный инвестор: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. – 672 с.
19. Жидков Е.П., Крянев А.В., Фоменко М.В. Применение робастной схемы прогнозирования временных рядов для решения задачи формирования эффективных инвестиционных портфелей // Вестник РУДН, Серия «Прикладная и компьютерная математика», 2003. – 2(2). – С. 5–12.
20. Колоколов А.В. Хеджирование фьючерсами: многомерные GARCH с динамическими условными корреляциями // Квантиль. – 2011. – №9. – С. 61–75 (19.07.2011). – URL: <http://quantile.ru/09/09-AK.pdf> (Дата обращения: 09.03.2014).
21. Крицкий О.Л., Ульянова М.К. Определение многомерного финансового риска портфеля акций // Прикладная эконометрика, 2007. – 8(4). – С. 3–17.
22. Лукашин И.Ю. Российский фондовый рынок в период кризиса 2008–2009 гг. // Прикладная эконометрика, 2010. – 19(3). – С. 23–37.
23. Первозванский А.А. Оптимальный портфель ценных бумаг на нестационарном неравновесном рынке // Экономика и математические методы, 1999. – 35 (3). – С. 63–68.
24. Первозванский А.А., Баринов В.Ю. Прогнозирование и оптимизация на рынке краткосрочных облигаций // Экономика и математические методы, 1997. – 33(4). – С. 5–11.
25. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка: Пер. с англ. – М.: Мир, 2000. – 336 с.

26. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2003. – 688 с.
27. Росси Э. Одномерные GARCH-модели: обзор [Электронный ресурс] // Квантиль. – 2010. – №8. – С. 1–67 (03.07.2010). – URL: <http://quantile.ru/08/08-ER.pdf> (Дата обращения: 09.03.2014).
28. Содерлинд П. Прогнозирование доходностей акций [Электронный ресурс] // Квантиль. – 2006. – №1. – С. 27–38 (03.10.2006). – URL: <http://quantile.ru/01/01-PS.pdf> (Дата обращения: 09.03.2014).
29. Фабоцци Ф. Управление инвестициями: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 932 с.
30. Финансовые инструменты: Пер. с англ. / Под редакцией Фабоцци Ф. – М.: Эксмо, 2010. – 864 с.
31. Фантаццини Д. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I. // Прикладная эконометрика, 2011а. – 22(2). – С. 98–134.
32. Фантаццини Д. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. II. // Прикладная эконометрика, 2011б. – 23(3). – С. 98–132.
33. Фантаццини Д. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. III. // Прикладная эконометрика, 2011в. – 24(4). – С. 100–130.
34. Фантаццини Д. Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском // Прикладная эконометрика, 2008. – 10(2). – С. 91–137.
35. Франгуриди Г.К. Динамика условных моментов высоких порядков и прогнозирование стоимостной меры риска [Электронный

- ресурс] // Квантиль. – 2014. – №12. – С. 69–82 (24.02.2014). – URL: <http://quantile.ru/12/12-GF.pdf> (Дата обращения: 09.03.2014).
36. Халл Д.К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты: Пер. с англ. – 6-е изд. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. – 1056 с.
37. Хейфец И.Л. Тестирование распределений [Электронный ресурс] // Квантиль. – 2011. – №9. – С. 25–34 (19.07.2011). – URL: <http://quantile.ru/09/09-ИК.pdf> (Дата обращения: 09.03.2014).
38. Шарп У.Ф., Александер Г.Д., Бэйли Д.В. Инвестиции: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2010. – 1028 с.
39. Шведов А.С. t -распределение случайной матрицы и его применение в регрессионной модели / Препринты. Серия WP2 «Количественный анализ в экономике», 2010. – № 01. – 28 с.
40. Шведов А.С. Бета-распределение случайной матрицы и его применение в модели состояние-наблюдение / Препринты. Серия WP2 «Количественный анализ в экономике», 2009. – № 01. – 36 с.
41. Шведов А.С. К байесовскому анализу матричной линейной модели состояние-наблюдение / Препринты. Серия WP2 «Количественный анализ в экономике», 2012. – № 01. – 20 с.
42. Шведов А.С. Робастная регрессия с применением t -распределения и EM-алгоритма // Экономический журнал Высшей школы экономики, 2011. – 15(1). – С. 68–87.
43. Шведов А.С. Теория эффективных портфелей ценных бумаг. – М.: ГУ ВШЭ, 1999. – 144 с.
44. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. – М.: ФАЗИС, 1998а. – 512 с.
45. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. – М.: ФАЗИС, 1998б. – 544 с.

46. Ширяев В.И. Модели финансовых рынков. Оптимальные портфели, управление финансами и рисками. – М.: Либроком, 2009. – 216 с.
47. Aguilar O., West M. Bayesian Dynamic Factor Models and Portfolio Allocation // *Journal of Business and Economic Statistics*, 18(3). 2000. p. 338–357.
48. Alexander C.O. A Practitioners guide to financial data analysis. New York: Wiley. 2001.
49. Azzalini A., Capitanio A. Statistical Applications of the Multivariate Skew Normal Distribution // *Journal of the Royal Statistical Society*, 61(3). 1999. p. 579–602.
50. Azzalini A., Dalla Valle A. The multivariate skew-normal distribution // *Biometrika*, 83. 1996. p. 715–726.
51. Balaev A.I. Modelling financial returns and portfolio construction for the Russian stock market // *International Journal of Computational Economics and Econometrics*, 1/2(4). 2014. p. 32–81.
52. Bauwens L., Laurent S. A new class of multivariate skew densities, with application to generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models // *Journal of Business and Economic Statistics*, 20. 2005. p. 339–350.
53. Bellman R.A. Generalization of some integral identities due to Ingham and Siegel // *Duke Mathematical Journal*, 23. 1956. p. 571–577.
54. Bernardo J.M., Smith A.F.M. Bayesian Theory. New York: Wiley. 2000.
55. Bollerslev T. A conditionally heteroscedastic time series model for speculative prices and rates of return // *Review of Economics and Statistics*, 69. 1987. p. 542–547.
56. Branco M., Dey D. A class of multivariate skew-elliptical distributions // *Journal of Multivariate Analysis*, 79. 2001. p. 99–113.

57. Chan J.C.C., Kroese D.P. Efficient estimation of large portfolio loss probabilities in t -copula models // *European Journal of Operational Research*, 205. 2010. p. 361–367.
58. Chan Y., Li H. Tail dependence for multivariate t -copulas and its monotonicity // *Insurance: Mathematics and Economics*, 42. 2008. p. 763–770.
59. Cherubini U., Lucinno E., Vecchiato W. *Copula Methods in Finance*. Chichester: Wiley. 2004.
60. Del Brio E., Niguez T., Perote J. Multivariate Gram-Charlier densities / Working paper. 2008.
61. Demarta S., McNeil A.J. The t copula and related copulas // *International Statistical Review*, 73(1). 2005. p. 111–129.
62. Diebold F., Gunther T., Tay A. Evaluating Density Forecasts with Applications to Financial Risk Management // *International Economic Review*, 39(4). 1998. p. 863–883.
63. Diks C., Panchenko V., van Dijk D. Out-of-sample comparison of copula specifications in multivariate density forecasts // *Journal of Economic Dynamics and Control*, 34. 2010. p. 1596–1609.
64. Dreze J.H. Bayesian regression analysis using poly- t densities // *Journal of Econometrics*, 6. 1978. p. 329–354.
65. Engle R.F. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models // *Journal of Business and Economic Statistics*, 20. 2002. p. 339–350.
66. Engle R., Kroner K. Multivariate simultaneous generalized ARCH // *Econometric Theory*, 11. 1995. p. 122–150.
67. Fernandez C., Osiewalski J., Steel M. Modeling and inference with ν -spherical distributions // *Journal of the American Statistical Association*, 90. 1995. p. 1331–1340.

68. Fernandez C., Steel M. Multivariate Student- t Regression Models: Pitfalls and Inference // *Biometrika*, 86(1). 1999. p. 153–167.
69. Ferreira J.T.A.S., Steel M.F.J. Bayesian multivariate regression analysis with a new class of skewed distributions / *Statistics Research Report* 419, University of Warwick. 2003.
70. Fiorentini G., Sentana E., Calzolari G. Maximum likelihood estimation and inference in multivariate conditionally heteroscedastic dynamic regression models with Student t innovations // *Journal of Business and Economic Statistics*, 21. 2003. p. 532–546.
71. Frahm G., Junker M., Szimayer A. Elliptical copulas: applicability and limitations // *Statistics and Probability Letters*, 63. 2003. p. 275–286.
72. Giller G. A generalized error distribution / *Giller Investments Research Note* 20031222/1. 2005.
73. Gohout W., Specht K. Mean-variance portfolios using Bayesian vector-autoregressive forecasts // *Statistical Papers*, 48(3). 2007. p. 403–418.
74. Gouriéroux C. ARCH models and financial applications. New York: Springer–Verlag. 1997.
75. Greyserman A., Jones D., Strawderman W. Portfolio selection using hierarchical Bayesian analysis and MCMC methods // *Journal of Banking and Finance*, 30. 2006. p. 669–678.
76. Gupta A.K., Nagar D.K. Matrix Variate Distributions. New York: Chapman and Hall. 1999.
77. Hansen B. Nonparametric Conditional Density Estimation / Working paper. 2004.
78. Hong Y., Li H., Zhao F. Can the Random Walk Model be Beaten in Out-of-sample Density Forecasts? Evidence from Intraday Foreign Exchange Rates // *Journal of Econometrics*, 141. 2007. p. 736–776.

79. Hörmann W., Sak H. *t*-Copula generation for control variates // *Mathematics and Computers in Simulation*, 81. 2010. p. 782–790.
80. Leon A., Rubio G., Serna G. Autoregressive Conditional Volatility, Skewness and Kurtosis // *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 45. 2005. p. 599–618.
81. Jondeau E., Rockinger M. On the Importance of Time Variability in Higher Moments for Asset Allocation // *Journal of Financial Econometrics*, 10(1). 2012. p. 84–123.
82. Jones M.C. Multivariate *t* and Beta distributions associated with the multivariate *F* distribution // *Metrika*, 54. 2001. p. 215–231.
83. Jones M.C. Marginal replacement in multivariate densities, with application to skewing spherically symmetric distributions // *Journal of Multivariate Analysis*, 81. 2002. p. 85–99.
84. Kole E., Koedijk K., Verbeek M. Selecting copulas for risk management // *Journal of Banking and Finance*, 31. 2007. p. 2405–2423.
85. Kotz S., Nadarajah S. Estimation Methods for the Multivariate *t* Distribution // *Acta Applicandae Mathematicae*, 102(1). 2008. p. 99–118.
86. Kotz S., Nadarajah S. *Multivariate t Distributions and Their Applications*. Cambridge University Press. 2004.
87. Ku Y-H.H. Student-*t* distribution based VAR-MGARCH: an application of the DCC model on international portfolio risk management // *Applied Economics*, 40(13). 2008. p. 1685–1697.
88. Kullback S., Leibler R. On information and sufficiency // *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1). 1951. p. 79–86.
89. Liu C., Rubin D. ML Estimation of the *t*-distribution Using EM and its Extensions, ECM and ECME // *Statistica Sinica*, 5. 1995. p. 19–39.
90. Lucas A. Robustness of the Student-*t* Based M-estimator // *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 26(5). 1997. p. 1165–1182.

91. Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. New York: Wiley. 1959.
92. Mauleon I., Perote J. Estimation of multivariate densities with financial data: the performance of the multivariate Edgeworth – Sargan density / Proceedings of the 12th Australian Finance and Banking Conference. Sidney. 1999.
93. Nadaraya E. On nonparametric estimates of density functions and regression curves // Theory of Applied Probability, 10. 1965. p. 186–190.
94. Ortobelli S., Huber I., Schwartz E. Portfolio selection with stable distributed returns // Mathematical Methods of Operations Research, 55. 2002. p. 265–300.
95. Polson N.G., Tew B.V. Bayesian Portfolio Selection: An Empirical Analysis of the S&P 500 Index 1970-1996 // Journal of Business and Economic Statistics, 18(2). 2000. p. 164–173.
96. Reboredo J.C. How do crude oil prices co-move? A copula approach // Energy Economics, 33. 2011. p. 948–955.
97. Sahu S.K., Dey D.K., Branco M.D. A new class of multivariate skew distributions with applications to Bayesian regression models // The Canadian Journal of Statistics, 31(2). 2003. p. 129–150.
98. Sak H., Hörmann W., Leydold J. Efficient risk simulations for linear asset portfolios in the t -copula model // European Journal of Operational Research, 202. 2010. p. 802–809.
99. Samorodinsky G., Taqqu M. Stable non-Gaussian random processes: Stochastic models with infinite variance. London: Chapman and Hall. 1994.
100. Scherer B. Portfolio Construction and Risk Budgeting. London: Risk Books. 2002.
101. Sharpe W.F. Portfolio theory and capital markets. New York: McGraw-Hill. 1970.

102. Silvennoinen A., Terasvirta T. Multivariate GARCH models / SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance 669. 2008.
103. Silverman B. Density Estimation for Statistics and Data Analysis. London: Chapman and Hall. 1986.
104. Smith M.S., Gan Q., Kohn R.J. Modeling dependence using skew t copulas: Bayesian inference and applications // Journal of Applied Econometrics, 27. 2012. p. 500–522.
105. Gauss hypergeometric function ${}_2F_1$: integral representations (formula 07.23.07.0002): [Электронный ресурс] // Wolfram Research, Inc. 1998-2014. URL:
<http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1/07/01/01/0002/>. (Дата обращения: 09.03.2014).
106. Generalized hypergeometric function: Integral representations (formula 07.31.07.0001): [Электронный ресурс] // Wolfram Research, Inc. 1998-2014. URL:
<http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/HypergeometricPFQ/07/01/01/0001/>. (Дата обращения: 09.03.2014).
107. Generalized hypergeometric function: Representations through more general functions (formula 07.31.26.0004): [Электронный ресурс] // Wolfram Research, Inc. 1998-2014. URL:
<http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/HypergeometricPFQ/26/03/01/0001/>. (Дата обращения: 09.03.2014).
108. Meijer G-function: Integration (formula 07.34.21.0090): [Электронный ресурс] // Wolfram Research, Inc. 1998-2014. URL:
<http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/MeijerG/21/02/07/0007/>. (Дата обращения: 09.03.2014).
109. Trottini M., Muralidhar K., Sarathy R. Maintaining tail dependence in data shuffling using t copula // Statistics and Probability Letters, 81. 2011. p. 420–428.

110. Vlaar P.J.G., Palm F.C. The message in weekly exchange rates in the european monetary system: Mean reversion, conditional heteroscedasticity and jumps // *Journal of Business and Economic Statistics*, 11 (3). 1993. p. 351–360.
111. Vuong Q. Likelihood ratio tests for model selection and non-nested hypotheses // *Econometrica*, 57. 1989. p. 307–333.
112. Watson G. Smooth regression analysis // *Sankhya*, 26. 1964. p. 359–372.
113. Winkler R.L. Bayesian Models for Forecasting Future Security Prices // *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 8(3). 1973. p. 387–405.
114. Young M.R., Lenk P.J. Hierarchical Bayes Methods for Multifactor Model Estimation and Portfolio Selection // *Management Science*, 44(11). 1998. p. S111–S124.
115. Zhang R., Czado C., Min A. Efficient maximum likelihood estimation of copula based meta t -distributions // *Computational Statistics and Data Analysis*, 55. 2011. p. 1196–1214.

Приложение главы 1

(первым следует вектор/матрица оценок параметров, далее после «se_...» – вектор/матрица стандартных ошибок этих оценок)

П 1.1 Оценки параметров моделей доходностей фондовых индексов на основе многомерного t -распределения с вектором степеней свободы

S&P 500, FTSE 100			S&P 500, CAC40			S&P 500, DAX		
c	0,060		c	0,060		c	0,061	
	0,034			0,039			0,059	
se_c	0,014		se_c	0,014		se_c	0,014	
	0,014			0,019			0,017	
Q	-0,002	0,019	Q	-0,010	0,031	Q	0,014	0,008
	0,303	-0,112		0,380	-0,117		0,415	-0,134
se_Q	0,018	0,018	se_Q	0,018	0,013	se_Q	0,019	0,013
	0,019	0,019		0,026	0,019		0,025	0,017
OMEGA	0,047	0,000	OMEGA	0,037	0,000	OMEGA	0,058	0,000
	-0,014	0,091		-0,032	0,122		-0,055	0,075
se_OMEGA	0,016	0,000	se_OMEGA	0,022	0,000	se_OMEGA	0,024	0,000
	0,040	0,021		0,062	0,031		0,029	0,027
A	0,161	-0,010	A	0,146	0,014	A	0,180	-0,013
	-0,008	0,226		-0,071	0,225		-0,016	0,208
se_A	0,026	0,026	se_A	0,026	0,016	se_A	0,032	0,017
	0,037	0,027		0,036	0,023		0,035	0,018
B	0,986	0,002	B	0,989	-0,003	B	0,982	0,002
	0,006	0,968		0,018	0,968		0,010	0,973
se_B	0,005	0,006	se_B	0,005	0,004	se_B	0,007	0,004
	0,007	0,008		0,007	0,007		0,007	0,004
nu	6,190		nu	5,708		nu	4,309	
	4,044			3,846			4,102	
se_nu	1,201		se_nu	0,965		se_nu	0,552	
	0,320			0,316			0,375	

S&P 500, Hang Seng			S&P 500, Nikkei 225			FTSE 100, CAC 40		
c	0,058		c	0,057		c	0,050	
	0,058			-0,014			0,055	
se_c	0,014		se_c	0,014		se_c	0,014	
	0,020			0,020			0,019	
Q	0,008	-0,003	Q	0,013	-0,004	Q	0,002	0,015
	0,465	0,005		0,427	-0,048		0,016	0,015
se_Q	0,017	0,009	se_Q	0,017	0,009	se_Q	0,026	0,018
	0,025	0,017		0,023	0,016		0,037	0,026
OMEGA	0,046	0,000	OMEGA	0,044	0,000	OMEGA	0,092	0,000
	-0,007	0,176		-0,041	0,168		0,121	0,039
se_OMEGA	0,014	0,000	se_OMEGA	0,014	0,000	se_OMEGA	0,017	0,000
	0,049	0,040		0,077	0,041		0,024	0,013
A	0,158	0,002	A	0,153	0,000	A	0,223	0,006
	-0,008	0,272		-0,025	0,256		0,097	0,164
se_A	0,021	0,010	se_A	0,022	0,010	se_A	0,030	0,023
	0,033	0,039		0,055	0,023		0,040	0,028
B	0,987	-0,001	B	0,987	0,000	B	0,974	-0,003
	0,006	0,956		0,009	0,960		-0,019	0,982
se_B	0,004	0,003	se_B	0,004	0,003	se_B	0,006	0,004
	0,006	0,013		0,011	0,008		0,008	0,005
nu	3,534		nu	3,755		nu	4,964	
	4,002			4,029			4,515	
se_nu	0,411		se_nu	0,450		se_nu	0,758	
	0,353			0,349			0,478	

FTSE 100, DAX			FTSE 100, Hang Seng			FTSE 100, Nikkei 225		
c	0,050		c	0,050		c	0,052	
	0,071			0,075			-0,010	
se_c	0,014		se_c	0,015		se_c	0,014	
	0,018			0,021			0,021	
Q	0,032	-0,006	Q	0,018	-0,009	Q	0,039	-0,045
	0,140	-0,060		0,269	-0,009		0,283	-0,062
se_Q	0,022	0,016	se_Q	0,018	0,012	se_Q	0,019	0,011
	0,031	0,021		0,025	0,019		0,025	0,018
OMEGA	0,072	0,000	OMEGA	0,084	0,000	OMEGA	0,077	0,000
	0,102	0,048		0,034	0,162		0,065	0,149
se_OMEGA	0,015	0,000	se_OMEGA	0,020	0,000	se_OMEGA	0,020	0,000
	0,025	0,015		0,048	0,050		0,052	0,032
A	0,166	0,055	A	0,200	0,004	A	0,210	-0,023
	-0,004	0,243		-0,005	0,234		0,045	0,217
se_A	0,023	0,019	se_A	0,029	0,015	se_A	0,022	0,017
	0,041	0,025		0,043	0,050		0,049	0,027
B	0,984	-0,012	B	0,977	-0,002	B	0,976	0,003
	-0,001	0,968		0,003	0,966		-0,007	0,969
se_B	0,004	0,004	se_B	0,007	0,005	se_B	0,005	0,005
	0,008	0,005		0,012	0,015		0,012	0,008
nu	4,293		nu	3,413		nu	4,009	
	4,522			4,471			4,376	
se_nu	0,602		se_nu	0,388		se_nu	0,516	
	0,472			0,461			0,428	

	CAC 40, DAX		CAC 40, Hang Seng		CAC 40, Nikkei 225			
c	0,061		c	0,050	c	0,052		
	0,070			0,081		-0,010		
se_c	0,018		se_c	0,020	se_c	0,020		
	0,018			0,021		0,021		
Q	0,054	-0,030	Q	0,017	-0,004	Q	0,029	-0,045
	0,184	-0,130		0,173	0,008		0,220	-0,061
se_Q	0,025	0,025	se_Q	0,018	0,015	se_Q	0,018	0,015
	0,023	0,023		0,019	0,019		0,020	0,018
OMEGA	0,082	0,000	OMEGA	0,128	0,000	OMEGA	0,136	0,000
	0,093	0,026		0,056	0,142		0,140	0,134
se_OMEGA	0,018	0,000	se_OMEGA	0,030	0,000	se_OMEGA	0,022	0,000
	0,021	0,010		0,035	0,035		0,057	0,043
A	0,191	0,023	A	0,188	0,033	A	0,199	-0,005
	0,002	0,219		-0,020	0,232		0,005	0,243
se_A	0,022	0,026	se_A	0,032	0,019	se_A	0,027	0,032
	0,023	0,023		0,037	0,039		0,067	0,041
B	0,981	-0,006	B	0,978	-0,009	B	0,978	-0,009
	-0,002	0,974		0,004	0,968		0,002	0,960
se_B	0,004	0,005	se_B	0,008	0,006	se_B	0,007	0,011
	0,004	0,005		0,009	0,011		0,017	0,013
nu	4,495		nu	3,581		nu	3,997	
	4,318			4,565			4,608	
se_nu	0,623		se_nu	0,429		se_nu	0,506	
	0,454			0,546			0,504	

DAX, Hang Seng			DAX, Nikkei 225			Hang Seng, Nikkei 225		
c	0,067		c	0,069		c	0,079	
	0,081			-0,008			0,006	
se_c	0,018		se_c	0,018		se_c	0,021	
	0,021			0,021			0,021	
Q	0,009	-0,003	Q	0,016	-0,035	Q	0,059	-0,018
	0,163	0,000		0,211	-0,061		0,027	-0,012
se_Q	0,017	0,013	se_Q	0,017	0,013	se_Q	0,019	0,018
	0,018	0,018		0,019	0,017		0,017	0,018
OMEGA	0,095	0,000	OMEGA	0,107	0,000	OMEGA	0,156	0,000
	0,079	0,138		0,124	0,124		0,125	0,136
se_OMEGA	0,020	0,000	se_OMEGA	0,020	0,000	se_OMEGA	0,031	0,000
	0,050	0,029		0,045	0,039		0,058	0,035
A	0,211	0,013	A	0,219	-0,004	A	0,233	0,004
	-0,006	0,245		0,014	0,232		0,014	0,236
se_A	0,022	0,020	se_A	0,025	0,017	se_A	0,039	0,040
	0,030	0,041		0,061	0,039		0,019	0,029
B	0,977	-0,005	B	0,975	-0,005	B	0,970	-0,005
	0,002	0,965		-0,002	0,966		-0,004	0,965
se_B	0,005	0,006	se_B	0,006	0,005	se_B	0,010	0,012
	0,007	0,012		0,015	0,011		0,005	0,009
nu	3,815		nu	3,884		nu	4,277	
	3,701			3,868			3,686	
se_nu	0,489		se_nu	0,489		se_nu	0,617	
	0,322			0,330			0,302	

П 1.2 Оценки параметров моделей доходностей фондовых индексов на основе многомерного t -распределения со скаляром степеней свободы

S&P 500, FTSE 100			S&P 500, CAC40			S&P 500, DAX		
c	0,061		c	0,060		c	0,061	
	0,035			0,039			0,060	
se_c	0,014		se_c	0,014		se_c	0,014	
	0,014			0,019			0,017	
Q	-0,001	0,020	Q	-0,010	0,032	Q	0,015	0,008
	0,303	-0,114		0,380	-0,119		0,415	-0,134
se_Q	0,018	0,018	se_Q	0,019	0,013	se_Q	0,019	0,013
	0,019	0,019		0,026	0,019		0,025	0,017
OMEGA	0,048	0,000	OMEGA	0,038	0,000	OMEGA	0,057	0,000
	-0,017	0,090		-0,035	0,127		-0,055	0,076
se_OMEGA	0,016	0,000	se_OMEGA	0,023	0,000	se_OMEGA	0,024	0,000
	0,037	0,021		0,062	0,031		0,028	0,026
A	0,161	-0,011	A	0,146	0,016	A	0,179	-0,012
	-0,012	0,224		-0,074	0,227		-0,016	0,208
se_A	0,026	0,024	se_A	0,027	0,016	se_A	0,032	0,017
	0,035	0,029		0,037	0,024		0,034	0,018
B	0,985	0,002	B	0,989	-0,003	B	0,982	0,002
	0,006	0,969		0,018	0,967		0,010	0,973
se_B	0,005	0,005	se_B	0,005	0,004	se_B	0,007	0,004
	0,007	0,008		0,007	0,007		0,007	0,004
nu	4,497		nu	4,222		nu	4,161	
se_nu	0,346		se_nu	0,324		se_nu	0,330	

S&P 500, Hang Seng			S&P 500, Nikkei 225			FTSE 100, CAC 40		
c	0,058		c	0,057		c	0,050	
	0,058			-0,014			0,055	
se_c	0,014		se_c	0,014		se_c	0,014	
	0,020			0,020			0,019	
Q	0,007	-0,003	Q	0,013	-0,004	Q	0,002	0,014
	0,465	0,006		0,427	-0,048		0,017	0,015
se_Q	0,017	0,009	se_Q	0,017	0,009	se_Q	0,027	0,018
	0,025	0,017		0,023	0,017		0,035	0,024
OMEGA	0,046	0,000	OMEGA	0,043	0,000	OMEGA	0,093	0,000
	-0,010	0,175		-0,040	0,168		0,121	0,040
se_OMEGA	0,014	0,000	se_OMEGA	0,014	0,000	se_OMEGA	0,017	0,000
	0,058	0,040		0,080	0,041		0,024	0,013
A	0,159	0,002	A	0,153	0,000	A	0,224	0,005
	-0,008	0,271		-0,024	0,256		0,098	0,162
se_A	0,021	0,010	se_A	0,022	0,010	se_A	0,030	0,022
	0,035	0,038		0,057	0,023		0,039	0,027
B	0,987	-0,001	B	0,987	0,000	B	0,973	-0,003
	0,006	0,956		0,009	0,960		-0,019	0,982
se_B	0,004	0,003	se_B	0,004	0,003	se_B	0,006	0,004
	0,007	0,013		0,011	0,008		0,008	0,005
nu	3,854		nu	3,943		nu	4,661	
se_nu	0,280		se_nu	0,278		se_nu	0,411	

FTSE 100, DAX			FTSE 100, Hang Seng			FTSE 100, Nikkei 225		
c	0,050		c	0,050		c	0,052	
	0,072			0,077			-0,010	
se_c	0,014		se_c	0,015		se_c	0,014	
	0,018			0,021			0,021	
Q	0,032	-0,006	Q	0,016	-0,010	Q	0,039	-0,045
	0,140	-0,061		0,269	-0,009		0,283	-0,062
se_Q	0,022	0,016	se_Q	0,018	0,011	se_Q	0,019	0,011
	0,031	0,021		0,025	0,019		0,026	0,018
OMEGA	0,072	0,000	OMEGA	0,083	0,000	OMEGA	0,077	0,000
	0,102	0,048		0,035	0,163		0,067	0,149
se_OMEGA	0,015	0,000	se_OMEGA	0,019	0,000	se_OMEGA	0,020	0,000
	0,025	0,015		0,049	0,046		0,052	0,032
A	0,166	0,055	A	0,198	0,004	A	0,210	-0,023
	-0,005	0,244		-0,006	0,239		0,046	0,217
se_A	0,024	0,020	se_A	0,027	0,015	se_A	0,022	0,017
	0,045	0,026		0,043	0,045		0,049	0,027
B	0,984	-0,012	B	0,978	-0,002	B	0,976	0,003
	-0,001	0,968		0,004	0,965		-0,008	0,969
se_B	0,004	0,004	se_B	0,006	0,005	se_B	0,005	0,005
	0,008	0,006		0,011	0,014		0,012	0,008
nu	4,437		nu	4,056		nu	4,244	
se_nu	0,377		se_nu	0,307		se_nu	0,323	

CAC 40, DAX			CAC 40, Hang Seng			CAC 40, Nikkei 225		
c	0,061		c	0,049		c	0,052	
	0,070			0,082			-0,009	
se_c	0,018		se_c	0,020		se_c	0,021	
	0,018			0,021			0,021	
Q	0,054	-0,029	Q	0,016	-0,004	Q	0,029	-0,045
	0,184	-0,130		0,173	0,009		0,220	-0,061
se_Q	0,026	0,025	se_Q	0,018	0,015	se_Q	0,018	0,015
	0,023	0,023		0,019	0,019		0,020	0,018
OMEGA	0,082	0,000	OMEGA	0,128	0,000	OMEGA	0,137	0,000
	0,093	0,026		0,056	0,141		0,144	0,131
se_OMEGA	0,018	0,000	se_OMEGA	0,029	0,000	se_OMEGA	0,022	0,000
	0,021	0,010		0,036	0,033		0,056	0,045
A	0,190	0,023	A	0,187	0,034	A	0,200	-0,005
	0,002	0,219		-0,022	0,235		0,007	0,243
se_A	0,022	0,025	se_A	0,030	0,018	se_A	0,027	0,031
	0,024	0,023		0,036	0,036		0,070	0,041
B	0,981	-0,006	B	0,978	-0,009	B	0,978	-0,009
	-0,002	0,974		0,004	0,967		0,002	0,960
se_B	0,004	0,005	se_B	0,007	0,006	se_B	0,006	0,010
	0,004	0,005		0,009	0,011		0,018	0,013
nu	4,373		nu	4,196		nu	4,385	
se_nu	0,360		se_nu	0,345		se_nu	0,356	

DAX, Hang Seng			DAX, Nikkei 225			Hang Seng, Nikkei 225		
c	0,068		c	0,069		c	0,080	
	0,081			-0,008			0,006	
se_c	0,018		se_c	0,018		se_c	0,021	
	0,021			0,021			0,022	
Q	0,009	-0,003	Q	0,016	-0,035	Q	0,059	-0,018
	0,163	0,000		0,211	-0,061		0,027	-0,013
se_Q	0,017	0,013	se_Q	0,017	0,013	se_Q	0,019	0,018
	0,018	0,018		0,019	0,017		0,017	0,018
OMEGA	0,096	0,000	OMEGA	0,107	0,000	OMEGA	0,155	0,000
	0,078	0,139		0,124	0,124		0,121	0,138
se_OMEGA	0,020	0,000	se_OMEGA	0,020	0,000	se_OMEGA	0,031	0,000
	0,050	0,029		0,044	0,039		0,058	0,033
A	0,211	0,013	A	0,219	-0,004	A	0,234	0,001
	-0,005	0,244		0,014	0,232		0,014	0,234
se_A	0,022	0,020	se_A	0,024	0,017	se_A	0,039	0,039
	0,030	0,041		0,060	0,039		0,019	0,028
B	0,977	-0,005	B	0,975	-0,005	B	0,969	-0,005
	0,002	0,965		-0,002	0,966		-0,004	0,966
se_B	0,005	0,006	se_B	0,006	0,005	se_B	0,010	0,011
	0,007	0,012		0,015	0,011		0,005	0,009
nu	3,731		nu	3,873		nu	3,846	
se_nu	0,273		se_nu	0,276		se_nu	0,283	

П 1.3 Оценки параметров моделей доходностей фондовых индексов на основе многомерного обобщенного распределения ошибки

S&P 500, FTSE 100			S&P 500, CAC40			S&P 500, DAX		
c	0,059		c	0,058		c	0,059	
	0,031			0,040			0,063	
se_c	0,014		se_c	0,014		se_c	0,014	
	0,014			0,019			0,018	
Q	-0,003	0,015	Q	-0,013	0,028	Q	0,017	0,004
	0,302	-0,121		0,376	-0,125		0,415	-0,137
se_Q	0,019	0,018	se_Q	0,018	0,012	se_Q	0,018	0,013
	0,019	0,019		0,026	0,018		0,026	0,018
OMEGA	0,048	0,000	OMEGA	0,039	0,000	OMEGA	0,058	0,000
	-0,015	0,095		-0,031	0,130		-0,057	0,085
se_OMEGA	0,016	0,000	se_OMEGA	0,023	0,000	se_OMEGA	0,022	0,000
	0,037	0,021		0,063	0,032		0,031	0,028
A	0,159	-0,009	A	0,144	0,016	A	0,176	-0,013
	-0,012	0,228		-0,078	0,225		-0,031	0,205
se_A	0,024	0,024	se_A	0,027	0,017	se_A	0,030	0,017
	0,033	0,028		0,036	0,026		0,034	0,021
B	0,986	0,002	B	0,989	-0,004	B	0,983	0,002
	0,007	0,967		0,020	0,967		0,014	0,973
se_B	0,005	0,005	se_B	0,005	0,004	se_B	0,007	0,004
	0,007	0,009		0,007	0,008		0,007	0,005
kappa	0,739		kappa	0,777		kappa	0,786	
se_kappa	0,024		se_kappa	0,028		se_kappa	0,034	

S&P 500, Hang Seng			S&P 500, Nikkei 225			FTSE 100, CAC 40		
c	0,056		c	0,058		c	0,048	
	0,054			-0,012			0,052	
se_c	0,015		se_c	0,014		se_c	0,015	
	0,021			0,021			0,020	
Q	-0,002	-0,001	Q	0,008	-0,006	Q	-0,005	0,017
	0,462	-0,002		0,430	-0,053		0,009	0,014
se_Q	0,018	0,010	se_Q	0,017	0,009	se_Q	0,028	0,019
	0,025	0,018		0,024	0,016		0,039	0,027
OMEGA	0,045	0,000	OMEGA	0,047	0,000	OMEGA	0,098	0,000
	-0,001	0,190		-0,034	0,181		0,128	0,040
se_OMEGA	0,015	0,000	se_OMEGA	0,013	0,000	se_OMEGA	0,017	0,000
	0,063	0,051		0,070	0,044		0,025	0,014
A	0,155	0,004	A	0,154	-0,002	A	0,229	0,003
	-0,028	0,274		-0,030	0,253		0,104	0,159
se_A	0,019	0,013	se_A	0,020	0,010	se_A	0,030	0,023
	0,037	0,046		0,046	0,024		0,041	0,029
B	0,987	-0,002	B	0,987	0,000	B	0,972	-0,003
	0,010	0,954		0,010	0,959		-0,021	0,982
se_B	0,003	0,004	se_B	0,003	0,003	se_B	0,006	0,004
	0,008	0,017		0,009	0,009		0,008	0,006
kappa	0,818		kappa	0,796		kappa	0,743	
se_kappa	0,033		se_kappa	0,027		se_kappa	0,030	

FTSE 100, DAX			FTSE 100, Hang Seng			FTSE 100, Nikkei 225		
c	0,052		c	0,052		c	0,052	
	0,073			0,076			-0,008	
se_c	0,014		se_c	0,015		se_c	0,015	
	0,019			0,021			0,021	
Q	0,029	-0,007	Q	0,011	-0,013	Q	0,037	-0,050
	0,137	-0,064		0,267	-0,018		0,283	-0,065
se_Q	0,023	0,016	se_Q	0,019	0,012	se_Q	0,019	0,011
	0,031	0,021		0,025	0,019		0,024	0,018
OMEGA	0,083	0,000	OMEGA	0,087	0,000	OMEGA	0,083	0,000
	0,118	0,050		0,059	0,168		0,085	0,153
se_OMEGA	0,015	0,000	se_OMEGA	0,019	0,000	se_OMEGA	0,020	0,000
	0,026	0,016		0,051	0,053		0,054	0,035
A	0,173	0,053	A	0,200	0,007	A	0,214	-0,019
	0,001	0,241		0,001	0,235		0,050	0,216
se_A	0,024	0,021	se_A	0,027	0,015	se_A	0,021	0,018
	0,044	0,029		0,040	0,049		0,046	0,027
B	0,982	-0,012	B	0,977	-0,003	B	0,975	0,002
	-0,004	0,968		0,002	0,964		-0,009	0,968
se_B	0,004	0,005	se_B	0,007	0,005	se_B	0,005	0,006
	0,009	0,007		0,011	0,016		0,011	0,008
kappa	0,760		kappa	0,783		kappa	0,767	
se_kappa	0,035		se_kappa	0,030		se_kappa	0,026	

CAC 40, DAX			CAC 40, Hang Seng			CAC 40, Nikkei 225		
c	0,058		c	0,044		c	0,048	
	0,068			0,074			-0,003	
se_c	0,018		se_c	0,021		se_c	0,021	
	0,018			0,021			0,022	
Q	0,056	-0,038	Q	0,011	-0,009	Q	0,021	-0,044
	0,185	-0,135		0,169	0,002		0,220	-0,065
se_Q	0,024	0,024	se_Q	0,019	0,015	se_Q	0,018	0,015
	0,022	0,022		0,020	0,019		0,021	0,018
OMEGA	0,098	0,000	OMEGA	0,139	0,000	OMEGA	0,149	0,000
	0,108	-0,026		0,078	0,144		0,160	0,133
se_OMEGA	0,020	0,000	se_OMEGA	0,030	0,000	se_OMEGA	0,024	0,000
	0,024	0,010		0,037	0,035		0,057	0,044
A	0,193	0,021	A	0,185	0,034	A	0,199	-0,003
	0,005	0,216		-0,021	0,234		0,012	0,240
se_A	0,023	0,031	se_A	0,030	0,017	se_A	0,025	0,030
	0,021	0,029		0,034	0,036		0,057	0,038
B	0,980	-0,006	B	0,978	-0,009	B	0,977	-0,009
	-0,003	0,975		0,003	0,967		-0,001	0,960
se_B	0,004	0,006	se_B	0,007	0,006	se_B	0,006	0,010
	0,004	0,006		0,009	0,011		0,015	0,013
kappa	0,761		kappa	0,787		kappa	0,760	
se_kappa	0,034		se_kappa	0,034		se_kappa	0,029	

DAX, Hang Seng			DAX, Nikkei 225			Hang Seng, Nikkei 225		
c	0,068		c	0,068		c	0,070	
	0,074			-0,006			0,002	
se_c	0,019		se_c	0,019		se_c	0,021	
	0,021			0,021			0,022	
Q	0,011	-0,006	Q	0,010	-0,040	Q	0,054	-0,018
	0,159	-0,005		0,209	-0,066		0,027	-0,020
se_Q	0,018	0,013	se_Q	0,018	0,013	se_Q	0,019	0,018
	0,018	0,018		0,019	0,017		0,017	0,018
OMEGA	0,114	0,000	OMEGA	0,123	0,000	OMEGA	0,173	0,000
	0,113	0,148		0,135	0,135		0,162	0,139
se_OMEGA	0,021	0,000	se_OMEGA	0,022	0,000	se_OMEGA	0,033	0,000
	0,054	0,030		0,047	0,041		0,051	0,036
A	0,204	0,020	A	0,216	-0,003	A	0,232	0,010
	-0,014	0,257		0,011	0,234		0,019	0,235
se_A	0,025	0,020	se_A	0,027	0,017	se_A	0,038	0,035
	0,030	0,044		0,058	0,039		0,020	0,029
B	0,977	-0,008	B	0,975	-0,006	B	0,969	-0,009
	0,003	0,960		-0,001	0,964		-0,006	0,963
se_B	0,006	0,007	se_B	0,006	0,006	se_B	0,010	0,010
	0,007	0,014		0,014	0,011		0,006	0,009
kappa	0,835		kappa	0,809		kappa	0,818	
se_kappa	0,038		se_kappa	0,034		se_kappa	0,033	

П 1.4 Оценки параметров моделей доходностей фондовых индексов на основе многомерного распределения Грама – Шарлье

S&P 500, FTSE 100					S&P 500, CAC40					S&P 500, DAX				
c	0,053				c	0,047				c	0,050			
	0,037					0,045					0,052			
se_c	0,016				se_c	0,016				se_c	0,015			
	0,015					0,021					0,020			
Q	-0,001	0,017			Q	-0,011	0,034			Q	0,011	0,006		
	0,306	-0,114				0,376	-0,117				0,418	-0,137		
se_Q	0,018	0,018			se_Q	0,019	0,013			se_Q	0,018	0,013		
	0,019	0,019				0,027	0,019				0,025	0,018		
OMEGA	0,048	0,000			OMEGA	0,043	0,000			OMEGA	0,064	0,000		
	-0,013	0,098				-0,053	0,118				-0,065	0,080		
se_OMEGA	0,015	0,000			se_OMEGA	0,022	0,000			se_OMEGA	0,021	0,000		
	0,037	0,020				0,063	0,041				0,030	0,031		
A	0,162	-0,013			A	0,149	0,011			A	0,186	-0,023		
	-0,009	0,234				-0,096	0,220				-0,047	0,194		
se_A	0,022	0,024			se_A	0,028	0,017			se_A	0,029	0,019		
	0,033	0,027				0,036	0,028				0,031	0,028		
B	0,986	0,002			B	0,989	-0,002			B	0,981	0,004		
	0,009	0,965				0,024	0,967				0,018	0,975		
se_B	0,005	0,005			se_B	0,005	0,004			se_B	0,007	0,004		
	0,007	0,008				0,007	0,008				0,006	0,006		
D3	-0,078	0,024	0,024	-0,003	D3	-0,104	0,055	0,055	-0,041	D3	-0,097	0,030	0,030	-0,040
	0,024	-0,003	-0,003	-0,013		0,055	-0,041	-0,041	0,011		0,030	-0,040	-0,040	-0,096
se_D3	0,063	0,031	0,031	0,030	se_D3	0,063	0,031	0,031	0,029	se_D3	0,063	0,030	0,030	0,031
	0,031	0,030	0,030	0,052		0,031	0,029	0,029	0,053		0,030	0,031	0,031	0,059
D4	4,079	0,117	0,117	1,284	D4	4,025	0,142	0,142	1,280	D4	4,052	0,172	0,172	1,223
	0,117	1,284	1,284	0,021		0,142	1,280	1,280	-0,067		0,172	1,223	1,223	0,072
	0,117	1,284	1,284	0,021		0,142	1,280	1,280	-0,067		0,172	1,223	1,223	0,072
	1,284	0,021	0,021	3,559		1,280	-0,067	-0,067	3,647		1,223	0,072	0,072	3,835
se_D4	0,145	0,064	0,064	0,050	se_D4	0,146	0,066	0,066	0,050	se_D4	0,145	0,068	0,068	0,058
	0,064	0,050	0,050	0,055		0,066	0,050	0,050	0,059		0,068	0,058	0,058	0,075
	0,064	0,050	0,050	0,055		0,066	0,050	0,050	0,059		0,068	0,058	0,058	0,075
	0,050	0,055	0,055	0,113		0,050	0,059	0,059	0,120		0,058	0,075	0,075	0,143

S&P 500, Hang Seng					S&P 500, Nikkei 225					FTSE 100, CAC 40				
c	0,051				c	0,051				c	0,046			
	0,046					-0,012					0,050			
se_c	0,016				se_c	0,016				se_c	0,016			
	0,024					0,023					0,021			
Q	0,008	-0,007			Q	0,010	-0,002			Q	-0,004	0,019		
	0,474	-0,006				0,429	-0,053				0,013	0,015		
se_Q	0,018	0,010			se_Q	0,017	0,010			se_Q	0,023	0,017		
	0,027	0,020				0,023	0,017				0,034	0,024		
OMEGA	0,041	0,000			OMEGA	0,046	0,000			OMEGA	0,097	0,000		
	0,057	0,213				-0,069	0,185				0,129	0,042		
se_OMEGA	0,015	0,000			se_OMEGA	0,015	0,000			se_OMEGA	0,018	0,000		
	0,152	0,084				0,072	0,058				0,028	0,015		
A	0,151	0,006			A	0,161	-0,007			A	0,238	-0,002		
	-0,038	0,269				-0,049	0,240				0,120	0,150		
se_A	0,019	0,020			se_A	0,022	0,010			se_A	0,033	0,025		
	0,040	0,088				0,038	0,027				0,048	0,037		
B	0,989	-0,003			B	0,986	0,002			B	0,971	-0,003		
	0,012	0,954				0,014	0,962				-0,024	0,983		
se_B	0,003	0,008			se_B	0,004	0,003			se_B	0,006	0,004		
	0,008	0,034				0,008	0,009				0,010	0,007		
D3	-0,065	-0,056	-0,056	0,066	D3	-0,071	-0,020	-0,020	0,030	D3	-0,056	-0,010	-0,010	-0,029
	-0,056	0,066	0,066	-0,056		-0,020	0,030	0,030	0,013		-0,010	-0,029	-0,029	0,013
se_D3	0,064	0,031	0,031	0,034	se_D3	0,065	0,031	0,031	0,030	se_D3	0,057	0,031	0,031	0,032
	0,031	0,034	0,034	0,064		0,031	0,030	0,030	0,060		0,031	0,032	0,032	0,060
D4	4,064	-0,008	-0,008	1,205	D4	4,071	-0,023	-0,023	1,187	D4	3,623	-0,048	-0,048	1,286
	-0,008	1,205	1,205	0,132		-0,023	1,187	1,187	0,053		-0,048	1,286	1,286	-0,101
	-0,008	1,205	1,205	0,132		-0,023	1,187	1,187	0,053		-0,048	1,286	1,286	-0,101
	1,205	0,132	0,132	4,041		1,187	0,053	0,053	4,019		1,286	-0,101	-0,101	3,809
se_D4	0,147	0,073	0,073	0,059	se_D4	0,151	0,066	0,066	0,052	se_D4	0,129	0,069	0,069	0,056
	0,073	0,059	0,059	0,073		0,066	0,052	0,052	0,072		0,069	0,056	0,056	0,069
	0,073	0,059	0,059	0,073		0,066	0,052	0,052	0,072		0,069	0,056	0,056	0,069
	0,059	0,073	0,073	0,157		0,052	0,072	0,072	0,148		0,056	0,069	0,069	0,165

	FTSE 100, DAX				FTSE 100, Hang Seng				FTSE 100, Nikkei 225					
c	0,042				c	0,046				c	0,049			
	0,057					0,059					-0,012			
se_c	0,015				se_c	0,016				se_c	0,016			
	0,023					0,025					0,024			
Q	0,031	-0,006			Q	0,017	-0,007			Q	0,042	-0,049		
	0,141	-0,065				0,272	-0,008				0,293	-0,068		
se_Q	0,022	0,015			se_Q	0,019	0,011			se_Q	0,020	0,012		
	0,033	0,022				0,026	0,020				0,027	0,018		
OMEGA	0,091	0,000			OMEGA	0,090	0,000			OMEGA	0,081	0,000		
	0,134	0,051				0,109	0,189				0,104	0,156		
se_OMEGA	0,017	0,000			se_OMEGA	0,020	0,000			se_OMEGA	0,021	0,000		
	0,033	0,018				0,076	0,058				0,061	0,037		
A	0,190	0,038			A	0,210	0,010			A	0,221	-0,021		
	0,022	0,222				0,024	0,232				0,064	0,200		
se_A	0,033	0,032			se_A	0,028	0,017			se_A	0,021	0,018		
	0,059	0,056				0,036	0,056				0,044	0,026		
B	0,978	-0,008			B	0,976	-0,005			B	0,974	0,001		
	-0,010	0,974				-0,001	0,963				-0,011	0,971		
se_B	0,006	0,008			se_B	0,008	0,007			se_B	0,005	0,006		
	0,012	0,013				0,011	0,020				0,010	0,008		
D3	-0,053	-0,060	-0,060	-0,059	D3	-0,054	-0,077	-0,077	0,016	D3	-0,065	-0,003	-0,003	-0,030
	-0,060	-0,059	-0,059	-0,003		-0,077	0,016	0,016	0,011		-0,003	-0,030	-0,030	0,017
se_D3	0,056	0,033	0,033	0,033	se_D3	0,057	0,030	0,030	0,031	se_D3	0,057	0,031	0,031	0,031
	0,033	0,033	0,033	0,062		0,030	0,031	0,031	0,060		0,031	0,031	0,031	0,058
D4	3,618	-0,021	-0,021	1,304	D4	3,694	0,023	0,023	1,283	D4	3,668	0,005	0,005	1,298
	-0,021	1,304	1,304	0,024		0,023	1,283	1,283	0,087		0,005	1,298	1,298	0,142
	-0,021	1,304	1,304	0,024		0,023	1,283	1,283	0,087		0,005	1,298	1,298	0,142
	1,304	0,024	0,024	3,914		1,283	0,087	0,087	4,098		1,298	0,142	0,142	3,894
se_D4	0,124	0,069	0,069	0,059	se_D4	0,130	0,064	0,064	0,051	se_D4	0,124	0,065	0,065	0,051
	0,069	0,059	0,059	0,085		0,064	0,051	0,051	0,065		0,065	0,051	0,051	0,069
	0,069	0,059	0,059	0,085		0,064	0,051	0,051	0,065		0,065	0,051	0,051	0,069
	0,059	0,085	0,085	0,218		0,051	0,065	0,065	0,153		0,051	0,069	0,069	0,139

	CAC 40, DAX				CAC 40, Hang Seng				CAC 40, Nikkei 225					
c	0,052				c	0,045				c	0,046			
	0,055					0,067					-0,014			
se_c	0,020				se_c	0,023				se_c	0,022			
	0,023					0,026					0,024			
Q	0,056	-0,034			Q	0,014	-0,008			Q	0,023	-0,043		
	0,191	-0,139				0,173	0,004				0,225	-0,061		
se_Q	0,026	0,026			se_Q	0,019	0,014			se_Q	0,019	0,015		
	0,024	0,024				0,020	0,019				0,021	0,018		
OMEGA	0,113	0,000			OMEGA	0,157	0,000			OMEGA	0,150	0,000		
	0,118	0,024				0,110	0,144				0,140	0,127		
se_OMEGA	0,028	0,000			se_OMEGA	0,038	0,000			se_OMEGA	0,036	0,000		
	0,040	0,011				0,041	0,031				0,068	0,039		
A	0,203	0,006			A	0,193	0,028			A	0,216	-0,033		
	-0,002	0,207				-0,013	0,220				0,036	0,196		
se_A	0,030	0,058			se_A	0,036	0,015			se_A	0,028	0,031		
	0,022	0,055				0,031	0,030				0,044	0,031		
B	0,977	-0,002			B	0,975	-0,008			B	0,972	0,001		
	-0,003	0,978				0,001	0,971				-0,008	0,973		
se_B	0,006	0,013			se_B	0,010	0,004			se_B	0,007	0,011		
	0,004	0,013				0,008	0,009				0,011	0,010		
D3	-0,080	-0,080	-0,080	-0,016	D3	-0,080	-0,056	-0,056	0,010	D3	-0,054	-0,023	-0,023	-0,001
	-0,080	-0,016	-0,016	-0,036		-0,056	0,010	0,010	0,004		-0,023	-0,001	-0,001	0,018
se_D3	0,055	0,031	0,031	0,033	se_D3	0,057	0,030	0,030	0,031	se_D3	0,058	0,030	0,030	0,031
	0,031	0,033	0,033	0,059		0,030	0,031	0,031	0,064		0,030	0,031	0,031	0,059
D4	3,667	0,085	0,085	1,327	D4	3,695	0,112	0,112	1,255	D4	3,727	0,119	0,119	1,275
	0,085	1,327	1,327	0,070		0,112	1,255	1,255	0,156		0,119	1,275	1,275	0,065
	0,085	1,327	1,327	0,070		0,112	1,255	1,255	0,156		0,119	1,275	1,275	0,065
	1,327	0,070	0,070	3,885		1,255	0,156	0,156	4,019		1,275	0,065	0,065	3,945
se_D4	0,136	0,071	0,071	0,063	se_D4	0,139	0,068	0,068	0,058	se_D4	0,142	0,074	0,074	0,053
	0,071	0,063	0,063	0,083		0,068	0,058	0,058	0,070		0,074	0,053	0,053	0,065
	0,071	0,063	0,063	0,083		0,068	0,058	0,058	0,070		0,074	0,053	0,053	0,065
	0,063	0,083	0,083	0,154		0,058	0,070	0,070	0,142		0,053	0,065	0,065	0,138

	DAX, Hang Seng					DAX, Nikkei 225					Hang Seng, Nikkei 225			
c	0,048				c	0,054				c	0,082			
	0,061					-0,011					0,009			
se_c	0,024				se_c	0,023				se_c	0,025			
	0,026					0,024					0,026			
Q	0,011	0,001			Q	0,010	-0,034			Q	0,073	-0,026		
	0,157	0,003				0,212	-0,057				0,034	-0,017		
se_Q	0,017	0,013			se_Q	0,018	0,014			se_Q	0,021	0,020		
	0,018	0,018				0,020	0,018				0,018	0,020		
OMEGA	0,141	0,000			OMEGA	0,143	0,000			OMEGA	0,207	0,000		
	0,184	0,150				0,164	0,131				0,209	0,132		
se_OMEGA	0,028	0,000			se_OMEGA	0,030	0,000			se_OMEGA	0,049	0,000		
	0,073	0,030				0,048	0,036				0,069	0,041		
A	0,192	0,025			A	0,212	-0,005			A	0,238	0,015		
	-0,013	0,267				0,031	0,225				0,029	0,237		
se_A	0,041	0,015			se_A	0,042	0,015			se_A	0,041	0,039		
	0,036	0,040				0,041	0,032				0,021	0,038		
B	0,980	-0,011			B	0,975	-0,004			B	0,969	-0,013		
	0,003	0,955				-0,007	0,966				-0,009	0,960		
se_B	0,009	0,006			se_B	0,010	0,005			se_B	0,011	0,012		
	0,008	0,015				0,010	0,009				0,006	0,013		
D3	-0,131	-0,071	-0,071	0,033	D3	-0,141	-0,007	-0,007	-0,005	D3	0,067	-0,007	-0,007	0,007
	-0,071	0,033	0,033	0,017		-0,007	-0,005	-0,005	0,032		-0,007	0,007	0,007	0,017
se_D3	0,067	0,033	0,033	0,032	se_D3	0,068	0,033	0,033	0,032	se_D3	0,065	0,034	0,034	0,031
	0,033	0,032	0,032	0,057		0,033	0,032	0,032	0,058		0,034	0,031	0,031	0,059
D4	4,010	0,014	0,014	1,329	D4	4,057	0,005	0,005	1,326	D4	4,148	-0,039	-0,039	1,256
	0,014	1,329	1,329	0,107		0,005	1,326	1,326	-0,022		-0,039	1,256	1,256	0,077
	0,014	1,329	1,329	0,107		0,005	1,326	1,326	-0,022		-0,039	1,256	1,256	0,077
	1,329	0,107	0,107	3,923		1,326	-0,022	-0,022	3,859		1,256	0,077	0,077	3,754
se_D4	0,210	0,076	0,076	0,059	se_D4	0,229	0,067	0,067	0,056	se_D4	0,169	0,067	0,067	0,053
	0,076	0,059	0,059	0,063		0,067	0,056	0,056	0,064		0,067	0,053	0,053	0,065
	0,076	0,059	0,059	0,063		0,067	0,056	0,056	0,064		0,067	0,053	0,053	0,065
	0,059	0,063	0,063	0,131		0,056	0,064	0,064	0,129		0,053	0,065	0,065	0,148

П 1.5 Результаты KLIC теста внутри и вне выборки, использованной для оценки моделей

Пара моделей → Внутри/вне выборки →	SDF vs VDF1		SDF vs VDF2		SDF vs GED		SDF vs GC		VDF1 vs GED		VDF2 vs GED		VDF1 vs GC		VDF2 vs GC		GED vs GC		
	Внутри	Вне	Внутри	Вне	Внутри	Вне	Внутри	Вне	Внутри	Вне	Внутри	Вне	Внутри	Вне	Внутри	Вне	Внутри	Вне	
Пара фондовых индексов ↓																			
S&P 500, FTSE 100	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+
S&P 500, CAC 40	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S&P 500, DAX	+	-	+	+	+	*	+	+	+	*	+	*	+	+	+	+	+	+	+
S&P 500, Hang Seng	+	-	-	+	+	*	+	+	+	*	+	*	+	+	+	+	+	+	+
S&P 500, Nikkei 225	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
FTSE 100, CAC 40	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
FTSE 100, DAX	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
FTSE 100, Hang Seng	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
FTSE 100, Nikkei 225	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
CAC 40, DAX	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
CAC 40, Hang Seng	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
CAC 40, Nikkei 225	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
DAX, Hang Seng	-	+	+	-	+	-	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+
DAX, Nikkei 225	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Hang Seng, Nikkei 225	-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Модели: SDF – t -распределение с $\nu_1 = \nu_2 = 4$, VDF1 – $\nu_1 = 4, 1; \nu_2 = 3, 9$, VDF2 – $\nu_1 = 3, 9; \nu_2 = 4, 1$, GED – обобщенное распределение ошибки, GC – распределение Грама – Шарлье.

Сравнение: "M1 vs M2": $KLIC > 1,96 \Rightarrow$ модель M1 лучше («+», белая ячейка), $KLIC < -1,96 \Rightarrow$ модель M2 лучше («-», серая ячейка), $-1,96 < KLIC < 1,96 \Rightarrow$ различие между моделями M1 и M2 незначимо на уровне значимости 5% («*», белая ячейка).

Приложение главы 2

(первым следует вектор/матрица оценок параметров, далее после «se_...» – вектор/матрица стандартных ошибок этих оценок)

П 2.1 Оценки параметров моделей доходностей акций на основе многомерного нормального распределения

ПОРТФЕЛЬ №1

c	se_c
0,0690	0,0810
0,0954	0,0921
0,0710	0,0763
0,1567	0,0831
0,1990	0,1105
0,0470	0,0548
0,0356	0,0980
0,0330	0,0847
0,1512	0,0998
0,0622	0,0834

Q

0,0412	-0,0194	0,0322	-0,0276	0,0360	-0,0249	-0,0779	-0,0669	0,0146	0,0036
-0,0538	0,1565	-0,0640	0,0174	0,0345	-0,1214	-0,0474	-0,0160	-0,0524	0,0450
-0,0257	-0,0454	0,1805	-0,0035	0,0089	-0,0652	-0,0736	-0,0726	-0,0152	0,0286
-0,0553	0,0093	0,0578	0,0530	0,0609	0,0348	-0,0625	-0,0423	0,0014	0,0004
0,0811	-0,0838	0,1244	-0,0794	0,1026	-0,0159	-0,1410	-0,0691	-0,0304	0,0369
-0,0090	0,0808	-0,0690	-0,0369	0,0152	-0,0165	-0,0407	-0,0197	0,0084	0,0153
-0,0435	0,1762	-0,1428	0,0715	0,0084	-0,1421	0,1034	-0,1750	0,0850	-0,0079
-0,0833	0,0128	0,0267	-0,0178	0,0434	-0,0221	0,0027	0,0478	0,0222	0,0067
-0,1050	-0,0224	0,1265	-0,0172	0,0467	0,0481	-0,0910	0,0281	0,1444	0,0267
0,0696	0,1248	-0,0462	-0,1289	-0,0153	-0,1125	-0,0512	-0,0124	0,1301	0,1075

se_Q

0,0793	0,0598	0,0850	0,0641	0,0479	0,1291	0,0420	0,0709	0,0435	0,0396
0,0854	0,0721	0,0891	0,0694	0,0555	0,1293	0,0441	0,0839	0,0467	0,0351
0,0735	0,0553	0,0761	0,0562	0,0475	0,1107	0,0360	0,0631	0,0356	0,0355
0,0808	0,0668	0,0898	0,0705	0,0460	0,0997	0,0440	0,0778	0,0450	0,0404
0,1025	0,0753	0,1065	0,0797	0,0597	0,1539	0,0482	0,0838	0,0452	0,0516
0,0508	0,0453	0,0515	0,0445	0,0328	0,0950	0,0345	0,0500	0,0258	0,0292
0,1145	0,0891	0,0923	0,0749	0,0684	0,1245	0,0602	0,0810	0,0479	0,0656
0,0606	0,0446	0,0604	0,0363	0,0275	0,0597	0,0237	0,0594	0,0314	0,0261
0,0854	0,0776	0,0869	0,0814	0,0518	0,1144	0,0392	0,0752	0,0480	0,0572
0,0692	0,0542	0,0632	0,0504	0,0339	0,0849	0,0323	0,0466	0,0429	0,0548

OMEGA se_OMEGA

0,2415	0,0796
0,3253	0,1317
0,2335	0,0597
0,2071	0,1287
0,1664	0,0959
0,0439	0,0174
0,1377	0,0848
2,5219	1,0573
0,5929	0,2297
0,2372	0,1088

A	se_A
0,0826	0,0237

0,0953 0,0273
 0,0838 0,0165
 0,0899 0,0425
 0,0578 0,0217
 0,0574 0,0146
 0,0664 0,0229
 0,3820 0,1543
 0,1567 0,0584
 0,2013 0,0558
B **se_B**
 0,8871 0,0257
 0,8695 0,0372
 0,8835 0,0177
 0,8858 0,0509
 0,9288 0,0255
 0,9280 0,0161
 0,9234 0,0246
 0,2457 0,2464
 0,8019 0,0597
 0,8065 0,0443
S
 1,0000 0,7497 0,8130 0,6933 0,5668 0,6095 0,4248 0,4560 0,5444 0,3885
 0,7497 1,0000 0,7501 0,6437 0,5442 0,6706 0,4841 0,5103 0,5318 0,3642
 0,8130 0,7501 1,0000 0,6849 0,5586 0,6356 0,4157 0,5012 0,5669 0,3852
 0,6933 0,6437 0,6849 1,0000 0,5487 0,5325 0,3527 0,4052 0,5245 0,3706
 0,5668 0,5442 0,5586 0,5487 1,0000 0,4978 0,2908 0,4172 0,4743 0,3093
 0,6095 0,6706 0,6356 0,5325 0,4978 1,0000 0,4107 0,4459 0,4868 0,3413
 0,4248 0,4841 0,4157 0,3527 0,2908 0,4107 1,0000 0,3249 0,3492 0,2639
 0,4560 0,5103 0,5012 0,4052 0,4172 0,4459 0,3249 1,0000 0,3709 0,3072
 0,5444 0,5318 0,5669 0,5245 0,4743 0,4868 0,3492 0,3709 1,0000 0,3171
 0,3885 0,3642 0,3852 0,3706 0,3093 0,3413 0,2639 0,3072 0,3171 1,0000
se_S
 0,0000 0,0224 0,0170 0,0274 0,0353 0,0289 0,0462 0,0414 0,0378 0,0457
 0,0224 0,0000 0,0225 0,0282 0,0318 0,0256 0,0478 0,0390 0,0382 0,0469
 0,0170 0,0225 0,0000 0,0276 0,0352 0,0309 0,0565 0,0382 0,0355 0,0475
 0,0274 0,0282 0,0276 0,0000 0,0384 0,0329 0,0453 0,0378 0,0381 0,0411
 0,0353 0,0318 0,0352 0,0384 0,0000 0,0391 0,0433 0,0384 0,0428 0,0448
 0,0289 0,0256 0,0309 0,0329 0,0391 0,0000 0,0456 0,0429 0,0378 0,0480
 0,0462 0,0478 0,0565 0,0453 0,0433 0,0456 0,0000 0,0537 0,0485 0,0576
 0,0414 0,0390 0,0382 0,0378 0,0384 0,0429 0,0537 0,0000 0,0405 0,0514
 0,0378 0,0382 0,0355 0,0381 0,0428 0,0378 0,0485 0,0405 0,0000 0,0485
 0,0457 0,0469 0,0475 0,0411 0,0448 0,0480 0,0576 0,0514 0,0485 0,0000
alpha **se_alpha**
 0,0007 0,0002
beta **se_beta**
 0,9025 0,0394

ПОРТФЕЛЬ №2

c	se_c
0,0424	0,0809
0,0885	0,1089
0,0647	0,0925
0,1520	0,0936
0,1981	0,1198
0,0490	0,0596
0,0343	0,1117
0,0296	0,0862
0,1534	0,1059
0,0519	0,0811

Q

0,1692	-0,0565	-0,0435	0,0140	-0,0062	-0,0806	-0,0658	0,0018	0,0396	-0,0264
0,0945	0,1294	-0,1133	-0,0035	0,0226	-0,1476	-0,0402	-0,0049	-0,0401	0,0352
0,1094	-0,0677	0,1385	-0,0283	-0,0013	-0,0861	-0,0625	-0,0604	-0,0042	0,0147
0,0750	-0,0170	0,0134	0,0301	0,0553	0,0229	-0,0555	-0,0317	0,0092	-0,0083
0,0370	-0,0793	0,1580	-0,0800	0,1100	-0,0205	-0,1279	-0,0618	-0,0262	0,0306
0,1418	0,0580	-0,1190	-0,0546	0,0052	-0,0402	-0,0337	-0,0115	0,0108	0,0105
-0,0481	0,1616	-0,1325	0,0695	0,0050	-0,1402	0,1120	-0,1701	0,0890	-0,0136
-0,0350	0,0084	0,0098	-0,0359	0,0369	-0,0258	0,0043	0,0473	0,0250	0,0067
0,0938	-0,0615	0,0519	-0,0503	0,0325	0,0228	-0,0868	0,0436	0,1539	0,0183
0,0352	0,1307	-0,0221	-0,1222	-0,0110	-0,1135	-0,0435	-0,0130	0,1332	0,1081

se_Q

0,0775	0,0553	0,0656	0,0705	0,0308	0,0783	0,0360	0,0517	0,0295	0,0279
0,0999	0,0740	0,0873	0,1092	0,0412	0,0966	0,0421	0,0635	0,0463	0,0304
0,0889	0,0577	0,0711	0,0856	0,0355	0,0880	0,0341	0,0530	0,0342	0,0298
0,0851	0,0675	0,0913	0,0912	0,0415	0,0938	0,0443	0,0602	0,0424	0,0343
0,1127	0,0811	0,1110	0,1050	0,0551	0,1331	0,0483	0,0729	0,0467	0,0443
0,0620	0,0451	0,0509	0,0617	0,0261	0,0659	0,0347	0,0375	0,0230	0,0277
0,1123	0,0842	0,0863	0,0856	0,0471	0,1038	0,0570	0,0664	0,0475	0,0623
0,0603	0,0510	0,0539	0,0408	0,0262	0,0547	0,0228	0,0597	0,0330	0,0254
0,1075	0,0732	0,0912	0,1051	0,0443	0,1165	0,0370	0,0660	0,0486	0,0505
0,0887	0,0527	0,0708	0,0589	0,0326	0,0814	0,0309	0,0495	0,0440	0,0540

OMEGA se_OMEGA

0,1326	0,0400
0,4186	0,1642
0,2649	0,0678
0,1916	0,1093
0,1745	0,1076
0,0454	0,0175
0,1349	0,0858
2,3375	1,0641
0,6362	0,2399
0,2389	0,1109

A se_A

0,0660	0,0191
0,1211	0,0355
0,0868	0,0179
0,0833	0,0370
0,0576	0,0235
0,0604	0,0155
0,0661	0,0223
0,3655	0,1600
0,1634	0,0603

0,2017	0,0567								
B	se_B								
0,9064	0,0217								
0,8356	0,0455								
0,8752	0,0200								
0,8927	0,0443								
0,9279	0,0286								
0,9244	0,0168								
0,9241	0,0245								
0,2890	0,2596								
0,7914	0,0614								
0,8058	0,0454								
S									
1,0000	0,6995	0,7850	0,6182	0,5387	0,6032	0,4055	0,4240	0,5102	0,3315
0,6995	1,0000	0,7514	0,6444	0,5431	0,6703	0,4856	0,5060	0,5347	0,3655
0,7850	0,7514	1,0000	0,6834	0,5595	0,6373	0,4175	0,5018	0,5682	0,3850
0,6182	0,6444	0,6834	1,0000	0,5439	0,5300	0,3530	0,4044	0,5238	0,3662
0,5387	0,5431	0,5595	0,5439	1,0000	0,4997	0,2914	0,4098	0,4723	0,3078
0,6032	0,6703	0,6373	0,5300	0,4997	1,0000	0,4181	0,4493	0,4897	0,3460
0,4055	0,4856	0,4175	0,3530	0,2914	0,4181	1,0000	0,3211	0,3495	0,2631
0,4240	0,5060	0,5018	0,4044	0,4098	0,4493	0,3211	1,0000	0,3725	0,3025
0,5102	0,5347	0,5682	0,5238	0,4723	0,4897	0,3495	0,3725	1,0000	0,3136
0,3315	0,3655	0,3850	0,3662	0,3078	0,3460	0,2631	0,3025	0,3136	1,0000
se_S									
0,0000	0,0237	0,0176	0,0287	0,0325	0,0283	0,0457	0,0370	0,0337	0,0390
0,0237	0,0000	0,0219	0,0285	0,0317	0,0257	0,0479	0,0387	0,0372	0,0467
0,0176	0,0219	0,0000	0,0278	0,0351	0,0304	0,0564	0,0383	0,0350	0,0467
0,0287	0,0285	0,0278	0,0000	0,0378	0,0322	0,0451	0,0373	0,0377	0,0407
0,0325	0,0317	0,0351	0,0378	0,0000	0,0390	0,0437	0,0389	0,0427	0,0455
0,0283	0,0257	0,0304	0,0322	0,0390	0,0000	0,0460	0,0433	0,0372	0,0481
0,0457	0,0479	0,0564	0,0451	0,0437	0,0460	0,0000	0,0554	0,0490	0,0583
0,0370	0,0387	0,0383	0,0373	0,0389	0,0433	0,0554	0,0000	0,0404	0,0529
0,0337	0,0372	0,0350	0,0377	0,0427	0,0372	0,0490	0,0404	0,0000	0,0486
0,0390	0,0467	0,0467	0,0407	0,0455	0,0481	0,0583	0,0529	0,0486	0,0000
alpha	se_alpha								
0,0006	0,0002								
beta	se_beta								
0,8963	0,0493								

ПОРТФЕЛЬ №3

c se_c
 0,0905 0,0846
 0,0740 0,0934
 0,0905 0,0791
 0,1739 0,0844
 0,2159 0,1122
 0,0613 0,0557
 0,0549 0,0998
 0,0511 0,0785
 0,1678 0,1009
 0,0871 0,0788

Q
 0,0380 0,0315 -0,0019 -0,0279 0,0125 -0,0236 -0,0695 -0,0782 0,0277 -0,0224
 0,0166 0,1362 -0,1029 0,0132 0,0303 -0,0851 -0,0464 -0,0626 0,0228 0,0150
 -0,0215 -0,0234 0,1566 0,0008 -0,0135 -0,0590 -0,0634 -0,0786 -0,0040 0,0043
 -0,0554 0,0489 0,0240 0,0520 0,0441 0,0423 -0,0538 -0,0567 0,0153 -0,0179
 0,0589 0,0290 0,0859 -0,0887 0,0750 -0,0540 -0,1354 -0,0833 -0,0235 0,0159
 0,0221 0,0024 -0,0698 -0,0202 0,0016 0,0256 -0,0269 -0,0104 0,0202 -0,0030
 -0,0033 0,0493 -0,1432 0,1019 -0,0086 -0,0789 0,1410 -0,1714 0,1012 -0,0340
 -0,0655 -0,0559 0,0352 -0,0034 0,0368 0,0059 0,0074 0,0571 0,0283 0,0011
 -0,1029 0,0045 0,1008 -0,0140 0,0302 0,0500 -0,0833 0,0245 0,1549 0,0092
 0,0944 0,0735 -0,0589 -0,1210 -0,0301 -0,0631 -0,0417 0,0002 0,1366 0,0950

se_Q
 0,0797 0,0822 0,0906 0,0642 0,0375 0,0795 0,0358 0,0576 0,0462 0,0351
 0,1038 0,0924 0,0952 0,0658 0,0417 0,0975 0,0316 0,0640 0,0454 0,0301
 0,0774 0,0764 0,0775 0,0572 0,0352 0,0761 0,0306 0,0537 0,0386 0,0287
 0,0858 0,0790 0,0981 0,0680 0,0418 0,0809 0,0386 0,0670 0,0420 0,0325
 0,1067 0,1083 0,1082 0,0817 0,0533 0,1099 0,0440 0,0758 0,0467 0,0455
 0,0599 0,0598 0,0534 0,0429 0,0239 0,0610 0,0286 0,0364 0,0261 0,0252
 0,1484 0,0848 0,0885 0,0757 0,0459 0,0995 0,0565 0,0667 0,0507 0,0593
 0,0609 0,0503 0,0531 0,0351 0,0253 0,0486 0,0208 0,0593 0,0324 0,0247
 0,0915 0,0917 0,0860 0,0730 0,0426 0,1026 0,0363 0,0661 0,0488 0,0480
 0,0671 0,0590 0,0690 0,0482 0,0309 0,0767 0,0323 0,0518 0,0446 0,0535

OMEGA se_OMEGA
 0,2649 0,0901
 0,4256 0,1918
 0,2557 0,0687
 0,2316 0,1355
 0,1776 0,1014
 0,0452 0,0181
 0,1453 0,0898
 2,5647 1,1605
 0,5971 0,2353
 0,2347 0,1075

A se_A
 0,0888 0,0264
 0,1076 0,0410
 0,0896 0,0186
 0,0969 0,0430
 0,0597 0,0230
 0,0577 0,0150
 0,0688 0,0236
 0,3829 0,1613
 0,1570 0,0593

```

0,2030 0,0554
B      se_B
0,8780 0,0293
0,8497 0,0501
0,8741 0,0214
0,8762 0,0516
0,9261 0,0268
0,9273 0,0166
0,9213 0,0253
0,2336 0,2697
0,8001 0,0613
0,8065 0,0432
S
1,0000 0,7235 0,8133 0,6917 0,5683 0,6063 0,4175 0,4510 0,5423 0,3779
0,7235 1,0000 0,7373 0,6222 0,5191 0,6348 0,4513 0,4741 0,4773 0,3388
0,8133 0,7373 1,0000 0,6850 0,5593 0,6297 0,4060 0,4941 0,5647 0,3747
0,6917 0,6222 0,6850 1,0000 0,5445 0,5294 0,3489 0,4029 0,5230 0,3673
0,5683 0,5191 0,5593 0,5445 1,0000 0,4929 0,2836 0,4163 0,4740 0,3007
0,6063 0,6348 0,6297 0,5294 0,4929 1,0000 0,4089 0,4389 0,4823 0,3401
0,4175 0,4513 0,4060 0,3489 0,2836 0,4089 1,0000 0,3170 0,3408 0,2642
0,4510 0,4741 0,4941 0,4029 0,4163 0,4389 0,3170 1,0000 0,3643 0,2957
0,5423 0,4773 0,5647 0,5230 0,4740 0,4823 0,3408 0,3643 1,0000 0,3085
0,3779 0,3388 0,3747 0,3673 0,3007 0,3401 0,2642 0,2957 0,3085 1,0000
se_S
0,0000 0,0270 0,0165 0,0266 0,0339 0,0284 0,0445 0,0387 0,0366 0,0437
0,0270 0,0000 0,0237 0,0287 0,0344 0,0286 0,0396 0,0375 0,0398 0,0444
0,0165 0,0237 0,0000 0,0269 0,0339 0,0305 0,0557 0,0358 0,0348 0,0459
0,0266 0,0287 0,0269 0,0000 0,0366 0,0308 0,0435 0,0356 0,0368 0,0400
0,0339 0,0344 0,0339 0,0366 0,0000 0,0374 0,0418 0,0366 0,0412 0,0438
0,0284 0,0286 0,0305 0,0308 0,0374 0,0000 0,0445 0,0417 0,0373 0,0463
0,0445 0,0396 0,0557 0,0435 0,0418 0,0445 0,0000 0,0524 0,0468 0,0556
0,0387 0,0375 0,0358 0,0356 0,0366 0,0417 0,0524 0,0000 0,0394 0,0489
0,0366 0,0398 0,0348 0,0368 0,0412 0,0373 0,0468 0,0394 0,0000 0,0473
0,0437 0,0444 0,0459 0,0400 0,0438 0,0463 0,0556 0,0489 0,0473 0,0000
alpha  se_alpha
0,0007 0,0003
beta   se_beta
0,8850 0,0378

```

ПОРТФЕЛЬ №4

c	se_c
0,0533	0,0680
0,0571	0,0879
0,0783	0,0765
0,1645	0,0822
0,2107	0,1097
0,0593	0,0524
0,0488	0,0982
0,0451	0,0778
0,1658	0,0984
0,0738	0,0790

Q

0,1597	-0,0084	-0,0698	0,0152	-0,0272	-0,0754	-0,0573	-0,0105	0,0459	-0,0513
0,0319	0,1324	-0,0987	0,0117	0,0236	-0,0846	-0,0349	-0,0683	0,0358	0,0009
0,1046	-0,0314	0,1116	-0,0206	-0,0267	-0,0753	-0,0509	-0,0731	0,0055	-0,0138
0,0613	0,0383	-0,0200	0,0297	0,0370	0,0338	-0,0446	-0,0532	0,0209	-0,0305
0,0051	0,0457	0,1151	-0,0876	0,0773	-0,0535	-0,1222	-0,0810	-0,0187	0,0051
0,1559	-0,0110	-0,1146	-0,0331	-0,0086	0,0038	-0,0173	-0,0066	0,0222	-0,0087
-0,0312	0,0509	-0,1272	0,1063	-0,0121	-0,0766	0,1517	-0,1722	0,1058	-0,0412
-0,0279	-0,0561	0,0197	-0,0174	0,0297	0,0046	0,0103	0,0578	0,0314	-0,0003
0,0764	-0,0177	0,0301	-0,0447	0,0143	0,0260	-0,0767	0,0344	0,1628	-0,0036
0,0307	0,0853	-0,0228	-0,1085	-0,0254	-0,0547	-0,0305	-0,0034	0,1412	0,0932

se_Q

0,0685	0,0500	0,0603	0,0588	0,0328	0,0793	0,0296	0,0498	0,0280	0,0298
0,0921	0,0714	0,0854	0,0776	0,0399	0,1079	0,0274	0,0658	0,0386	0,0296
0,0791	0,0540	0,0664	0,0642	0,0364	0,0867	0,0277	0,0543	0,0322	0,0301
0,0810	0,0651	0,0798	0,0722	0,0421	0,0910	0,0370	0,0655	0,0372	0,0346
0,1106	0,0878	0,1059	0,0866	0,0541	0,1210	0,0418	0,0771	0,0439	0,0472
0,0579	0,0418	0,0498	0,0456	0,0244	0,0676	0,0273	0,0373	0,0227	0,0258
0,1100	0,0757	0,0833	0,0749	0,0454	0,1048	0,0536	0,0662	0,0495	0,0592
0,0578	0,0469	0,0531	0,0345	0,0256	0,0476	0,0197	0,0616	0,0311	0,0237
0,1025	0,0680	0,0849	0,0825	0,0420	0,1164	0,0333	0,0686	0,0470	0,0521
0,0811	0,0506	0,0757	0,0483	0,0301	0,0796	0,0298	0,0492	0,0443	0,0535

OMEGA se_OMEGA

0,1458	0,0476
0,5241	0,1941
0,2948	0,0774
0,2125	0,1102
0,1876	0,1161
0,0464	0,0183
0,1423	0,0905
2,4639	1,1566
0,6438	0,2472
0,2360	0,1101

A se_A

0,0705	0,0218
0,1283	0,0446
0,0950	0,0209
0,0891	0,0361
0,0602	0,0260
0,0613	0,0161
0,0686	0,0234
0,3792	0,1687
0,1645	0,0610

ПОРТФЕЛЬ №5

c se_c
 0,0404 0,1597
 0,0733 0,1623
 0,0445 0,1542
 0,0439 0,1773
 0,1786 0,1734
 0,0309 0,0829
 0,0351 0,1652
 0,0147 0,1450
 0,1324 0,1461
 0,0430 0,1178

Q
 0,0417 -0,0122 0,0338 -0,0021 0,0338 -0,0775 -0,0680 -0,0556 0,0008 0,0112
 -0,0215 0,1831 -0,0398 -0,0956 0,0464 -0,1522 -0,0336 -0,0012 -0,0487 0,0532
 -0,0124 -0,0320 0,1959 -0,0477 0,0152 -0,0997 -0,0635 -0,0609 -0,0186 0,0388
 -0,0289 0,0236 0,0634 0,0799 0,0286 -0,1209 -0,0481 -0,0240 -0,0304 0,0120
 0,0592 -0,0856 0,1172 0,0127 0,0871 -0,0697 -0,1299 -0,0547 -0,0533 0,0453
 -0,0102 0,0816 -0,0687 -0,0250 0,0146 -0,0370 -0,0336 -0,0153 0,0050 0,0177
 -0,0352 0,1921 -0,1341 0,0500 0,0021 -0,1890 0,1060 -0,1757 0,0799 0,0031
 -0,0950 0,0151 0,0282 0,0183 0,0398 -0,0398 0,0069 0,0489 0,0106 0,0082
 -0,1054 -0,0227 0,1169 0,0249 0,0399 0,0025 -0,0850 0,0373 0,1322 0,0347
 0,0415 0,1208 -0,0545 -0,0755 -0,0170 -0,1108 -0,0375 -0,0085 0,1249 0,1130

se_Q
 0,0971 0,0930 0,0795 0,0678 0,0409 0,0918 0,0336 0,0502 0,0588 0,0340
 0,1162 0,0874 0,0805 0,0736 0,0477 0,1001 0,0388 0,0571 0,0601 0,0330
 0,0946 0,0731 0,0708 0,0602 0,0386 0,0877 0,0295 0,0454 0,0435 0,0303
 0,1120 0,1173 0,0978 0,0900 0,0563 0,1026 0,0323 0,0718 0,0482 0,0541
 0,1204 0,1025 0,1015 0,1317 0,0546 0,1132 0,0423 0,0678 0,0475 0,0440
 0,0921 0,0463 0,0521 0,0395 0,0316 0,0676 0,0302 0,0367 0,0342 0,0310
 0,1423 0,0889 0,0849 0,0679 0,0583 0,1051 0,0591 0,0654 0,0510 0,0532
 0,0687 0,0438 0,0571 0,0319 0,0264 0,0552 0,0219 0,0550 0,0340 0,0234
 0,1124 0,0956 0,0843 0,0735 0,0473 0,1387 0,0340 0,0625 0,0508 0,0488
 0,0755 0,0612 0,0675 0,0484 0,0389 0,0835 0,0332 0,0482 0,0482 0,0541

OMEGA se_OMEGA
 0,2275 0,0777
 0,2796 0,1466
 0,2037 0,0517
 0,2500 0,1011
 0,1472 0,0813
 0,0427 0,0162
 0,1376 0,0869
 2,5182 1,1938
 0,6442 0,2621
 0,2524 0,1187

A se_A
 0,0739 0,0224
 0,0837 0,0313
 0,0714 0,0133
 0,0740 0,0200
 0,0514 0,0186
 0,0527 0,0130
 0,0658 0,0239
 0,3751 0,1600
 0,1600 0,0658

0,1967 0,0564
 B se_B
 0,8959 0,0258
 0,8839 0,0456
 0,8982 0,0149
 0,9052 0,0256
 0,9358 0,0221
 0,9323 0,0145
 0,9234 0,0260
 0,2471 0,2764
 0,7925 0,0689
 0,8081 0,0464
 S
 1,0000 0,7533 0,8137 0,6358 0,5675 0,6141 0,4200 0,4539 0,5436 0,3889
 0,7533 1,0000 0,7477 0,6358 0,5466 0,6704 0,4834 0,5100 0,5354 0,3608
 0,8137 0,7477 1,0000 0,6317 0,5581 0,6381 0,4154 0,5021 0,5709 0,3808
 0,6358 0,6358 0,6317 1,0000 0,5371 0,5675 0,3913 0,3765 0,5148 0,3404
 0,5675 0,5466 0,5581 0,5371 1,0000 0,5031 0,2899 0,4109 0,4727 0,3083
 0,6141 0,6704 0,6381 0,5675 0,5031 1,0000 0,4090 0,4427 0,4886 0,3391
 0,4200 0,4834 0,4154 0,3913 0,2899 0,4090 1,0000 0,3188 0,3462 0,2624
 0,4539 0,5100 0,5021 0,3765 0,4109 0,4427 0,3188 1,0000 0,3661 0,3026
 0,5436 0,5354 0,5709 0,5148 0,4727 0,4886 0,3462 0,3661 1,0000 0,3109
 0,3889 0,3608 0,3808 0,3404 0,3083 0,3391 0,2624 0,3026 0,3109 1,0000
 se_S
 0,0000 0,0216 0,0168 0,0269 0,0346 0,0285 0,0450 0,0398 0,0359 0,0453
 0,0216 0,0000 0,0219 0,0280 0,0308 0,0258 0,0467 0,0376 0,0370 0,0449
 0,0168 0,0219 0,0000 0,0289 0,0347 0,0305 0,0545 0,0365 0,0343 0,0466
 0,0269 0,0280 0,0289 0,0000 0,0337 0,0315 0,0416 0,0433 0,0426 0,0457
 0,0346 0,0308 0,0347 0,0337 0,0000 0,0384 0,0422 0,0369 0,0406 0,0446
 0,0285 0,0258 0,0305 0,0315 0,0384 0,0000 0,0447 0,0419 0,0371 0,0475
 0,0450 0,0467 0,0545 0,0416 0,0422 0,0447 0,0000 0,0521 0,0470 0,0551
 0,0398 0,0376 0,0365 0,0433 0,0369 0,0419 0,0521 0,0000 0,0382 0,0497
 0,0359 0,0370 0,0343 0,0426 0,0406 0,0371 0,0470 0,0382 0,0000 0,0460
 0,0453 0,0449 0,0466 0,0457 0,0446 0,0475 0,0551 0,0497 0,0460 0,0000
 alpha se_alpha
 0,0005 0,0002
 beta se_beta
 0,8827 0,0467

ПОРТФЕЛЬ №6

c	se_c
0,0180	0,0796
0,0536	0,0996
0,0264	0,0964
0,0279	0,1455
0,1676	0,1179
0,0251	0,0614
0,0225	0,1328
0,0023	0,0782
0,1189	0,1082
-0,0037	0,1577

Q

0,1626	-0,0321	-0,0303	-0,0313	-0,0006	-0,1168	-0,0684	0,0165	0,0573	-0,0243
0,0913	0,1776	-0,0816	-0,1442	0,0417	-0,1786	-0,0381	0,0151	0,0009	0,0305
0,1002	-0,0393	0,1546	-0,0909	0,0084	-0,1207	-0,0636	-0,0415	0,0223	0,0160
0,0390	0,0218	0,0422	0,0335	0,0262	-0,1382	-0,0512	-0,0054	0,0123	-0,0096
0,0197	-0,0645	0,1479	-0,0250	0,0947	-0,0806	-0,1325	-0,0373	-0,0204	0,0285
0,1301	0,0685	-0,1199	-0,0520	0,0062	-0,0637	-0,0358	-0,0013	0,0243	0,0062
-0,0428	0,1940	-0,1215	0,0174	0,0035	-0,1933	0,1029	-0,1614	0,1069	-0,0113
-0,0431	0,0144	0,0042	-0,0047	0,0311	-0,0501	0,0044	0,0510	0,0283	0,0054
0,0754	-0,0459	0,0384	-0,0218	0,0285	-0,0298	-0,0905	0,0591	0,1681	0,0158
0,1088	0,1739	-0,0463	-0,1920	-0,0295	-0,1590	-0,0699	0,0459	0,2141	0,0429

se_Q

0,0836	0,0684	0,0645	0,0380	0,0324	0,0771	0,0307	0,0485	0,0386	0,0261
0,0991	0,0886	0,0890	0,0514	0,0409	0,0972	0,0357	0,0633	0,0663	0,0307
0,0886	0,0731	0,0759	0,0426	0,0365	0,0849	0,0280	0,0508	0,0455	0,0290
0,1142	0,0981	0,0999	0,0582	0,0490	0,1076	0,0302	0,0736	0,0692	0,0451
0,1346	0,0894	0,1106	0,0682	0,0549	0,1165	0,0404	0,0728	0,0628	0,0425
0,0608	0,0464	0,0542	0,0317	0,0271	0,0665	0,0300	0,0392	0,0308	0,0263
0,1152	0,0852	0,0941	0,0515	0,0477	0,1035	0,0565	0,0674	0,0555	0,0640
0,0557	0,0452	0,0867	0,0358	0,0246	0,0507	0,0206	0,0575	0,0316	0,0241
0,1043	0,0880	0,1000	0,0591	0,0425	0,1032	0,0311	0,0651	0,0592	0,0472
0,0725	0,0586	0,0904	0,0571	0,0346	0,0727	0,0215	0,0486	0,0562	0,0554

OMEGA se_OMEGA

0,1222	0,0350
0,3899	0,1794
0,2290	0,0564
0,2741	0,1129
0,1606	0,0976
0,0455	0,0172
0,1356	0,0872
2,3061	0,9585
0,6797	0,2543
0,8651	0,4772

A se_A

0,0601	0,0165
0,1129	0,0381
0,0735	0,0145
0,0814	0,0225
0,0531	0,0212
0,0564	0,0143
0,0657	0,0230
0,3593	0,1437
0,1654	0,0636

ПОРТФЕЛЬ №7

c se_c
 0,0674 0,1344
 0,0593 0,1717
 0,0694 0,1354
 0,0752 0,1681
 0,1993 0,1413
 0,0505 0,0944
 0,0620 0,1596
 0,0373 0,0967
 0,1520 0,1468
 0,0691 0,1062

Q
 0,0703 0,0334 -0,0159 -0,0233 0,0096 -0,0603 -0,0662 -0,0584 0,0156 -0,0135
 0,0792 0,1540 -0,1009 -0,0952 0,0402 -0,0971 -0,0433 -0,0426 0,0276 0,0253
 0,0193 -0,0121 0,1571 -0,0645 -0,0079 -0,0788 -0,0604 -0,0597 -0,0055 0,0171
 0,0202 -0,0122 0,0358 0,0691 0,0026 -0,0790 -0,0412 -0,0102 -0,0125 -0,0140
 0,0674 0,0232 0,0639 -0,0170 0,0603 -0,0937 -0,1316 -0,0593 -0,0449 0,0259
 0,0382 0,0053 -0,0745 -0,0266 0,0010 0,0105 -0,0248 -0,0015 0,0164 0,0017
 0,0329 0,0593 -0,1398 0,0545 -0,0184 -0,1149 0,1377 -0,1625 0,0976 -0,0169
 -0,0599 -0,0600 0,0372 0,0148 0,0326 -0,0048 0,0080 0,0625 0,0184 0,0041
 -0,0809 0,0018 0,0791 0,0126 0,0222 0,0143 -0,0827 0,0399 0,1428 0,0190
 0,0795 0,0754 -0,0736 -0,0882 -0,0304 -0,0590 -0,0334 0,0057 0,1320 0,1046

se_Q
 0,2204 0,0881 0,1386 0,0651 0,0409 0,0881 0,0317 0,0570 0,0445 0,0499
 0,2370 0,1071 0,1534 0,0595 0,0477 0,1048 0,0307 0,0605 0,0458 0,0445
 0,2196 0,1128 0,1129 0,0546 0,0450 0,0897 0,0272 0,0519 0,0354 0,0464
 0,2733 0,1548 0,1485 0,0643 0,0475 0,1138 0,0299 0,0799 0,0442 0,0437
 0,2163 0,1032 0,1344 0,0940 0,0545 0,1174 0,0415 0,0771 0,0442 0,0602
 0,1099 0,0464 0,0875 0,0431 0,0255 0,0903 0,0297 0,0465 0,0231 0,0326
 0,1906 0,0926 0,1398 0,0506 0,0760 0,1119 0,0573 0,0669 0,0501 0,0768
 0,0917 0,0542 0,0633 0,0298 0,0249 0,0478 0,0202 0,0568 0,0345 0,0260
 0,1808 0,1484 0,1121 0,0563 0,0459 0,1489 0,0332 0,0662 0,0481 0,0503
 0,1186 0,0590 0,0879 0,0472 0,0420 0,0799 0,0353 0,0635 0,0462 0,0585

OMEGA se_OMEGA
 0,2432 0,0876
 0,3864 0,2190
 0,2183 0,0605
 0,2707 0,1100
 0,1565 0,0881
 0,0439 0,0171
 0,1413 0,0910
 2,5821 1,4218
 0,6397 0,2588
 0,2483 0,1157

A se_A
 0,0796 0,0250
 0,1010 0,0465
 0,0766 0,0154
 0,0780 0,0217
 0,0542 0,0201
 0,0538 0,0137
 0,0668 0,0245
 0,3724 0,1685
 0,1603 0,0654

```

0,1992 0,0555
B      se_B
0,8887 0,0288
0,8592 0,0598
0,8910 0,0184
0,8993 0,0276
0,9329 0,0234
0,9311 0,0151
0,9230 0,0264
0,2354 0,3264
0,7925 0,0683
0,8079 0,0446
S
1,0000 0,7270 0,8135 0,6345 0,5690 0,6110 0,4152 0,4539 0,5436 0,3839
0,7270 1,0000 0,7369 0,6226 0,5214 0,6370 0,4523 0,4807 0,4832 0,3419
0,8135 0,7369 1,0000 0,6287 0,5590 0,6330 0,4080 0,5005 0,5698 0,3754
0,6345 0,6226 0,6287 1,0000 0,5364 0,5651 0,3903 0,3735 0,5129 0,3429
0,5690 0,5214 0,5590 0,5364 1,0000 0,4989 0,2855 0,4138 0,4749 0,3034
0,6110 0,6370 0,6330 0,5651 0,4989 1,0000 0,4102 0,4408 0,4858 0,3422
0,4152 0,4523 0,4080 0,3903 0,2855 0,4102 1,0000 0,3182 0,3423 0,2668
0,4539 0,4807 0,5005 0,3735 0,4138 0,4408 0,3182 1,0000 0,3660 0,2974
0,5436 0,4832 0,5698 0,5129 0,4749 0,4858 0,3423 0,3660 1,0000 0,3083
0,3839 0,3419 0,3754 0,3429 0,3034 0,3422 0,2668 0,2974 0,3083 1,0000
se_S
0,0000 0,0274 0,0172 0,0281 0,0367 0,0292 0,0453 0,0397 0,0364 0,0460
0,0274 0,0000 0,0244 0,0278 0,0368 0,0288 0,0398 0,0375 0,0397 0,0463
0,0172 0,0244 0,0000 0,0296 0,0362 0,0313 0,0551 0,0365 0,0348 0,0473
0,0281 0,0278 0,0296 0,0000 0,0350 0,0322 0,0423 0,0436 0,0436 0,0455
0,0367 0,0368 0,0362 0,0350 0,0000 0,0395 0,0442 0,0378 0,0419 0,0456
0,0292 0,0288 0,0313 0,0322 0,0395 0,0000 0,0451 0,0417 0,0380 0,0492
0,0453 0,0398 0,0551 0,0423 0,0442 0,0451 0,0000 0,0520 0,0470 0,0552
0,0397 0,0375 0,0365 0,0436 0,0378 0,0417 0,0520 0,0000 0,0389 0,0518
0,0364 0,0397 0,0348 0,0436 0,0419 0,0380 0,0470 0,0389 0,0000 0,0466
0,0460 0,0463 0,0473 0,0455 0,0456 0,0492 0,0552 0,0518 0,0466 0,0000
alpha se_alpha
0,0006 0,0002
beta se_beta
0,8874 0,0419

```

ПОРТФЕЛЬ №8

c se_c
 0,0344 0,1041
 0,0752 0,1220
 0,1863 0,0911
 0,1253 0,0981
 0,1667 0,1247
 0,0359 0,0600
 0,0203 0,1762
 0,0147 0,1158
 0,1076 0,1209
 0,0434 0,0845

Q
 0,0460 -0,0116 -0,0229 -0,0364 0,0474 -0,0197 -0,0672 -0,0557 0,0273 0,0011
 -0,0735 0,1577 -0,0730 -0,0064 0,0462 -0,1134 -0,0345 -0,0141 -0,0457 0,0419
 -0,0117 0,0209 0,1009 -0,0244 0,0213 -0,0636 -0,0586 -0,0709 -0,0216 0,0576
 -0,0471 0,0165 0,0188 0,0427 0,0682 0,0348 -0,0539 -0,0333 0,0072 0,0004
 0,1146 -0,0845 0,0498 -0,0807 0,1054 -0,0037 -0,1323 -0,0565 -0,0204 0,0395
 -0,0347 0,0797 -0,0312 -0,0548 0,0215 -0,0187 -0,0342 -0,0245 0,0097 0,0114
 -0,1073 0,1624 -0,0143 0,0453 0,0160 -0,1545 0,1136 -0,1935 0,0777 -0,0154
 -0,0732 0,0184 -0,0064 -0,0158 0,0459 -0,0179 0,0066 0,0531 0,0253 0,0051
 -0,0850 -0,0279 0,1043 -0,0150 0,0491 0,0513 -0,0870 0,0418 0,1446 0,0206
 0,0429 0,1203 0,0145 -0,1354 -0,0136 -0,1212 -0,0482 -0,0177 0,1286 0,1038

se_Q
 0,0641 0,0573 0,0604 0,0743 0,0396 0,1035 0,0428 0,0505 0,0408 0,0999
 0,0754 0,0680 0,0664 0,0726 0,0433 0,1151 0,0467 0,0611 0,0457 0,0847
 0,0818 0,0675 0,0597 0,0697 0,0413 0,1020 0,0336 0,0512 0,0348 0,0704
 0,0715 0,0781 0,0564 0,0774 0,0429 0,0968 0,0450 0,0583 0,0427 0,0865
 0,0948 0,0860 0,0802 0,0899 0,0553 0,1919 0,0509 0,0689 0,0450 0,0931
 0,0475 0,0439 0,0400 0,0479 0,0250 0,0748 0,0349 0,0337 0,0241 0,0574
 0,1012 0,0821 0,0877 0,0836 0,0479 0,1095 0,0595 0,0662 0,0465 0,0889
 0,0506 0,0455 0,0418 0,0405 0,0250 0,0551 0,0238 0,0606 0,0317 0,0381
 0,0765 0,0786 0,0651 0,1095 0,0458 0,1108 0,0413 0,0608 0,0469 0,0923
 0,0653 0,0528 0,0634 0,0553 0,0334 0,0838 0,0349 0,0475 0,0419 0,0737

OMEGA se_OMEGA

0,1797 0,0597
 0,2147 0,0841
 0,1175 0,0481
 0,1699 0,1040
 0,1420 0,0842
 0,0379 0,0147
 0,1415 0,0855
 2,4947 1,0951
 0,5966 0,2345
 0,2349 0,1083

A se_A
 0,0772 0,0237
 0,0749 0,0202
 0,0596 0,0173
 0,0859 0,0405
 0,0523 0,0199
 0,0529 0,0124
 0,0665 0,0226
 0,3994 0,1659
 0,1603 0,0620


```

0,2025 0,0568
B      se_B
0,9000 0,0234
0,9007 0,0263
0,9230 0,0202
0,8943 0,0463
0,9356 0,0230
0,9338 0,0135
0,9229 0,0244
0,2386 0,2592
0,7982 0,0629
0,8056 0,0450
S
1,0000 0,7461 0,6360 0,6882 0,5658 0,6052 0,4245 0,4541 0,5436 0,3882
0,7461 1,0000 0,6453 0,6357 0,5420 0,6715 0,4859 0,5081 0,5296 0,3646
0,6360 0,6453 1,0000 0,5549 0,5090 0,5631 0,3923 0,4127 0,4977 0,2807
0,6882 0,6357 0,5549 1,0000 0,5459 0,5267 0,3496 0,4042 0,5232 0,3698
0,5658 0,5420 0,5090 0,5459 1,0000 0,4973 0,2875 0,4163 0,4772 0,3099
0,6052 0,6715 0,5631 0,5267 0,4973 1,0000 0,4131 0,4407 0,4836 0,3405
0,4245 0,4859 0,3923 0,3496 0,2875 0,4131 1,0000 0,3196 0,3474 0,2666
0,4541 0,5081 0,4127 0,4042 0,4163 0,4407 0,3196 1,0000 0,3684 0,3018
0,5436 0,5296 0,4977 0,5232 0,4772 0,4836 0,3474 0,3684 1,0000 0,3164
0,3882 0,3646 0,2807 0,3698 0,3099 0,3405 0,2666 0,3018 0,3164 1,0000
se_S
0,0000 0,0222 0,0267 0,0268 0,0345 0,0282 0,0450 0,0407 0,0377 0,0457
0,0222 0,0000 0,0249 0,0276 0,0313 0,0251 0,0464 0,0384 0,0386 0,0470
0,0267 0,0249 0,0000 0,0327 0,0349 0,0305 0,0390 0,0375 0,0375 0,0429
0,0268 0,0276 0,0327 0,0000 0,0375 0,0318 0,0442 0,0374 0,0376 0,0407
0,0345 0,0313 0,0349 0,0375 0,0000 0,0385 0,0430 0,0375 0,0424 0,0448
0,0282 0,0251 0,0305 0,0318 0,0385 0,0000 0,0441 0,0424 0,0374 0,0476
0,0450 0,0464 0,0390 0,0442 0,0430 0,0441 0,0000 0,0535 0,0477 0,0564
0,0407 0,0384 0,0375 0,0374 0,0375 0,0424 0,0535 0,0000 0,0400 0,0515
0,0377 0,0386 0,0375 0,0376 0,0424 0,0374 0,0477 0,0400 0,0000 0,0479
0,0457 0,0470 0,0429 0,0407 0,0448 0,0476 0,0564 0,0515 0,0479 0,0000
alpha  se_alpha
0,0006 0,0002
beta   se_beta
0,8965 0,0356

```

ПОРТФЕЛЬ №9

c	se_c
0,0397	0,0809
0,0410	0,1020
0,0553	0,0922
0,0620	0,1188
0,1958	0,1219
0,0463	0,0564
0,0548	0,1120
0,0290	0,0887
0,1452	0,1075
0,0590	0,0940

Q

0,1365	0,0037	-0,0525	-0,0156	-0,0250	-0,0887	-0,0562	0,0015	0,0495	-0,0379
0,0077	0,1642	-0,0608	-0,0897	0,0374	-0,0872	-0,0322	-0,0520	0,0502	0,0106
0,0746	-0,0148	0,1345	-0,0684	-0,0202	-0,0817	-0,0484	-0,0588	0,0123	-0,0003
0,0156	-0,0132	0,0412	0,0703	-0,0033	-0,0742	-0,0313	-0,0114	0,0037	-0,0254
-0,0346	0,0428	0,1114	-0,0129	0,0614	-0,0821	-0,1211	-0,0601	-0,0335	0,0172
0,1339	-0,0060	-0,1092	-0,0273	-0,0095	-0,0044	-0,0156	0,0001	0,0221	-0,0042
-0,0430	0,0658	-0,1019	0,0598	-0,0219	-0,1068	0,1500	-0,1668	0,1074	-0,0224
-0,0460	-0,0621	0,0287	0,0110	0,0265	-0,0043	0,0125	0,0607	0,0235	0,0016
0,0378	-0,0181	0,0231	0,0050	0,0069	0,0002	-0,0764	0,0461	0,1550	0,0066
0,0112	0,0854	-0,0362	-0,0831	-0,0257	-0,0473	-0,0240	0,0012	0,1396	0,1012

se_Q

0,0719	0,0470	0,0625	0,0330	0,0317	0,0881	0,0289	0,0718	0,0316	0,0324
0,0985	0,0755	0,0891	0,0393	0,0390	0,1171	0,0261	0,0814	0,0463	0,0383
0,0819	0,0559	0,0707	0,0361	0,0362	0,0958	0,0258	0,0714	0,0399	0,0357
0,1065	0,0823	0,0957	0,0529	0,0473	0,1053	0,0285	0,1005	0,0481	0,0518
0,1135	0,0847	0,1117	0,0611	0,0540	0,1219	0,0403	0,0878	0,0431	0,0439
0,0657	0,0410	0,0526	0,0262	0,0233	0,0890	0,0265	0,0502	0,0244	0,0274
0,1184	0,0766	0,0875	0,0490	0,0470	0,1080	0,0536	0,0771	0,0514	0,0647
0,0588	0,0479	0,0573	0,0268	0,0243	0,0518	0,0195	0,0639	0,0322	0,0226
0,1073	0,0756	0,0912	0,0554	0,0410	0,1475	0,0317	0,0808	0,0493	0,0513
0,1557	0,0546	0,0935	0,0451	0,0357	0,0826	0,0338	0,0469	0,0480	0,0542

OMEGA se_OMEGA

0,1266	0,0398
0,4678	0,2087
0,2392	0,0621
0,2877	0,1137
0,1614	0,0959
0,0443	0,0172
0,1355	0,0900
2,4837	1,3135
0,6689	0,2665
0,2469	0,1162

A se_A

0,0638	0,0191
0,1169	0,0432
0,0799	0,0161
0,0836	0,0222
0,0551	0,0221
0,0571	0,0147
0,0669	0,0244
0,3691	0,1749
0,1646	0,0668

```

0,2006 0,0569
B      se_B
0,9092 0,0222
0,8366 0,0522
0,8844 0,0186
0,8927 0,0286
0,9316 0,0262
0,9278 0,0161
0,9236 0,0265
0,2570 0,3121
0,7858 0,0698
0,8073 0,0457
S
1,0000 0,6870 0,7863 0,5780 0,5393 0,6002 0,3958 0,4234 0,5090 0,3252
0,6870 1,0000 0,7408 0,6231 0,5222 0,6414 0,4522 0,4741 0,4843 0,3407
0,7863 0,7408 1,0000 0,6273 0,5591 0,6331 0,4089 0,5005 0,5686 0,3742
0,5780 0,6231 0,6273 1,0000 0,5345 0,5647 0,3903 0,3715 0,5119 0,3421
0,5393 0,5222 0,5591 0,5345 1,0000 0,5006 0,2850 0,4097 0,4734 0,3013
0,6002 0,6414 0,6331 0,5647 0,5006 1,0000 0,4166 0,4434 0,4851 0,3472
0,3958 0,4522 0,4089 0,3903 0,2850 0,4166 1,0000 0,3147 0,3394 0,2658
0,4234 0,4741 0,5005 0,3715 0,4097 0,4434 0,3147 1,0000 0,3676 0,2915
0,5090 0,4843 0,5686 0,5119 0,4734 0,4851 0,3394 0,3676 1,0000 0,3043
0,3252 0,3407 0,3742 0,3421 0,3013 0,3472 0,2658 0,2915 0,3043 1,0000
se_S
0,0000 0,0244 0,0172 0,0312 0,0318 0,0283 0,0446 0,0348 0,0326 0,0381
0,0244 0,0000 0,0236 0,0271 0,0356 0,0288 0,0395 0,0371 0,0388 0,0452
0,0172 0,0236 0,0000 0,0288 0,0347 0,0306 0,0547 0,0359 0,0343 0,0460
0,0312 0,0271 0,0288 0,0000 0,0337 0,0311 0,0417 0,0433 0,0429 0,0453
0,0318 0,0356 0,0347 0,0337 0,0000 0,0377 0,0432 0,0373 0,0405 0,0456
0,0283 0,0288 0,0306 0,0311 0,0377 0,0000 0,0449 0,0420 0,0372 0,0482
0,0446 0,0395 0,0547 0,0417 0,0432 0,0449 0,0000 0,0519 0,0464 0,0549
0,0348 0,0371 0,0359 0,0433 0,0373 0,0420 0,0519 0,0000 0,0385 0,0514
0,0326 0,0388 0,0343 0,0429 0,0405 0,0372 0,0464 0,0385 0,0000 0,0470
0,0381 0,0452 0,0460 0,0453 0,0456 0,0482 0,0549 0,0514 0,0470 0,0000
alpha se_alpha
0,0006 0,0002
beta se_beta
0,8787 0,0500

```

ПОРТФЕЛЬ №10

c se_c
 0,0207 0,0836
 0,0708 0,1072
 0,1808 0,0848
 0,1212 0,0901
 0,1583 0,1144
 0,0399 0,0572
 0,0173 0,1405
 0,0104 0,0933
 0,1100 0,1071
 0,0301 0,0827

Q
 0,1305 -0,0558 -0,0365 0,0055 0,0145 -0,0897 -0,0589 -0,0018 0,0413 -0,0186
 0,0327 0,1280 -0,0879 -0,0280 0,0501 -0,1511 -0,0297 -0,0146 -0,0430 0,0410
 -0,0180 0,0164 0,1031 -0,0270 0,0306 -0,0716 -0,0514 -0,0699 -0,0186 0,0573
 0,0487 -0,0108 0,0071 0,0229 0,0727 0,0148 -0,0477 -0,0323 0,0059 0,0001
 0,0697 -0,0749 0,0588 -0,0668 0,1221 -0,0154 -0,1179 -0,0521 -0,0190 0,0440
 0,0841 0,0513 -0,0459 -0,0760 0,0189 -0,0461 -0,0303 -0,0248 0,0058 0,0102
 -0,1253 0,1473 -0,0103 0,0427 0,0216 -0,1520 0,1161 -0,1920 0,0786 -0,0180
 -0,0420 0,0149 -0,0101 -0,0323 0,0447 -0,0261 0,0074 0,0504 0,0262 0,0068
 0,0596 -0,0676 0,0833 -0,0449 0,0452 0,0168 -0,0830 0,0450 0,1450 0,0199
 0,0077 0,1263 0,0202 -0,1266 -0,0030 -0,1196 -0,0437 -0,0167 0,1305 0,1064

se_Q
 0,0688 0,0515 0,0594 0,0594 0,0344 0,0725 0,0316 0,0427 0,0266 0,0306
 0,0883 0,0693 0,0844 0,0753 0,0448 0,0897 0,0403 0,0578 0,0445 0,0337
 0,0772 0,0582 0,0737 0,0654 0,0402 0,0798 0,0285 0,0517 0,0337 0,0351
 0,0809 0,0665 0,0774 0,0750 0,0449 0,0885 0,0399 0,0568 0,0394 0,0373
 0,1053 0,0779 0,0874 0,0820 0,0570 0,1102 0,0462 0,0686 0,0446 0,0435
 0,0529 0,0415 0,0482 0,0476 0,0267 0,0607 0,0311 0,0349 0,0221 0,0271
 0,1076 0,0794 0,0764 0,0785 0,0475 0,0994 0,0574 0,0668 0,0453 0,0634
 0,0494 0,0417 0,0555 0,0331 0,0264 0,0476 0,0212 0,0620 0,0310 0,0245
 0,0964 0,0719 0,0798 0,0830 0,0448 0,1101 0,0342 0,0618 0,0472 0,0486
 0,0684 0,0530 0,0659 0,0519 0,0331 0,0789 0,0308 0,0501 0,0419 0,0536

OMEGA se_OMEGA
 0,0931 0,0273
 0,2622 0,1149
 0,1220 0,0532
 0,1504 0,0835
 0,1469 0,0902
 0,0396 0,0152
 0,1380 0,0879
 2,3343 1,1713
 0,6373 0,2438
 0,2345 0,1095

A se_A
 0,0643 0,0161
 0,0928 0,0293
 0,0647 0,0189
 0,0782 0,0342
 0,0510 0,0205
 0,0549 0,0136
 0,0659 0,0228
 0,3867 0,1802
 0,1650 0,0618

```

0,2036 0,0577
B      se_B
0,9158 0,0162
0,8787 0,0376
0,9178 0,0224
0,9031 0,0387
0,9361 0,0244
0,9314 0,0149
0,9237 0,0251
0,2750 0,2898
0,7899 0,0629
0,8047 0,0459
S
1,0000 0,6939 0,6327 0,6116 0,5369 0,5995 0,4042 0,4213 0,5093 0,3286
0,6939 1,0000 0,6424 0,6364 0,5405 0,6719 0,4862 0,5053 0,5342 0,3643
0,6327 0,6424 1,0000 0,5523 0,5097 0,5651 0,3926 0,4104 0,4989 0,2802
0,6116 0,6364 0,5523 1,0000 0,5411 0,5249 0,3508 0,4042 0,5230 0,3654
0,5369 0,5405 0,5097 0,5411 1,0000 0,4976 0,2891 0,4083 0,4756 0,3082
0,5995 0,6719 0,5651 0,5249 0,4976 1,0000 0,4182 0,4431 0,4882 0,3414
0,4042 0,4862 0,3926 0,3508 0,2891 0,4182 1,0000 0,3154 0,3492 0,2624
0,4213 0,5053 0,4104 0,4042 0,4083 0,4431 0,3154 1,0000 0,3695 0,2986
0,5093 0,5342 0,4989 0,5230 0,4756 0,4882 0,3492 0,3695 1,0000 0,3125
0,3286 0,3643 0,2802 0,3654 0,3082 0,3414 0,2624 0,2986 0,3125 1,0000
se_S
0,0000 0,0225 0,0262 0,0278 0,0312 0,0277 0,0434 0,0346 0,0330 0,0372
0,0225 0,0000 0,0244 0,0268 0,0301 0,0242 0,0457 0,0364 0,0362 0,0450
0,0262 0,0244 0,0000 0,0316 0,0340 0,0295 0,0382 0,0364 0,0364 0,0415
0,0278 0,0268 0,0316 0,0000 0,0356 0,0309 0,0434 0,0356 0,0363 0,0391
0,0312 0,0301 0,0340 0,0356 0,0000 0,0371 0,0418 0,0357 0,0407 0,0435
0,0277 0,0242 0,0295 0,0309 0,0371 0,0000 0,0434 0,0406 0,0359 0,0459
0,0434 0,0457 0,0382 0,0434 0,0418 0,0434 0,0000 0,0529 0,0473 0,0555
0,0346 0,0364 0,0364 0,0356 0,0357 0,0406 0,0529 0,0000 0,0378 0,0510
0,0330 0,0362 0,0364 0,0363 0,0407 0,0359 0,0473 0,0378 0,0000 0,0461
0,0372 0,0450 0,0415 0,0391 0,0435 0,0459 0,0555 0,0510 0,0461 0,0000
alpha  se_alpha
0,0006 0,0002
beta   se_beta
0,8802 0,0405

```

ПОРТФЕЛЬ №11

c se_c
 0,0594 0,0820
 0,0627 0,0879
 0,2035 0,0767
 0,1458 0,0812
 0,1898 0,1093
 0,0499 0,0523
 0,0382 0,0976
 0,0333 0,0733
 0,1245 0,0972
 0,0689 0,0791

Q
 0,0358 0,0222 -0,0255 -0,0439 0,0286 -0,0224 -0,0605 -0,0642 0,0363 -0,0179
 -0,0044 0,1249 -0,0983 -0,0183 0,0521 -0,0840 -0,0380 -0,0544 0,0263 0,0298
 -0,0235 0,0545 0,0920 -0,0321 0,0053 -0,0606 -0,0557 -0,0752 -0,0131 0,0437
 -0,0542 0,0368 0,0211 0,0356 0,0544 0,0383 -0,0470 -0,0443 0,0167 -0,0122
 0,0850 0,0221 0,0304 -0,0987 0,0852 -0,0436 -0,1286 -0,0722 -0,0166 0,0247
 -0,0025 -0,0078 -0,0154 -0,0422 0,0089 0,0203 -0,0224 -0,0136 0,0184 -0,0011
 -0,0696 0,0230 0,0066 0,0704 0,0005 -0,0908 0,1491 -0,1864 0,0898 -0,0324
 -0,0511 -0,0544 0,0015 -0,0019 0,0414 0,0104 0,0104 0,0626 0,0310 0,0019
 -0,0881 -0,0123 0,1050 -0,0190 0,0357 0,0475 -0,0802 0,0393 0,1524 0,0075
 0,0637 0,0586 0,0299 -0,1298 -0,0278 -0,0789 -0,0402 -0,0073 0,1329 0,0960

se_Q
 0,0838 0,0864 0,0607 0,0723 0,0367 0,1096 0,0342 0,0570 0,0528 0,0404
 0,1080 0,0985 0,0749 0,0771 0,0435 0,1181 0,0303 0,0639 0,0610 0,0428
 0,0790 0,0698 0,0619 0,0694 0,0342 0,0922 0,0269 0,0547 0,0384 0,0358
 0,0898 0,0839 0,0572 0,0731 0,0414 0,1019 0,0368 0,0663 0,0516 0,0390
 0,1107 0,1114 0,0776 0,0885 0,0534 0,1341 0,0435 0,0781 0,0481 0,0514
 0,0529 0,0481 0,0448 0,0486 0,0240 0,0713 0,0274 0,0364 0,0296 0,0300
 0,1047 0,0818 0,0909 0,0808 0,0455 0,1175 0,0575 0,0707 0,0539 0,0629
 0,0514 0,0484 0,0416 0,0386 0,0236 0,0485 0,0201 0,0623 0,0374 0,0255
 0,0899 0,0820 0,0685 0,0811 0,0405 0,1156 0,0348 0,0671 0,0520 0,0616
 0,0646 0,0561 0,0648 0,0531 0,0313 0,0924 0,0317 0,0570 0,0466 0,0561

OMEGA se_OMEGA

0,1917 0,0745
 0,2551 0,2188
 0,1121 0,0464
 0,1914 0,1197
 0,1520 0,0900
 0,0392 0,0157
 0,1470 0,0906
 2,4983 1,2640
 0,5973 0,2386
 0,2337 0,1077

A se_A
 0,0834 0,0272
 0,0848 0,0494
 0,0609 0,0172
 0,0938 0,0438
 0,0548 0,0212
 0,0550 0,0135
 0,0683 0,0239
 0,3944 0,1812
 0,1624 0,0634

```

0,2046 0,0567
B      se_B
0,8928 0,0285
0,8893 0,0658
0,9228 0,0198
0,8847 0,0509
0,9327 0,0243
0,9318 0,0145
0,9215 0,0256
0,2392 0,3016
0,7960 0,0643
0,8052 0,0444
S
1,0000 0,7176 0,6357 0,6880 0,5677 0,6018 0,4193 0,4509 0,5426 0,3800
0,7176 1,0000 0,6136 0,6129 0,5145 0,6345 0,4568 0,4795 0,4767 0,3418
0,6357 0,6136 1,0000 0,5545 0,5083 0,5635 0,3922 0,4127 0,4960 0,2754
0,6880 0,6129 0,5545 1,0000 0,5438 0,5241 0,3481 0,4027 0,5224 0,3683
0,5677 0,5145 0,5083 0,5438 1,0000 0,4918 0,2815 0,4168 0,4786 0,3024
0,6018 0,6345 0,5635 0,5241 0,4918 1,0000 0,4121 0,4350 0,4787 0,3403
0,4193 0,4568 0,3922 0,3481 0,2815 0,4121 1,0000 0,3133 0,3407 0,2680
0,4509 0,4795 0,4127 0,4027 0,4168 0,4350 0,3133 1,0000 0,3645 0,2934
0,5426 0,4767 0,4960 0,5224 0,4786 0,4787 0,3407 0,3645 1,0000 0,3098
0,3800 0,3418 0,2754 0,3683 0,3024 0,3403 0,2680 0,2934 0,3098 1,0000
se_S
0,0000 0,0277 0,0266 0,0263 0,0338 0,0286 0,0449 0,0391 0,0364 0,0445
0,0277 0,0000 0,0267 0,0298 0,0349 0,0280 0,0390 0,0368 0,0405 0,0462
0,0266 0,0267 0,0000 0,0319 0,0342 0,0296 0,0385 0,0363 0,0367 0,0422
0,0263 0,0298 0,0319 0,0000 0,0366 0,0306 0,0437 0,0363 0,0364 0,0403
0,0338 0,0349 0,0342 0,0366 0,0000 0,0376 0,0429 0,0372 0,0410 0,0448
0,0286 0,0280 0,0296 0,0306 0,0376 0,0000 0,0444 0,0423 0,0371 0,0470
0,0449 0,0390 0,0385 0,0437 0,0429 0,0444 0,0000 0,0541 0,0468 0,0558
0,0391 0,0368 0,0363 0,0363 0,0372 0,0423 0,0541 0,0000 0,0396 0,0499
0,0364 0,0405 0,0367 0,0364 0,0410 0,0371 0,0468 0,0396 0,0000 0,0471
0,0445 0,0462 0,0422 0,0403 0,0448 0,0470 0,0558 0,0499 0,0471 0,0000
alpha se_alpha
0,0007 0,0002
beta  se_beta
0,8789 0,0383

```

ПОРТФЕЛЬ №12

c se_c
 0,0383 0,0681
 0,0501 0,0858
 0,1987 0,0755
 0,1416 0,0801
 0,1822 0,1097
 0,0525 0,0520
 0,0346 0,0995
 0,0306 0,0747
 0,1269 0,0953
 0,0557 0,0804

Q
 0,1110 -0,0176 -0,0399 0,0017 -0,0057 -0,0796 -0,0546 -0,0103 0,0452 -0,0406
 -0,0180 0,1236 -0,1018 -0,0088 0,0542 -0,0776 -0,0309 -0,0645 0,0383 0,0163
 -0,0364 0,0566 0,0896 -0,0314 0,0090 -0,0552 -0,0501 -0,0756 -0,0091 0,0365
 0,0252 0,0250 0,0076 0,0170 0,0546 0,0288 -0,0411 -0,0462 0,0153 -0,0202
 0,0272 0,0454 0,0344 -0,0836 0,0940 -0,0435 -0,1180 -0,0697 -0,0126 0,0209
 0,0981 -0,0246 -0,0314 -0,0564 0,0044 0,0009 -0,0172 -0,0161 0,0156 -0,0059
 -0,1085 0,0243 0,0086 0,0773 0,0023 -0,0814 0,1511 -0,1866 0,0933 -0,0394
 -0,0283 -0,0541 -0,0042 -0,0136 0,0383 0,0069 0,0117 0,0634 0,0326 0,0012
 0,0362 -0,0346 0,0822 -0,0439 0,0274 0,0217 -0,0761 0,0396 0,1526 0,0000
 -0,0003 0,0779 0,0372 -0,1153 -0,0194 -0,0672 -0,0343 -0,0077 0,1380 0,0945

se_Q
 0,0743 0,0553 0,0566 0,0596 0,0358 0,0767 0,0275 0,0539 0,0273 0,0321
 0,0958 0,0746 0,0792 0,0608 0,0460 0,1079 0,0270 0,0717 0,0411 0,0364
 0,0803 0,0600 0,0686 0,0608 0,0405 0,0823 0,0238 0,0581 0,0338 0,0339
 0,0899 0,0662 0,0686 0,0706 0,0448 0,0886 0,0353 0,0695 0,0376 0,0387
 0,1069 0,0875 0,0814 0,0781 0,0568 0,1116 0,0405 0,0815 0,0414 0,0443
 0,0573 0,0437 0,0473 0,0423 0,0253 0,0697 0,0266 0,0411 0,0225 0,0289
 0,1155 0,0725 0,0906 0,0718 0,0445 0,1070 0,0551 0,0729 0,0481 0,0602
 0,0516 0,0450 0,0507 0,0303 0,0253 0,0541 0,0192 0,0684 0,0308 0,0240
 0,1000 0,0709 0,0763 0,0739 0,0439 0,1107 0,0316 0,0706 0,0467 0,0515
 0,0939 0,0508 0,0646 0,0488 0,0308 0,0848 0,0307 0,0490 0,0428 0,0538

OMEGA se_OMEGA
 0,1011 0,0324
 0,3408 0,2167
 0,1167 0,0515
 0,1731 0,0916
 0,1593 0,0993
 0,0404 0,0159
 0,1440 0,0922
 2,4259 1,3358
 0,6373 0,2490
 0,2318 0,1091

A se_A
 0,0693 0,0177
 0,1074 0,0547
 0,0656 0,0185
 0,0859 0,0352
 0,0544 0,0227
 0,0573 0,0146
 0,0676 0,0239
 0,3946 0,1945
 0,1680 0,0630

0,2060	0,0578																		
B	se_B																		
0,9097	0,0188																		
0,8599	0,0656																		
0,9182	0,0217																		
0,8936	0,0403																		
0,9324	0,0268																		
0,9292	0,0157																		
0,9223	0,0261																		
0,2530	0,3258																		
0,7874	0,0641																		
0,8046	0,0453																		
S																			
1,0000	0,6793	0,6338	0,6142	0,5399	0,5960	0,3996	0,4179	0,5083	0,3215										
0,6793	1,0000	0,6118	0,6153	0,5174	0,6384	0,4549	0,4718	0,4822	0,3407										
0,6338	0,6118	1,0000	0,5535	0,5091	0,5669	0,3925	0,4103	0,4979	0,2739										
0,6142	0,6153	0,5535	1,0000	0,5409	0,5240	0,3507	0,4036	0,5234	0,3633										
0,5399	0,5174	0,5091	0,5409	1,0000	0,4946	0,2848	0,4108	0,4783	0,3002										
0,5960	0,6384	0,5669	0,5240	0,4946	1,0000	0,4186	0,4374	0,4823	0,3413										
0,3996	0,4549	0,3925	0,3507	0,2848	0,4186	1,0000	0,3101	0,3416	0,2647										
0,4179	0,4718	0,4103	0,4036	0,4108	0,4374	0,3101	1,0000	0,3656	0,2881										
0,5083	0,4822	0,4979	0,5234	0,4783	0,4823	0,3416	0,3656	1,0000	0,3034										
0,3215	0,3407	0,2739	0,3633	0,3002	0,3413	0,2647	0,2881	0,3034	1,0000										
se_S																			
0,0000	0,0246	0,0260	0,0277	0,0306	0,0280	0,0429	0,0339	0,0328	0,0369										
0,0246	0,0000	0,0261	0,0285	0,0333	0,0272	0,0379	0,0350	0,0386	0,0431										
0,0260	0,0261	0,0000	0,0311	0,0338	0,0286	0,0379	0,0349	0,0359	0,0411										
0,0277	0,0285	0,0311	0,0000	0,0352	0,0303	0,0429	0,0345	0,0359	0,0388										
0,0306	0,0333	0,0338	0,0352	0,0000	0,0363	0,0416	0,0354	0,0399	0,0431										
0,0280	0,0272	0,0286	0,0303	0,0363	0,0000	0,0431	0,0403	0,0362	0,0452										
0,0429	0,0379	0,0379	0,0429	0,0416	0,0431	0,0000	0,0520	0,0460	0,0539										
0,0339	0,0350	0,0349	0,0345	0,0354	0,0403	0,0520	0,0000	0,0381	0,0496										
0,0328	0,0386	0,0359	0,0359	0,0399	0,0362	0,0460	0,0381	0,0000	0,0457										
0,0369	0,0431	0,0411	0,0388	0,0431	0,0452	0,0539	0,0496	0,0457	0,0000										
alpha	se_alpha																		
0,0007	0,0003																		
beta	se_beta																		
0,8574	0,0418																		

ПОРТФЕЛЬ №13

c se_c
 0,0138 0,0723
 0,0547 0,0913
 0,1762 0,0799
 0,0174 0,1213
 0,1512 0,1063
 0,0211 0,0558
 0,0226 0,0886
 0,0015 0,1214
 0,0979 0,1090
 0,0269 0,1238

Q
 0,0524 -0,0058 -0,0354 0,0034 0,0412 -0,0718 -0,0604 -0,0439 0,0140 0,0052
 -0,0353 0,1787 -0,0600 -0,0882 0,0516 -0,1458 -0,0248 0,0012 -0,0453 0,0462
 -0,0250 0,0206 0,0816 0,0656 0,0038 -0,1104 -0,0549 -0,0659 -0,0409 0,0600
 0,0037 0,0387 -0,0549 0,0896 0,0376 -0,1078 -0,0426 -0,0140 -0,0162 0,0015
 0,0962 -0,0870 0,0405 0,0165 0,0869 -0,0578 -0,1244 -0,0425 -0,0415 0,0436
 -0,0380 0,0767 -0,0346 -0,0245 0,0180 -0,0388 -0,0289 -0,0207 0,0059 0,0106
 -0,0962 0,1777 -0,0279 0,0461 0,0078 -0,1957 0,1143 -0,1915 0,0738 -0,0083
 -0,0801 0,0191 -0,0104 0,0191 0,0417 -0,0327 0,0090 0,0555 0,0155 0,0063
 -0,0785 -0,0266 0,0906 0,0132 0,0419 0,0149 -0,0847 0,0488 0,1381 0,0270
 0,0127 0,1127 0,0145 -0,0799 -0,0162 -0,1170 -0,0354 -0,0154 0,1239 0,1070

se_Q
 0,0613 0,0791 0,0603 0,0409 0,0909 0,1018 0,0327 0,0584 0,0451 0,0405
 0,0732 0,0762 0,0820 0,0490 0,1052 0,1069 0,0387 0,0569 0,0558 0,0360
 0,0736 0,0622 0,0647 0,0436 0,0955 0,0963 0,0276 0,0620 0,0386 0,0380
 0,0778 0,0894 0,0705 0,0564 0,1010 0,1215 0,0322 0,1176 0,0572 0,0592
 0,0892 0,0759 0,0708 0,0579 0,0883 0,1066 0,0426 0,0798 0,0451 0,0470
 0,0470 0,0438 0,0483 0,0288 0,0542 0,0721 0,0290 0,0401 0,0233 0,0320
 0,1008 0,0847 0,0990 0,0534 0,1800 0,0988 0,0609 0,0766 0,0514 0,0999
 0,0435 0,0424 0,0642 0,0264 0,0367 0,0488 0,0217 0,0572 0,0321 0,0239
 0,1045 0,1162 0,0733 0,0586 0,0775 0,3123 0,0333 0,0696 0,0640 0,0576
 0,0887 0,0657 0,0658 0,0448 0,0367 0,0823 0,0320 0,0623 0,0455 0,0544

OMEGA se_OMEGA
 0,1570 0,0544
 0,1738 0,0725
 0,1176 0,0445
 0,2038 0,0767
 0,1257 0,0700
 0,0364 0,0132
 0,1416 0,0898
 2,5394 1,2116
 0,6260 0,2730
 0,2517 0,1190

A se_A
 0,0654 0,0216
 0,0618 0,0187
 0,0564 0,0158
 0,0635 0,0144
 0,0464 0,0169
 0,0474 0,0108
 0,0654 0,0241
 0,3934 0,1674
 0,1598 0,0717

```

0,1982 0,0578
B      se_B
0,9135 0,0222
0,9172 0,0252
0,9258 0,0184
0,9190 0,0186
0,9422 0,0193
0,9394 0,0119
0,9233 0,0264
0,2318 0,2812
0,7945 0,0760
0,8071 0,0472
S
1,0000 0,7520 0,6424 0,6364 0,5680 0,6125 0,4211 0,4539 0,5437 0,3910
0,7520 1,0000 0,6583 0,6379 0,5468 0,6739 0,4859 0,5092 0,5330 0,3632
0,6424 0,6583 1,0000 0,5953 0,5137 0,5700 0,3897 0,4099 0,4999 0,2850
0,6364 0,6379 0,5953 1,0000 0,5404 0,5685 0,3924 0,3779 0,5144 0,3442
0,5680 0,5468 0,5137 0,5404 1,0000 0,5034 0,2878 0,4117 0,4755 0,3100
0,6125 0,6739 0,5700 0,5685 0,5034 1,0000 0,4126 0,4397 0,4862 0,3403
0,4211 0,4859 0,3897 0,3924 0,2878 0,4126 1,0000 0,3146 0,3452 0,2667
0,4539 0,5092 0,4099 0,3779 0,4117 0,4397 0,3146 1,0000 0,3658 0,2985
0,5437 0,5330 0,4999 0,5144 0,4755 0,4862 0,3452 0,3658 1,0000 0,3111
0,3910 0,3632 0,2850 0,3442 0,3100 0,3403 0,2667 0,2985 0,3111 1,0000
se_S
0,0000 0,0218 0,0271 0,0277 0,0350 0,0292 0,0466 0,0401 0,0362 0,0492
0,0218 0,0000 0,0245 0,0285 0,0319 0,0264 0,0471 0,0378 0,0382 0,0486
0,0271 0,0245 0,0000 0,0293 0,0349 0,0311 0,0403 0,0369 0,0370 0,0447
0,0277 0,0285 0,0293 0,0000 0,0342 0,0323 0,0424 0,0435 0,0440 0,0470
0,0350 0,0319 0,0349 0,0342 0,0000 0,0387 0,0443 0,0368 0,0403 0,0460
0,0292 0,0264 0,0311 0,0323 0,0387 0,0000 0,0458 0,0421 0,0376 0,0491
0,0466 0,0471 0,0403 0,0424 0,0443 0,0458 0,0000 0,0533 0,0492 0,0581
0,0401 0,0378 0,0369 0,0435 0,0368 0,0421 0,0533 0,0000 0,0379 0,0512
0,0362 0,0382 0,0370 0,0440 0,0403 0,0376 0,0492 0,0379 0,0000 0,0476
0,0492 0,0486 0,0447 0,0470 0,0460 0,0491 0,0581 0,0512 0,0476 0,0000
alpha se_alpha
0,0005 0,0002
beta se_beta
0,8799 0,0476

```

ПОРТФЕЛЬ №14

c	se_c
0,0099	2,1416
0,0506	3,8647
0,1724	2,8977
0,0123	7,0074
0,1467	3,6111
0,0230	2,0971
0,0186	3,1016
-0,0041	2,0997
0,0958	3,0885
0,0189	1,7387

Q

0,1198	-0,0471	-0,0399	0,0037	0,0132	-0,1141	-0,0543	0,0047	0,0419	-0,0111
0,0265	0,1536	-0,0703	-0,1017	0,0581	-0,1662	-0,0182	-0,0023	-0,0365	0,0447
-0,0398	0,0137	0,0843	0,0592	0,0128	-0,1095	-0,0494	-0,0669	-0,0340	0,0599
0,0292	0,0214	-0,0582	0,0859	0,0458	-0,1184	-0,0363	-0,0142	-0,0087	0,0024
0,0398	-0,0800	0,0526	0,0224	0,1016	-0,0605	-0,1141	-0,0406	-0,0348	0,0504
0,0631	0,0454	-0,0475	-0,0344	0,0148	-0,0592	-0,0250	-0,0219	0,0039	0,0079
-0,1281	0,1634	-0,0206	0,0408	0,0132	-0,1846	0,1178	-0,1919	0,0783	-0,0102
-0,0593	0,0116	-0,0128	0,0128	0,0400	-0,0399	0,0113	0,0507	0,0173	0,0064
0,0336	-0,0696	0,0738	0,0012	0,0385	-0,0104	-0,0807	0,0500	0,1410	0,0251
-0,0131	0,1113	0,0183	-0,0767	-0,0071	-0,1120	-0,0323	-0,0153	0,1263	0,1083

se_Q

0,7636	0,7307	0,6713	0,2581	0,2456	0,8958	0,0596	0,1255	0,1114	0,3956
0,9092	1,0619	1,0757	0,2684	0,2556	1,2346	0,0830	0,3067	0,1671	0,2279
0,6772	0,7948	0,7980	0,1869	0,0415	0,9321	0,0670	0,0542	0,1935	0,2404
0,8161	1,5273	1,3240	0,4424	0,3061	1,2000	0,1450	0,1622	0,4358	0,3024
1,4526	0,9845	1,0415	0,1822	0,1512	1,5070	0,0786	0,1259	0,1692	0,2217
0,5124	0,6052	0,6497	0,1225	0,1202	0,8069	0,0678	0,1233	0,0258	0,0778
0,7398	0,7548	0,8477	0,5115	1,0403	0,7043	0,0562	0,3669	0,0592	0,3237
0,1626	0,9155	0,7025	0,0303	0,0445	0,7520	0,0362	0,1707	0,1247	0,0242
1,3080	0,9721	0,9214	0,3627	0,3199	1,6834	0,0606	0,0693	0,1538	0,2359
0,6659	0,3468	0,5126	0,0628	0,2178	0,4884	0,0438	0,1913	0,0684	0,0577

OMEGA se_OMEGA

0,0783	0,0341
0,1974	0,1081
0,1213	0,0573
0,2121	0,1776
0,1287	0,0889
0,0373	0,0191
0,1350	0,1007
2,3190	1,3019
0,6609	0,4346
0,2502	0,1255

A se_A

0,0576	0,0217
0,0748	0,0292
0,0615	0,0216
0,0678	0,0190
0,0462	0,0228
0,0489	0,0233
0,0649	0,0236
0,3787	0,1880
0,1632	0,1332

0,2007	0,0752									
B	se_B									
0,9251	0,0175									
0,9023	0,0387									
0,9206	0,0253									
0,9144	0,0373									
0,9421	0,0278									
0,9377	0,0259									
0,9244	0,0273									
0,2818	0,2991									
0,7882	0,1514									
0,8056	0,0539									
S										
1,0000	0,6967	0,6342	0,5782	0,5366	0,6020	0,4005	0,4231	0,5108	0,3282	
0,6967	1,0000	0,6559	0,6359	0,5461	0,6727	0,4857	0,5076	0,5369	0,3631	
0,6342	0,6559	1,0000	0,5931	0,5137	0,5709	0,3890	0,4097	0,5013	0,2837	
0,5782	0,6359	0,5931	1,0000	0,5398	0,5682	0,3929	0,3762	0,5167	0,3428	
0,5366	0,5461	0,5137	0,5398	1,0000	0,5031	0,2887	0,4067	0,4749	0,3088	
0,6020	0,6727	0,5709	0,5682	0,5031	1,0000	0,4165	0,4413	0,4897	0,3418	
0,4005	0,4857	0,3890	0,3929	0,2887	0,4165	1,0000	0,3109	0,3467	0,2617	
0,4231	0,5076	0,4097	0,3762	0,4067	0,4413	0,3109	1,0000	0,3679	0,2966	
0,5108	0,5369	0,5013	0,5167	0,4749	0,4897	0,3467	0,3679	1,0000	0,3096	
0,3282	0,3631	0,2837	0,3428	0,3088	0,3418	0,2617	0,2966	0,3096	1,0000	
se_S										
0,0000	0,0309	0,0340	0,0705	0,0337	0,0316	0,0606	0,0350	0,0362	0,0976	
0,0309	0,0000	0,0300	0,0754	0,0306	0,0309	0,0671	0,0364	0,0411	0,1253	
0,0340	0,0300	0,0000	0,0470	0,0475	0,0407	0,0689	0,0371	0,0447	0,1004	
0,0705	0,0754	0,0470	0,0000	0,0428	0,0646	0,0888	0,0533	0,0488	0,1649	
0,0337	0,0306	0,0475	0,0428	0,0000	0,0506	0,0513	0,0505	0,0419	0,0726	
0,0316	0,0309	0,0407	0,0646	0,0506	0,0000	0,0514	0,0479	0,0358	0,0627	
0,0606	0,0671	0,0689	0,0888	0,0513	0,0514	0,0000	0,0900	0,0614	0,1484	
0,0350	0,0364	0,0371	0,0533	0,0505	0,0479	0,0900	0,0000	0,0373	0,1586	
0,0362	0,0411	0,0447	0,0488	0,0419	0,0358	0,0614	0,0373	0,0000	0,1187	
0,0976	0,1253	0,1004	0,1649	0,0726	0,0627	0,1484	0,1586	0,1187	0,0000	
alpha	se_alpha									
0,0005	0,0003									
beta	se_beta									
0,8629	0,0994									

ПОРТФЕЛЬ №15

c	se_c
0,0388	0,3388
0,0435	0,4082
0,1928	0,2862
0,0426	0,3296
0,1728	0,2945
0,0366	0,1991
0,0419	0,4074
0,0209	0,3872
0,1130	0,2647
0,0507	0,2038

Q

0,0590	0,0229	-0,0428	-0,0206	0,0271	-0,0655	-0,0579	-0,0463	0,0224	-0,0042
0,0485	0,1348	-0,0979	-0,0907	0,0642	-0,1063	-0,0355	-0,0371	0,0207	0,0544
-0,0243	0,0466	0,0703	0,0459	-0,0075	-0,1006	-0,0541	-0,0652	-0,0325	0,0541
0,0334	-0,0126	-0,0434	0,0756	0,0222	-0,0746	-0,0358	-0,0018	-0,0046	-0,0074
0,0813	0,0136	0,0176	-0,0126	0,0716	-0,0888	-0,1252	-0,0518	-0,0399	0,0376
0,0048	-0,0082	-0,0218	-0,0286	0,0092	0,0023	-0,0207	-0,0067	0,0132	0,0056
-0,0389	0,0329	-0,0080	0,0454	-0,0056	-0,1239	0,1451	-0,1767	0,0856	-0,0123
-0,0429	-0,0567	-0,0055	0,0156	0,0385	0,0016	0,0102	0,0676	0,0225	0,0069
-0,0721	-0,0118	0,0866	-0,0010	0,0314	0,0157	-0,0816	0,0500	0,1441	0,0209
0,0423	0,0565	0,0237	-0,0917	-0,0267	-0,0737	-0,0305	-0,0037	0,1274	0,1059

se_Q

0,2602	0,1037	0,0908	0,1032	0,0668	0,0725	0,0335	0,1976	0,0963	0,0556
0,3102	0,1046	0,1112	0,0886	0,0665	0,0923	0,0330	0,2146	0,1192	0,0650
0,2155	0,0776	0,0729	0,0866	0,0650	0,0725	0,0279	0,1604	0,0902	0,0417
0,3081	0,1162	0,0784	0,1041	0,1191	0,0846	0,0385	0,2680	0,1856	0,0731
0,2028	0,2858	0,1295	0,2177	0,0790	0,1703	0,0532	0,2691	0,1004	0,0536
0,2521	0,0628	0,0688	0,0687	0,0563	0,0541	0,0261	0,1574	0,0586	0,0331
0,2376	0,1596	0,3203	0,0558	0,0670	0,1255	0,0571	0,1326	0,0569	0,0717
0,1119	0,0487	0,0605	0,0388	0,0232	0,0596	0,0225	0,0993	0,0483	0,0253
0,1936	0,0805	0,0745	0,1195	0,0792	0,1404	0,0348	0,1778	0,0823	0,0562
0,0832	0,0898	0,0580	0,0677	0,0399	0,0806	0,0359	0,1984	0,0548	0,0565

OMEGA se_OMEGA

0,1555	0,0745
0,1653	0,2230
0,1097	0,0425
0,2111	0,0811
0,1320	0,0743
0,0369	0,0149
0,1440	0,0915
2,5988	1,4096
0,6196	0,2583
0,2491	0,1172

A se_A

0,0685	0,0290
0,0646	0,0588
0,0575	0,0162
0,0669	0,0159
0,0487	0,0181
0,0492	0,0132
0,0655	0,0243
0,3847	0,1738
0,1612	0,0670

0,2006	0,0570									
B	se_B									
0,9113	0,0322									
0,9183	0,0779									
0,9264	0,0183									
0,9153	0,0201									
0,9399	0,0204									
0,9378	0,0144									
0,9236	0,0262									
0,2262	0,3214									
0,7942	0,0693									
0,8067	0,0460									
S										
1,0000	0,7229	0,6418	0,6354	0,5689	0,6096	0,4176	0,4554	0,5438	0,3877	
0,7229	1,0000	0,6281	0,6216	0,5178	0,6403	0,4604	0,4926	0,4800	0,3475	
0,6418	0,6281	1,0000	0,5959	0,5132	0,5706	0,3909	0,4136	0,4981	0,2833	
0,6354	0,6216	0,5959	1,0000	0,5395	0,5661	0,3923	0,3771	0,5127	0,3475	
0,5689	0,5178	0,5132	0,5395	1,0000	0,4981	0,2827	0,4141	0,4778	0,3056	
0,6096	0,6403	0,5706	0,5661	0,4981	1,0000	0,4133	0,4385	0,4827	0,3430	
0,4176	0,4604	0,3909	0,3923	0,2827	0,4133	1,0000	0,3143	0,3419	0,2712	
0,4554	0,4926	0,4136	0,3771	0,4141	0,4385	0,3143	1,0000	0,3673	0,2960	
0,5438	0,4800	0,4981	0,5127	0,4778	0,4827	0,3419	0,3673	1,0000	0,3092	
0,3877	0,3475	0,2833	0,3475	0,3056	0,3430	0,2712	0,2960	0,3092	1,0000	
se_S										
0,0000	0,0254	0,0277	0,0286	0,0357	0,0290	0,0444	0,0383	0,0365	0,0490	
0,0254	0,0000	0,0317	0,0282	0,0363	0,0269	0,0383	0,0370	0,0409	0,0493	
0,0277	0,0317	0,0000	0,0309	0,0374	0,0307	0,0401	0,0362	0,0371	0,0461	
0,0286	0,0282	0,0309	0,0000	0,0367	0,0330	0,0437	0,0426	0,0453	0,0493	
0,0357	0,0363	0,0374	0,0367	0,0000	0,0392	0,0449	0,0370	0,0414	0,0480	
0,0290	0,0269	0,0307	0,0330	0,0392	0,0000	0,0444	0,0411	0,0379	0,0508	
0,0444	0,0383	0,0401	0,0437	0,0449	0,0444	0,0000	0,0543	0,0458	0,0544	
0,0383	0,0370	0,0362	0,0426	0,0370	0,0411	0,0543	0,0000	0,0377	0,0496	
0,0365	0,0409	0,0371	0,0453	0,0414	0,0379	0,0458	0,0377	0,0000	0,0474	
0,0490	0,0493	0,0461	0,0493	0,0480	0,0508	0,0544	0,0496	0,0474	0,0000	
alpha	se_alpha									
0,0006	0,0002									
beta	se_beta									
0,8801	0,0502									

ПОРТФЕЛЬ №16

c	se_c
0,0264	0,0655
0,0327	0,0895
0,1895	0,0790
0,0377	0,1101
0,1694	0,1120
0,0382	0,0543
0,0379	0,1054
0,0183	0,0759
0,1116	0,0957
0,0427	0,0883

Q

0,1024	-0,0066	-0,0480	-0,0112	-0,0028	-0,0944	-0,0536	0,0027	0,0466	-0,0251
-0,0187	0,1533	-0,1018	-0,0859	0,0699	-0,0807	-0,0284	-0,0445	0,0461	0,0360
-0,0552	0,0513	0,0684	0,0428	-0,0041	-0,0833	-0,0499	-0,0658	-0,0229	0,0462
0,0260	-0,0068	-0,0499	0,0764	0,0255	-0,0689	-0,0296	-0,0025	0,0072	-0,0141
-0,0020	0,0406	0,0254	-0,0056	0,0794	-0,0761	-0,1184	-0,0493	-0,0287	0,0355
0,0812	-0,0232	-0,0370	-0,0319	0,0039	-0,0085	-0,0159	-0,0090	0,0135	-0,0011
-0,1035	0,0409	-0,0024	0,0472	-0,0033	-0,1058	0,1487	-0,1774	0,0956	-0,0186
-0,0374	-0,0575	-0,0101	0,0126	0,0363	0,0009	0,0124	0,0691	0,0269	0,0048
0,0122	-0,0323	0,0665	-0,0084	0,0236	0,0004	-0,0775	0,0502	0,1488	0,0123
-0,0184	0,0734	0,0279	-0,0853	-0,0185	-0,0596	-0,0262	-0,0040	0,1346	0,1033

se_Q

0,0788	0,0594	0,0544	0,0475	0,0425	0,0838	0,0253	0,0561	0,0287	0,0354
0,1052	0,0950	0,0773	0,0528	0,0559	0,1125	0,0247	0,0760	0,0511	0,0579
0,0875	0,0707	0,0659	0,0511	0,0498	0,0876	0,0213	0,0645	0,0344	0,0375
0,1105	0,1178	0,0817	0,0688	0,0571	0,1131	0,0266	0,1154	0,0408	0,0531
0,1326	0,1073	0,0754	0,0737	0,0614	0,1221	0,0373	0,0866	0,0418	0,0493
0,0618	0,0544	0,0474	0,0343	0,0315	0,0810	0,0247	0,0493	0,0229	0,0317
0,1119	0,0931	0,0983	0,0603	0,0613	0,1089	0,0548	0,0744	0,0501	0,0617
0,0542	0,0470	0,0514	0,0279	0,0254	0,0524	0,0189	0,0648	0,0314	0,0246
0,1224	0,0842	0,0752	0,0747	0,0446	0,1267	0,0291	0,0756	0,0489	0,0522
0,0809	0,0606	0,0632	0,0470	0,0336	0,0868	0,0318	0,0519	0,0448	0,0560

OMEGA se_OMEGA

0,0834	0,0302
0,2507	0,3023
0,1144	0,0478
0,2268	0,0886
0,1377	0,0830
0,0381	0,0152
0,1379	0,0909
2,4982	1,4505
0,6526	0,2656
0,2450	0,1161

A se_A

0,0623	0,0160
0,0893	0,0692
0,0632	0,0171
0,0724	0,0171
0,0495	0,0197
0,0523	0,0137
0,0656	0,0244
0,3881	0,1937
0,1657	0,0677


```

0,2033 0,0585
B      se_B
0,9198 0,0171
0,8861 0,0936
0,9207 0,0199
0,9088 0,0219
0,9388 0,0230
0,9347 0,0148
0,9242 0,0266
0,2434 0,3446
0,7874 0,0699
0,8056 0,0467
S
1,0000 0,6785 0,6342 0,5763 0,5380 0,5982 0,3971 0,4229 0,5096 0,3242
0,6785 1,0000 0,6215 0,6195 0,5192 0,6404 0,4560 0,4820 0,4841 0,3441
0,6342 0,6215 1,0000 0,5940 0,5127 0,5722 0,3896 0,4117 0,4996 0,2803
0,5763 0,6195 0,5940 1,0000 0,5394 0,5653 0,3929 0,3737 0,5145 0,3456
0,5380 0,5192 0,5127 0,5394 1,0000 0,4995 0,2847 0,4102 0,4780 0,3038
0,5982 0,6404 0,5722 0,5653 0,4995 1,0000 0,4178 0,4395 0,4848 0,3442
0,3971 0,4560 0,3896 0,3929 0,2847 0,4178 1,0000 0,3110 0,3414 0,2668
0,4229 0,4820 0,4117 0,3737 0,4102 0,4395 0,3110 1,0000 0,3679 0,2910
0,5096 0,4841 0,4996 0,5145 0,4780 0,4848 0,3414 0,3679 1,0000 0,3052
0,3242 0,3441 0,2803 0,3456 0,3038 0,3442 0,2668 0,2910 0,3052 1,0000
se_S
0,0000 0,0252 0,0264 0,0309 0,0310 0,0276 0,0428 0,0340 0,0321 0,0369
0,0252 0,0000 0,0269 0,0272 0,0347 0,0270 0,0372 0,0357 0,0388 0,0444
0,0264 0,0269 0,0000 0,0276 0,0342 0,0287 0,0384 0,0354 0,0359 0,0418
0,0309 0,0272 0,0276 0,0000 0,0331 0,0306 0,0408 0,0422 0,0428 0,0443
0,0310 0,0347 0,0342 0,0331 0,0000 0,0366 0,0424 0,0363 0,0396 0,0442
0,0276 0,0270 0,0287 0,0306 0,0366 0,0000 0,0434 0,0407 0,0367 0,0470
0,0428 0,0372 0,0384 0,0408 0,0424 0,0434 0,0000 0,0519 0,0453 0,0533
0,0340 0,0357 0,0354 0,0422 0,0363 0,0407 0,0519 0,0000 0,0380 0,0502
0,0321 0,0388 0,0359 0,0428 0,0396 0,0367 0,0453 0,0380 0,0000 0,0452
0,0369 0,0444 0,0418 0,0443 0,0442 0,0470 0,0533 0,0502 0,0452 0,0000
alpha  se_alpha
0,0006 0,0003
beta   se_beta
0,8617 0,0544

```

П 2.2 Оценки параметров моделей доходностей акций на основе многомерного t -распределения со скаляром степеней свободы

ПОРТФЕЛЬ №1

c	se_c
-0,0579	0,0866
0,0240	0,1024
-0,0049	0,0851
0,0636	0,0831
0,1016	0,0967
0,0118	0,0494
-0,0086	0,1207
-0,0049	0,0848
0,0262	0,0995
0,0541	0,0770

Q

0,0394	-0,0635	0,0475	-0,0232	0,0515	-0,0299	-0,0524	-0,0511	0,0020	-0,0098
-0,0939	0,0798	-0,0518	0,0343	0,0726	-0,1255	-0,0254	-0,0043	-0,0639	0,0297
-0,0625	-0,0669	0,1829	-0,0111	0,0350	-0,0724	-0,0502	-0,0443	-0,0300	0,0325
-0,1096	0,0026	0,0808	0,0400	0,0780	-0,0227	-0,0417	-0,0137	-0,0159	-0,0022
0,0298	-0,0684	0,0544	-0,0326	0,1024	-0,0494	-0,1073	-0,0411	-0,0426	0,0365
-0,0105	0,0396	-0,0447	-0,0298	0,0239	-0,0663	-0,0184	-0,0091	-0,0049	0,0071
-0,0939	0,0873	-0,0645	0,0644	0,0088	-0,1682	0,1136	-0,0647	0,0275	-0,0412
-0,1232	0,0124	0,0496	0,0003	0,0656	-0,0296	-0,0033	0,0497	-0,0024	-0,0076
-0,1178	-0,0317	0,1445	-0,0128	0,0631	-0,0544	-0,0551	0,0358	0,1018	0,0133
0,0423	0,0694	-0,0555	-0,0521	-0,0153	-0,1142	-0,0409	0,0083	0,1127	0,0447

se_Q

0,0707	0,0656	0,0685	0,0512	0,0359	0,0812	0,0314	0,0604	0,0360	0,0379
0,0727	0,0773	0,0681	0,0611	0,0426	0,0853	0,0322	0,0745	0,0445	0,0282
0,0649	0,0600	0,0621	0,0485	0,0342	0,0742	0,0275	0,0578	0,0311	0,0315
0,0678	0,0752	0,0756	0,0603	0,0382	0,0915	0,0371	0,0628	0,0392	0,0350
0,0832	0,0776	0,0893	0,0738	0,0486	0,0958	0,0401	0,0658	0,0464	0,0401
0,0552	0,0467	0,0489	0,0374	0,0257	0,0544	0,0257	0,0463	0,0244	0,0247
0,0867	0,0747	0,0748	0,0705	0,0494	0,0805	0,0513	0,0814	0,0475	0,0305
0,0572	0,0500	0,0563	0,0385	0,0269	0,0522	0,0225	0,0548	0,0319	0,0334
0,0705	0,0688	0,0717	0,0674	0,0407	0,0925	0,0294	0,0600	0,0444	0,0461
0,0565	0,0489	0,0586	0,0401	0,0263	0,0719	0,0308	0,0483	0,0383	0,0506

OMEGA se_OMEGA

0,2775	0,1118
0,5400	0,1771
0,3465	0,0989
0,3158	0,1407
0,3032	0,1362
0,0544	0,0182
1,3529	0,7398
2,7681	2,7630
0,5901	0,2126
0,5015	0,2940

A	se_A
0,0554	0,0252
0,0961	0,0251
0,0725	0,0185
0,0888	0,0319
0,0578	0,0212

0,0478 0,0138
 0,2698 0,1415
 0,3059 0,2484
 0,1281 0,0369
 0,2533 0,0923
 B se_B
 0,9048 0,0348
 0,8483 0,0361
 0,8764 0,0262
 0,8743 0,0401
 0,9123 0,0292
 0,9323 0,0161
 0,6469 0,1463
 0,2810 0,5982
 0,8244 0,0437
 0,7290 0,0970
 S
 1,0000 0,7269 0,7851 0,6754 0,5235 0,5967 0,4553 0,4413 0,5227 0,3654
 0,7269 1,0000 0,7280 0,6172 0,4944 0,6330 0,5131 0,4904 0,5125 0,3251
 0,7851 0,7280 1,0000 0,6831 0,5042 0,6205 0,4595 0,4856 0,5349 0,3406
 0,6754 0,6172 0,6831 1,0000 0,4968 0,5058 0,3730 0,3912 0,4876 0,3369
 0,5235 0,4944 0,5042 0,4968 1,0000 0,4637 0,2864 0,3914 0,4008 0,2784
 0,5967 0,6330 0,6205 0,5058 0,4637 1,0000 0,4324 0,4298 0,4437 0,3031
 0,4553 0,5131 0,4595 0,3730 0,2864 0,4324 1,0000 0,3631 0,3672 0,2335
 0,4413 0,4904 0,4856 0,3912 0,3914 0,4298 0,3631 1,0000 0,3632 0,2434
 0,5227 0,5125 0,5349 0,4876 0,4008 0,4437 0,3672 0,3632 1,0000 0,2714
 0,3654 0,3251 0,3406 0,3369 0,2784 0,3031 0,2335 0,2434 0,2714 1,0000
 se_S
 0,0000 0,0223 0,0173 0,0256 0,0337 0,0273 0,0385 0,0368 0,0346 0,0419
 0,0223 0,0000 0,0221 0,0298 0,0334 0,0265 0,0402 0,0367 0,0346 0,0431
 0,0173 0,0221 0,0000 0,0258 0,0337 0,0297 0,0389 0,0338 0,0349 0,0434
 0,0256 0,0298 0,0258 0,0000 0,0361 0,0326 0,0401 0,0379 0,0350 0,0416
 0,0337 0,0334 0,0337 0,0361 0,0000 0,0355 0,0415 0,0360 0,0383 0,0426
 0,0273 0,0265 0,0297 0,0326 0,0355 0,0000 0,0410 0,0371 0,0375 0,0405
 0,0385 0,0402 0,0389 0,0401 0,0415 0,0410 0,0000 0,0443 0,0408 0,0441
 0,0368 0,0367 0,0338 0,0379 0,0360 0,0371 0,0443 0,0000 0,0389 0,0436
 0,0346 0,0346 0,0349 0,0350 0,0383 0,0375 0,0408 0,0389 0,0000 0,0450
 0,0419 0,0431 0,0434 0,0416 0,0426 0,0405 0,0441 0,0436 0,0450 0,0000
 alpha se_alpha
 0,0006 0,0003
 beta se_beta
 0,9269 0,0403
 nu se_nu
 7,4580 0,2467

ПОРТФЕЛЬ №2

c se_c
 -0,0134 0,1438
 0,0134 0,1372
 -0,0154 0,1453
 0,0644 0,0978
 0,0838 0,1040
 0,0188 0,0597
 0,0024 0,1344
 -0,0016 0,1165
 0,0208 0,1562
 0,0581 0,1201

Q

0,1187 -0,0628 -0,0199 0,0017 0,0242 -0,1146 -0,0474 0,0091 0,0214 -0,0214
 0,0120 0,0579 -0,0912 0,0247 0,0614 -0,1441 -0,0197 -0,0008 -0,0576 0,0234
 0,0131 -0,0887 0,1520 -0,0141 0,0307 -0,0916 -0,0429 -0,0376 -0,0185 0,0246
 0,0051 -0,0280 0,0394 0,0184 0,0734 -0,0226 -0,0414 -0,0081 -0,0078 -0,0060
 -0,0603 -0,0607 0,1101 -0,0203 0,1092 -0,0446 -0,1014 -0,0609 -0,0353 0,0270
 0,0850 0,0310 -0,0857 -0,0351 0,0164 -0,0842 -0,0155 -0,0101 0,0046 0,0026
 -0,0566 0,0809 -0,0497 0,0412 0,0107 -0,1725 0,1138 -0,0820 0,0337 -0,0473
 -0,1144 0,0169 0,0462 -0,0151 0,0602 -0,0252 -0,0004 0,0394 -0,0026 -0,0022
 -0,0026 -0,0519 0,0902 -0,0271 0,0578 -0,0661 -0,0574 0,0387 0,1143 0,0002
 0,0081 0,0737 -0,0333 -0,0428 -0,0127 -0,1042 -0,0400 0,0040 0,1142 0,0516

se_Q

0,1832 0,0902 0,2300 0,1485 0,0548 0,2996 0,0305 0,0500 0,0753 0,1018
 0,2314 0,2964 0,2542 0,0875 0,0546 0,3270 0,0605 0,1056 0,0676 0,1065
 0,2083 0,1457 0,2703 0,2040 0,0395 0,2945 0,0435 0,0845 0,0777 0,0929
 0,2144 0,1139 0,2444 0,2606 0,0470 0,3152 0,0512 0,0619 0,0456 0,0800
 0,2278 0,0703 0,2404 0,3960 0,1277 0,2445 0,1208 0,1016 0,1346 0,1064
 0,1728 0,0794 0,1748 0,1227 0,0307 0,2783 0,0310 0,1019 0,0900 0,0770
 1,1346 0,5398 0,3728 0,6698 0,5549 0,1123 0,2724 0,7384 0,5158 0,2965
 0,2081 0,1078 0,2378 0,0623 0,0766 0,0818 0,0294 0,0477 0,0462 0,0323
 0,2006 0,1469 0,2642 0,1948 0,1144 0,4976 0,0442 0,1035 0,1589 0,1048
 0,2130 0,1129 0,0983 0,0542 0,0696 0,2949 0,0369 0,0860 0,0769 0,0831

OMEGA se_OMEGA

0,1623 0,5426
 0,5901 3,5787
 0,3343 1,2779
 0,3026 1,1883
 0,2868 1,2641
 0,0542 0,1863
 0,5791 27,3924
 2,1528 1,3159
 0,5521 1,5440
 0,4702 1,1102

A se_A
 0,0500 0,0220
 0,1061 0,3159
 0,0686 0,0645
 0,0851 0,1053
 0,0589 0,1143
 0,0510 0,0244
 0,1263 4,8043
 0,2381 0,2210
 0,1293 0,0607

```

0,2432 0,1375
B      se_B
0,9187 0,0719
0,8323 0,5651
0,8808 0,1972
0,8783 0,1942
0,9124 0,1867
0,9288 0,0520
0,8198 6,5854
0,4210 0,3960
0,8256 0,1324
0,7397 0,1669
S
1,0000 0,6823 0,7723 0,6103 0,5146 0,5945 0,4175 0,4103 0,4716 0,3035
0,6823 1,0000 0,7353 0,6251 0,5009 0,6383 0,4962 0,4874 0,5147 0,3317
0,7723 0,7353 1,0000 0,6844 0,5095 0,6296 0,4484 0,4862 0,5361 0,3397
0,6103 0,6251 0,6844 1,0000 0,4961 0,5141 0,3627 0,3914 0,4959 0,3359
0,5146 0,5009 0,5095 0,4961 1,0000 0,4713 0,2857 0,3842 0,3987 0,2807
0,5945 0,6383 0,6296 0,5141 0,4713 1,0000 0,4226 0,4278 0,4478 0,3056
0,4175 0,4962 0,4484 0,3627 0,2857 0,4226 1,0000 0,3534 0,3552 0,2282
0,4103 0,4874 0,4862 0,3914 0,3842 0,4278 0,3534 1,0000 0,3677 0,2350
0,4716 0,5147 0,5361 0,4959 0,3987 0,4478 0,3552 0,3677 1,0000 0,2719
0,3035 0,3317 0,3397 0,3359 0,2807 0,3056 0,2282 0,2350 0,2719 1,0000
se_S
0,0000 0,0689 0,0283 0,0609 0,0356 0,0563 0,4247 0,0599 0,0386 0,0623
0,0689 0,0000 0,0753 0,0451 0,0414 0,0681 0,4699 0,0465 0,0647 0,0953
0,0283 0,0753 0,0000 0,0336 0,0486 0,0575 0,4680 0,0534 0,0365 0,0679
0,0609 0,0451 0,0336 0,0000 0,0830 0,0336 0,4128 0,0847 0,0437 0,0548
0,0356 0,0414 0,0486 0,0830 0,0000 0,0455 0,2157 0,0536 0,0600 0,0435
0,0563 0,0681 0,0575 0,0336 0,0455 0,0000 0,4468 0,0687 0,0488 0,0831
0,4247 0,4699 0,4680 0,4128 0,2157 0,4468 0,0000 0,3230 0,4481 0,0663
0,0599 0,0465 0,0534 0,0847 0,0536 0,0687 0,3230 0,0000 0,0410 0,0784
0,0386 0,0647 0,0365 0,0437 0,0600 0,0488 0,4481 0,0410 0,0000 0,0734
0,0623 0,0953 0,0679 0,0548 0,0435 0,0831 0,0663 0,0784 0,0734 0,0000
alpha se_alpha
0,0006 0,0005
beta  se_beta
0,9216 0,1081
nu    se_nu
7,5946 4,9591

```

ПОРТФЕЛЬ №3

c se_c
 -0,0364 0,3833
 0,0200 0,4401
 0,0040 0,4341
 0,0725 0,3187
 0,1191 0,2896
 0,0200 0,1677
 -0,0045 0,7008
 -0,0096 0,4828
 0,0382 0,3375
 0,0743 0,1756

Q

0,0087 0,0195 0,0127 -0,0371 0,0417 -0,0581 -0,0482 -0,0494 0,0095 -0,0299
 -0,0766 0,0742 -0,0670 0,0148 0,0713 -0,1148 -0,0267 -0,0025 -0,0020 0,0158
 -0,0807 -0,0402 0,1619 -0,0197 0,0254 -0,0768 -0,0429 -0,0411 -0,0204 0,0135
 -0,1231 0,0521 0,0459 0,0214 0,0725 -0,0343 -0,0317 -0,0161 -0,0021 -0,0176
 0,0049 0,0415 0,0194 -0,0566 0,0805 -0,0856 -0,1042 -0,0442 -0,0311 0,0241
 0,0048 -0,0219 -0,0370 -0,0269 0,0193 -0,0511 -0,0075 0,0081 0,0029 -0,0076
 -0,0726 0,0101 -0,0606 0,0757 0,0063 -0,1559 0,1362 -0,0509 0,0326 -0,0601
 -0,1097 -0,0746 0,0634 0,0206 0,0581 0,0049 0,0057 0,0628 0,0036 -0,0142
 -0,1149 -0,0129 0,1252 -0,0270 0,0532 -0,0629 -0,0496 0,0404 0,1113 0,0103
 0,0497 0,0612 -0,0671 -0,0539 -0,0205 -0,1153 -0,0342 0,0151 0,1221 0,0387

se_Q

0,1951 0,1157 0,1123 0,0775 0,0353 0,1484 0,0338 0,0591 0,0416 0,0401
 0,1256 0,1292 0,1236 0,0591 0,0408 0,1434 0,0290 0,0904 0,0382 0,0290
 0,1263 0,1004 0,0948 0,0662 0,0387 0,1221 0,0274 0,0637 0,0386 0,0368
 0,1150 0,1228 0,0933 0,0585 0,0526 0,1495 0,0377 0,0666 0,0843 0,0381
 0,2594 0,1261 0,1337 0,1137 0,0473 0,1775 0,0437 0,0590 0,0637 0,0667
 0,1078 0,0611 0,0805 0,0566 0,0231 0,0891 0,0232 0,0661 0,0236 0,0260
 0,0859 0,2515 0,1537 0,0764 0,0673 0,1343 0,0600 0,0740 0,0526 0,0451
 0,0627 0,0570 0,0809 0,0385 0,0246 0,0633 0,0219 0,0643 0,0328 0,0316
 0,1238 0,1258 0,0985 0,1058 0,0539 0,1484 0,0358 0,0621 0,0476 0,0775
 0,0767 0,0596 0,0747 0,0410 0,0275 0,0851 0,0318 0,0535 0,0394 0,0572

OMEGA se_OMEGA

0,3125 0,1258
 0,7686 0,2677
 0,3754 0,1142
 0,3506 0,1387
 0,3074 0,1370
 0,0555 0,0200
 1,3937 0,6398
 2,7636 4,0267
 0,6078 0,2252
 0,5420 0,3335

A se_A

0,0572 0,0268
 0,0902 0,0281
 0,0748 0,0218
 0,0960 0,0307
 0,0562 0,0204
 0,0480 0,0155
 0,2968 0,1418
 0,3093 0,3470
 0,1288 0,0380

```

0,2553 0,0993
B      se_B
0,8991 0,0385
0,8216 0,0485
0,8700 0,0326
0,8655 0,0371
0,9136 0,0279
0,9316 0,0179
0,6329 0,1258
0,2768 0,8838
0,8223 0,0441
0,7227 0,1054
S
1,0000 0,7077 0,7864 0,6771 0,5262 0,5934 0,4489 0,4304 0,5233 0,3573
0,7077 1,0000 0,7141 0,6208 0,4743 0,6081 0,4690 0,4490 0,4706 0,2988
0,7864 0,7141 1,0000 0,6838 0,5082 0,6136 0,4554 0,4760 0,5345 0,3374
0,6771 0,6208 0,6838 1,0000 0,4909 0,5061 0,3717 0,3839 0,4876 0,3335
0,5262 0,4743 0,5082 0,4909 1,0000 0,4620 0,2814 0,3849 0,4016 0,2748
0,5934 0,6081 0,6136 0,5061 0,4620 1,0000 0,4339 0,4167 0,4446 0,3078
0,4489 0,4690 0,4554 0,3717 0,2814 0,4339 1,0000 0,3542 0,3628 0,2371
0,4304 0,4490 0,4760 0,3839 0,3849 0,4167 0,3542 1,0000 0,3574 0,2455
0,5233 0,4706 0,5345 0,4876 0,4016 0,4446 0,3628 0,3574 1,0000 0,2714
0,3573 0,2988 0,3374 0,3335 0,2748 0,3078 0,2371 0,2455 0,2714 1,0000
se_S
0,0000 0,0253 0,0176 0,0253 0,0369 0,0281 0,0506 0,0446 0,0365 0,0448
0,0253 0,0000 0,0231 0,0294 0,0404 0,0295 0,0483 0,0418 0,0392 0,0449
0,0176 0,0231 0,0000 0,0269 0,0357 0,0302 0,0489 0,0414 0,0373 0,0477
0,0253 0,0294 0,0269 0,0000 0,0367 0,0320 0,0540 0,0486 0,0375 0,0448
0,0369 0,0404 0,0357 0,0367 0,0000 0,0392 0,0581 0,0461 0,0413 0,0444
0,0281 0,0295 0,0302 0,0320 0,0392 0,0000 0,0509 0,0460 0,0395 0,0425
0,0506 0,0483 0,0489 0,0540 0,0581 0,0509 0,0000 0,0560 0,0460 0,0552
0,0446 0,0418 0,0414 0,0486 0,0461 0,0460 0,0560 0,0000 0,0491 0,0516
0,0365 0,0392 0,0373 0,0375 0,0413 0,0395 0,0460 0,0491 0,0000 0,0469
0,0448 0,0449 0,0477 0,0448 0,0444 0,0425 0,0552 0,0516 0,0469 0,0000
alpha se_alpha
0,0006 0,0003
beta  se_beta
0,9133 0,0375
nu    se_nu
7,4269 0,2449

```

ПОРТФЕЛЬ №4

c se_c
 -0,0084 0,1170
 -0,0003 0,1598
 -0,0130 0,1282
 0,0704 0,1106
 0,1017 0,1260
 0,0245 0,0690
 -0,0136 0,1116
 -0,0103 0,1125
 0,0241 0,1059
 0,0748 0,0820

Q
 0,1097 -0,0116 -0,0468 -0,0107 0,0067 -0,1355 -0,0418 0,0110 0,0236 -0,0362
 -0,0221 0,0554 -0,0806 0,0029 0,0543 -0,1161 -0,0215 0,0017 0,0061 0,0083
 0,0048 -0,0590 0,1293 -0,0271 0,0134 -0,1025 -0,0340 -0,0329 -0,0146 0,0047
 -0,0083 0,0256 0,0071 -0,0059 0,0640 -0,0409 -0,0294 -0,0099 0,0016 -0,0216
 -0,0822 0,0477 0,0739 -0,0495 0,0823 -0,0775 -0,0945 -0,0596 -0,0292 0,0108
 0,0960 -0,0291 -0,0775 -0,0318 0,0091 -0,0701 -0,0024 0,0098 0,0084 -0,0093
 -0,0677 0,0086 -0,0479 0,0737 -0,0077 -0,1546 0,1452 -0,0529 0,0265 -0,0603
 -0,1051 -0,0728 0,0628 0,0064 0,0501 0,0148 0,0082 0,0567 0,0020 -0,0104
 -0,0033 -0,0294 0,0710 -0,0414 0,0444 -0,0807 -0,0499 0,0457 0,1194 -0,0003
 0,0127 0,0671 -0,0471 -0,0403 -0,0225 -0,1044 -0,0338 0,0148 0,1217 0,0434

se_Q
 0,0644 0,0477 0,0583 0,0536 0,0326 0,0703 0,0276 0,0467 0,0283 0,0313
 0,0803 0,0653 0,0742 0,0604 0,0356 0,0878 0,0259 0,0569 0,0344 0,0302
 0,0725 0,0526 0,0641 0,0562 0,0339 0,0743 0,0264 0,0465 0,0314 0,0338
 0,0650 0,0665 0,0699 0,0703 0,0390 0,0799 0,0353 0,0519 0,0373 0,0386
 0,0879 0,0689 0,0900 0,0719 0,0471 0,0950 0,0389 0,0597 0,0419 0,0418
 0,0500 0,0391 0,0483 0,0407 0,0241 0,0547 0,0236 0,0335 0,0227 0,0235
 0,0866 0,0689 0,0796 0,0723 0,0406 0,0843 0,0482 0,0685 0,0532 0,0365
 0,0560 0,0495 0,0542 0,0361 0,0258 0,0526 0,0179 0,0532 0,0317 0,0316
 0,0896 0,0685 0,0785 0,0686 0,0419 0,0971 0,0302 0,0550 0,0468 0,0499
 0,0660 0,0491 0,0664 0,0412 0,0271 0,0714 0,0322 0,0478 0,0410 0,0521

OMEGA se_OMEGA

0,1909 0,0878
 0,8131 0,3143
 0,3917 0,1214
 0,3422 0,1258
 0,3100 0,1453
 0,0588 0,0191
 1,3281 0,6646
 2,3974 1,9974
 0,5996 0,2013
 0,5213 0,3030

A se_A
 0,0511 0,0259
 0,0943 0,0317
 0,0737 0,0219
 0,0920 0,0279
 0,0580 0,0225
 0,0511 0,0147
 0,2886 0,1461
 0,2585 0,1732
 0,1304 0,0345

ПОРТФЕЛЬ №5

c	se_c
-0,0818	0,0871
0,0009	0,0929
-0,0170	0,0881
-0,0336	0,1083
0,0811	0,1030
0,0002	0,0573
-0,0162	0,1070
-0,0226	0,0789
0,0176	0,1009
0,0325	0,0799

Q

0,0506	-0,0601	0,0136	0,0168	0,0362	-0,0450	-0,0414	-0,0438	-0,0091	-0,0014
-0,0366	0,1002	-0,0560	-0,0768	0,0739	-0,1127	-0,0153	0,0059	-0,0516	0,0356
-0,0269	-0,0615	0,1646	-0,0362	0,0327	-0,0807	-0,0410	-0,0317	-0,0312	0,0417
-0,0260	0,0027	-0,0084	0,0846	0,0557	-0,1515	-0,0364	0,0083	-0,0358	-0,0055
0,0262	-0,0762	0,0184	0,0464	0,0871	-0,0634	-0,1041	-0,0300	-0,0603	0,0370
-0,0028	0,0464	-0,0672	-0,0086	0,0156	-0,0696	-0,0196	-0,0060	-0,0073	0,0108
-0,0633	0,1065	-0,0736	0,0219	0,0134	-0,1975	0,1127	-0,0593	0,0276	-0,0314
-0,1059	0,0205	0,0315	0,0153	0,0588	-0,0419	0,0004	0,0437	-0,0055	0,0092
-0,1047	-0,0242	0,1045	0,0273	0,0523	-0,0692	-0,0572	0,0362	0,1007	0,0189
0,0332	0,0761	-0,0539	-0,0470	-0,0119	-0,1293	-0,0314	0,0096	0,1127	0,0610

se_Q

0,0679	0,0524	0,0618	0,0358	0,0324	0,0694	0,0295	0,0444	0,0368	0,0443
0,0719	0,0630	0,0664	0,0413	0,0375	0,0792	0,0311	0,0529	0,0476	0,0343
0,0625	0,0501	0,0607	0,0340	0,0293	0,0646	0,0253	0,0443	0,0327	0,0358
0,0753	0,0764	0,0811	0,0486	0,0442	0,0802	0,0275	0,0619	0,0403	0,0470
0,0831	0,0681	0,0921	0,0520	0,0455	0,0828	0,0379	0,0560	0,0476	0,0408
0,0462	0,0393	0,0465	0,0262	0,0215	0,0515	0,0249	0,0311	0,0246	0,0253
0,0760	0,0698	0,0749	0,0505	0,0389	0,0791	0,0490	0,0743	0,0470	0,0325
0,0508	0,0408	0,0565	0,0292	0,0249	0,0475	0,0214	0,0491	0,0311	0,0344
0,0678	0,0605	0,0686	0,0483	0,0389	0,0853	0,0274	0,0548	0,0458	0,0473
0,0552	0,0495	0,0620	0,0393	0,0261	0,0707	0,0316	0,0470	0,0398	0,0529

OMEGA se_OMEGA

0,2529	0,1091
0,4695	0,1772
0,3080	0,0817
0,4188	0,1644
0,2722	0,1393
0,0534	0,0175
1,2808	0,6914
2,1369	1,1772
0,5618	0,2103
0,4919	0,3067

A se_A

0,0529	0,0261
0,0887	0,0259
0,0654	0,0153
0,0778	0,0226
0,0532	0,0229
0,0469	0,0130
0,2580	0,1401
0,2515	0,1306
0,1207	0,0360

ПОРТФЕЛЬ №6

c	se_c
-0,0310	0,0828
-0,0117	0,1187
-0,0291	0,0927
-0,0417	0,1164
0,0660	0,1132
0,0063	0,0623
-0,0190	0,1215
-0,0221	0,0807
0,0081	0,1415
0,0376	0,0857

Q

0,0976	-0,0664	-0,0192	0,0181	0,0137	-0,1161	-0,0437	0,0231	0,0189	-0,0148
0,0040	0,0787	-0,0665	-0,0795	0,0637	-0,1303	-0,0115	0,0114	-0,0355	0,0267
-0,0075	-0,0824	0,1621	-0,0405	0,0298	-0,0915	-0,0349	-0,0236	-0,0144	0,0327
-0,0618	-0,0003	0,0224	0,0759	0,0531	-0,1469	-0,0341	0,0050	-0,0205	-0,0154
-0,0901	-0,0694	0,0910	0,0432	0,0944	-0,0511	-0,0991	-0,0463	-0,0505	0,0288
0,0673	0,0366	-0,0930	-0,0143	0,0067	-0,0853	-0,0179	-0,0037	0,0021	0,0065
-0,0815	0,0870	-0,0436	0,0204	0,0035	-0,1881	0,1225	-0,0552	0,0259	-0,0315
-0,1320	0,0197	0,0484	0,0065	0,0521	-0,0309	0,0028	0,0331	0,0000	0,0112
-0,0354	-0,0462	0,0737	0,0201	0,0471	-0,0825	-0,0603	0,0397	0,1117	0,0064
0,0026	0,0743	-0,0259	-0,0480	-0,0088	-0,1248	-0,0317	0,0087	0,1141	0,0641

se_Q

0,0750	0,0552	0,0563	0,0319	0,0358	0,0665	0,0295	0,0517	0,0309	0,0287
0,0906	0,0739	0,0694	0,0408	0,0426	0,0829	0,0343	0,0732	0,0520	0,0326
0,0968	0,0599	0,0714	0,0330	0,0377	0,0709	0,0278	0,0541	0,0349	0,0335
0,0966	0,1244	0,1195	0,0488	0,0530	0,0825	0,0289	0,0829	0,0420	0,0424
0,1000	0,0855	0,1068	0,0525	0,0510	0,0867	0,0404	0,0618	0,0467	0,0382
0,0540	0,0416	0,0492	0,0260	0,0250	0,0522	0,0269	0,0369	0,0256	0,0259
0,0907	0,0698	0,0766	0,0526	0,0380	0,0794	0,0506	0,0782	0,0467	0,0319
0,0566	0,0422	0,0583	0,0301	0,0259	0,0485	0,0195	0,0528	0,0332	0,0313
0,0910	0,0732	0,0759	0,0482	0,0428	0,0885	0,0296	0,0677	0,0477	0,0461
0,0660	0,0513	0,0633	0,0401	0,0280	0,0730	0,0336	0,0548	0,0412	0,0504

OMEGA se_OMEGA

0,1518	0,0542
0,5830	0,2300
0,3125	0,0774
0,4540	0,1814
0,2790	0,1531
0,0568	0,0177
1,2890	0,6679
1,9122	0,7064
0,5497	0,1954
0,4786	0,2879

A	se_A
0,0495	0,0200
0,1081	0,0346
0,0633	0,0145
0,0864	0,0253
0,0570	0,0265
0,0511	0,0132
0,2647	0,1389
0,2158	0,0827
0,1209	0,0337

0,2477	0,0918									
B	se_B									
0,9212	0,0253									
0,8309	0,0504									
0,8892	0,0197									
0,8791	0,0359									
0,9150	0,0368									
0,9282	0,0153									
0,6504	0,1409									
0,4762	0,1557									
0,8304	0,0415									
0,7316	0,0987									
S										
1,0000	0,6872	0,7730	0,5631	0,5146	0,6010	0,4257	0,4152	0,4789	0,3049	
0,6872	1,0000	0,7331	0,5925	0,5051	0,6398	0,5051	0,4893	0,5233	0,3289	
0,7730	0,7331	1,0000	0,5957	0,5139	0,6315	0,4577	0,4869	0,5474	0,3391	
0,5631	0,5925	0,5957	1,0000	0,4755	0,5261	0,3820	0,3715	0,4954	0,3273	
0,5146	0,5051	0,5139	0,4755	1,0000	0,4789	0,2959	0,3848	0,4041	0,2814	
0,6010	0,6398	0,6315	0,5261	0,4789	1,0000	0,4327	0,4308	0,4537	0,3039	
0,4257	0,5051	0,4577	0,3820	0,2959	0,4327	1,0000	0,3566	0,3656	0,2327	
0,4152	0,4893	0,4869	0,3715	0,3848	0,4308	0,3566	1,0000	0,3752	0,2356	
0,4789	0,5233	0,5474	0,4954	0,4041	0,4537	0,3656	0,3752	1,0000	0,2753	
0,3049	0,3289	0,3391	0,3273	0,2814	0,3039	0,2327	0,2356	0,2753	1,0000	
se_S										
0,0000	0,0244	0,0187	0,0308	0,0318	0,0282	0,0372	0,0347	0,0328	0,0386	
0,0244	0,0000	0,0211	0,0296	0,0309	0,0247	0,0378	0,0338	0,0316	0,0389	
0,0187	0,0211	0,0000	0,0296	0,0319	0,0276	0,0369	0,0315	0,0323	0,0397	
0,0308	0,0296	0,0296	0,0000	0,0329	0,0307	0,0395	0,0410	0,0333	0,0409	
0,0318	0,0309	0,0319	0,0329	0,0000	0,0337	0,0399	0,0331	0,0363	0,0398	
0,0282	0,0247	0,0276	0,0307	0,0337	0,0000	0,0392	0,0357	0,0350	0,0388	
0,0372	0,0378	0,0369	0,0395	0,0399	0,0392	0,0000	0,0406	0,0386	0,0405	
0,0347	0,0338	0,0315	0,0410	0,0331	0,0357	0,0406	0,0000	0,0362	0,0402	
0,0328	0,0316	0,0323	0,0333	0,0363	0,0350	0,0386	0,0362	0,0000	0,0415	
0,0386	0,0389	0,0397	0,0409	0,0398	0,0388	0,0405	0,0402	0,0415	0,0000	
alpha	se_alpha									
0,0007	0,0003									
beta	se_beta									
0,8867	0,0460									
nu	se_nu									
7,6310	0,2612									

ПОРТФЕЛЬ №7

c se_c
 -0,0615 0,0799
 0,0013 0,1198
 -0,0079 0,0699
 -0,0144 0,1162
 0,0922 0,0957
 0,0075 0,0626
 -0,0090 0,1215
 -0,0259 0,0729
 0,0279 0,0933
 0,0489 0,0762

Q
 0,0218 0,0272 -0,0322 0,0096 0,0246 -0,0717 -0,0381 -0,0408 0,0002 -0,0225
 -0,0245 0,0895 -0,0844 -0,0540 0,0707 -0,1081 -0,0228 0,0022 0,0093 0,0224
 -0,0443 -0,0250 0,1320 -0,0402 0,0207 -0,0859 -0,0363 -0,0289 -0,0187 0,0214
 -0,0075 -0,0199 -0,0310 0,0758 0,0372 -0,1519 -0,0298 0,0278 -0,0150 -0,0343
 0,0042 0,0219 -0,0255 0,0371 0,0634 -0,1005 -0,1018 -0,0300 -0,0460 0,0253
 0,0162 -0,0222 -0,0605 -0,0024 0,0100 -0,0549 -0,0096 0,0120 0,0028 -0,0061
 -0,0381 0,0373 -0,0756 0,0328 0,0030 -0,1863 0,1283 -0,0397 0,0330 -0,0519
 -0,0766 -0,0803 0,0536 0,0172 0,0490 -0,0026 0,0084 0,0581 0,0036 0,0046
 -0,0912 -0,0102 0,0772 0,0121 0,0400 -0,0735 -0,0516 0,0425 0,1130 0,0158
 0,0468 0,0665 -0,0685 -0,0505 -0,0179 -0,1282 -0,0259 0,0208 0,1216 0,0511

se_Q
 0,0920 0,0537 0,0938 0,0364 0,0313 0,0797 0,0273 0,0475 0,0446 0,0416
 0,0828 0,0639 0,0898 0,0350 0,0334 0,0868 0,0251 0,0501 0,0469 0,0308
 0,0718 0,0502 0,0810 0,0328 0,0298 0,0752 0,0244 0,0473 0,0376 0,0341
 0,0911 0,0690 0,0921 0,0481 0,0467 0,0908 0,0269 0,0712 0,0395 0,0470
 0,1194 0,0642 0,1128 0,0511 0,0451 0,0937 0,0358 0,0581 0,0447 0,0428
 0,0516 0,0389 0,0520 0,0255 0,0216 0,0578 0,0234 0,0334 0,0236 0,0258
 0,0820 0,0751 0,0837 0,0526 0,0441 0,0896 0,0453 0,0667 0,0519 0,0343
 0,0515 0,0471 0,0548 0,0301 0,0240 0,0483 0,0209 0,0504 0,0318 0,0303
 0,0785 0,0755 0,0765 0,0498 0,0404 0,0977 0,0286 0,0552 0,0477 0,0492
 0,0581 0,0479 0,0682 0,0412 0,0258 0,0729 0,0320 0,0487 0,0421 0,0537

OMEGA se_OMEGA
 0,2934 0,1212
 0,7312 0,2416
 0,3366 0,0925
 0,4638 0,1872
 0,2844 0,1395
 0,0553 0,0191
 1,4217 0,5322
 2,1946 1,1462
 0,5752 0,2128
 0,5424 0,3751

A se_A
 0,0562 0,0274
 0,0898 0,0243
 0,0681 0,0179
 0,0793 0,0241
 0,0532 0,0214
 0,0478 0,0140
 0,3001 0,1200
 0,2529 0,1212
 0,1216 0,0360

ПОРТФЕЛЬ №8

c se_c
 -0,0680 0,1402
 0,0131 0,2071
 0,1340 0,1088
 0,0486 0,1236
 0,0820 0,1302
 0,0089 0,0631
 -0,0033 0,1126
 -0,0096 0,0891
 0,0082 0,1175
 0,0688 0,0910

Q
 0,0497 -0,0541 -0,0117 -0,0216 0,0500 -0,0122 -0,0475 -0,0344 0,0155 -0,0186
 -0,0977 0,0761 -0,0868 0,0247 0,0768 -0,1007 -0,0174 0,0116 -0,0507 0,0208
 -0,0384 0,0003 0,1126 -0,0418 0,0383 -0,1008 -0,0445 -0,0271 -0,0307 0,0348
 -0,0843 -0,0007 0,0393 0,0357 0,0763 0,0096 -0,0405 0,0012 -0,0091 -0,0026
 0,0452 -0,0659 0,0488 -0,0372 0,0949 -0,0443 -0,1065 -0,0366 -0,0422 0,0437
 -0,0287 0,0429 -0,0326 -0,0329 0,0283 -0,0638 -0,0173 -0,0092 -0,0021 0,0024
 -0,1034 0,0931 -0,0353 0,0469 0,0137 -0,1652 0,1140 -0,0707 0,0273 -0,0513
 -0,0924 0,0217 -0,0173 0,0019 0,0626 -0,0188 -0,0008 0,0625 0,0109 -0,0045
 -0,0898 -0,0198 0,0596 0,0012 0,0621 -0,0237 -0,0566 0,0557 0,1061 0,0144
 0,0361 0,0740 -0,0348 -0,0554 -0,0149 -0,1345 -0,0376 0,0101 0,1182 0,0337

se_Q
 0,0636 0,0625 0,0846 0,0603 0,0407 0,1180 0,0340 0,0479 0,0397 0,0475
 0,0695 0,0734 0,0752 0,0836 0,0477 0,1117 0,0367 0,0555 0,0455 0,0399
 0,0585 0,0640 0,0614 0,0589 0,0431 0,0919 0,0252 0,0482 0,0356 0,0375
 0,0603 0,0681 0,0727 0,0757 0,0416 0,1055 0,0418 0,0599 0,0403 0,0500
 0,0781 0,0689 0,0642 0,0709 0,0496 0,0994 0,0426 0,0626 0,0475 0,0441
 0,0445 0,0453 0,0364 0,0447 0,0268 0,0657 0,0279 0,0345 0,0240 0,0290
 0,0785 0,0774 0,0562 0,0757 0,0475 0,0987 0,0551 0,0782 0,0474 0,0366
 0,0505 0,0519 0,0473 0,0455 0,0298 0,0643 0,0244 0,0612 0,0313 0,0368
 0,0642 0,0655 0,0645 0,0969 0,0432 0,1255 0,0318 0,0553 0,0455 0,0555
 0,0516 0,0474 0,0464 0,0406 0,0269 0,0765 0,0340 0,0638 0,0388 0,0524

OMEGA se_OMEGA
 0,2152 0,0743
 0,3868 0,1398
 0,1693 0,0571
 0,2627 0,1367
 0,2282 0,1117
 0,0453 0,0159
 1,2941 0,8231
 2,5494 3,6342
 0,5402 0,2009
 0,4619 0,2691

A se_A
 0,0480 0,0191
 0,0760 0,0210
 0,0501 0,0136
 0,0838 0,0348
 0,0479 0,0175
 0,0431 0,0125
 0,2565 0,1569
 0,2925 0,3243
 0,1223 0,0367

	0,2501	0,0893																		
B		se_B																		
	0,9184	0,0250																		
	0,8799	0,0307																		
	0,9250	0,0184																		
	0,8842	0,0433																		
	0,9272	0,0251																		
	0,9389	0,0149																		
	0,6539	0,1721																		
	0,3168	0,8175																		
	0,8308	0,0437																		
	0,7354	0,0915																		
S																				
	1,0000	0,7242	0,6055	0,6730	0,5263	0,5887	0,4484	0,4309	0,5196	0,3551										
	0,7242	1,0000	0,5963	0,6134	0,4974	0,6289	0,5057	0,4758	0,5062	0,3181										
	0,6055	0,5963	1,0000	0,5118	0,4706	0,5027	0,3941	0,3952	0,4668	0,2288										
	0,6730	0,6134	0,5118	1,0000	0,4922	0,4996	0,3614	0,3815	0,4790	0,3225										
	0,5263	0,4974	0,4706	0,4922	1,0000	0,4669	0,2882	0,3833	0,4059	0,2790										
	0,5887	0,6289	0,5027	0,4996	0,4669	1,0000	0,4293	0,4198	0,4431	0,3009										
	0,4484	0,5057	0,3941	0,3614	0,2882	0,4293	1,0000	0,3501	0,3623	0,2289										
	0,4309	0,4758	0,3952	0,3815	0,3833	0,4198	0,3501	1,0000	0,3543	0,2320										
	0,5196	0,5062	0,4668	0,4790	0,4059	0,4431	0,3623	0,3543	1,0000	0,2649										
	0,3551	0,3181	0,2288	0,3225	0,2790	0,3009	0,2289	0,2320	0,2649	1,0000										
	se_S																			
	0,0000	0,0220	0,0270	0,0243	0,0329	0,0271	0,0374	0,0351	0,0330	0,0387										
	0,0220	0,0000	0,0270	0,0294	0,0313	0,0257	0,0386	0,0351	0,0332	0,0402										
	0,0270	0,0270	0,0000	0,0306	0,0329	0,0312	0,0363	0,0344	0,0338	0,0401										
	0,0243	0,0294	0,0306	0,0000	0,0341	0,0328	0,0385	0,0369	0,0344	0,0394										
	0,0329	0,0313	0,0329	0,0341	0,0000	0,0347	0,0409	0,0347	0,0373	0,0407										
	0,0271	0,0257	0,0312	0,0328	0,0347	0,0000	0,0402	0,0364	0,0365	0,0388										
	0,0374	0,0386	0,0363	0,0385	0,0409	0,0402	0,0000	0,0431	0,0394	0,0417										
	0,0351	0,0351	0,0344	0,0369	0,0347	0,0364	0,0431	0,0000	0,0376	0,0429										
	0,0330	0,0332	0,0338	0,0344	0,0373	0,0365	0,0394	0,0376	0,0000	0,0423										
	0,0387	0,0402	0,0401	0,0394	0,0407	0,0388	0,0417	0,0429	0,0423	0,0000										
alpha		se_alpha																		
	0,0006	0,0002																		
beta		se_beta																		
	0,9123	0,0402																		
nu		se_nu																		
	7,6258	0,2596																		

ПОРТФЕЛЬ №9

c se_c
 -0,0256 0,0670
 -0,0216 0,0818
 -0,0253 0,0765
 -0,0250 0,1020
 0,0777 0,0992
 0,0118 0,0518
 -0,0175 0,0974
 -0,0240 0,0794
 0,0161 0,0894
 0,0512 0,0769

Q
 0,0918 -0,0143 -0,0595 0,0125 -0,0040 -0,1289 -0,0396 0,0261 0,0235 -0,0305
 -0,0441 0,0791 -0,0680 -0,0591 0,0556 -0,0931 -0,0195 0,0059 0,0244 0,0112
 -0,0144 -0,0388 0,1240 -0,0473 0,0107 -0,0953 -0,0294 -0,0225 -0,0057 0,0097
 -0,0458 -0,0134 -0,0049 0,0695 0,0304 -0,1476 -0,0255 0,0263 -0,0019 -0,0453
 -0,1053 0,0295 0,0416 0,0310 0,0632 -0,0806 -0,0963 -0,0444 -0,0361 0,0109
 0,0839 -0,0300 -0,0870 -0,0077 -0,0017 -0,0656 -0,0057 0,0142 0,0106 -0,0082
 -0,0720 0,0359 -0,0436 0,0349 -0,0120 -0,1788 0,1375 -0,0401 0,0307 -0,0534
 -0,1077 -0,0792 0,0709 0,0123 0,0412 0,0116 0,0105 0,0519 0,0073 0,0055
 -0,0298 -0,0251 0,0466 0,0051 0,0294 -0,0800 -0,0527 0,0459 0,1236 0,0034
 0,0100 0,0703 -0,0398 -0,0517 -0,0177 -0,1184 -0,0261 0,0221 0,1220 0,0530

se_Q
 0,0754 0,0509 0,0782 0,0346 0,0291 0,0736 0,0282 0,0573 0,0339 0,0377
 0,0935 0,0708 0,0940 0,0379 0,0328 0,0889 0,0252 0,0722 0,0435 0,0369
 0,0818 0,0592 0,0855 0,0344 0,0335 0,0760 0,0253 0,0614 0,0402 0,0414
 0,1005 0,0819 0,1452 0,0490 0,0450 0,0888 0,0267 0,0911 0,0477 0,0523
 0,0984 0,0696 0,1131 0,0512 0,0460 0,0987 0,0372 0,0660 0,0460 0,0516
 0,0557 0,0399 0,0621 0,0252 0,0207 0,0572 0,0255 0,0444 0,0276 0,0301
 0,0966 0,0762 0,0899 0,0552 0,0370 0,0854 0,0464 0,0710 0,0527 0,0376
 0,0584 0,0510 0,0551 0,0323 0,0244 0,0599 0,0183 0,0521 0,0345 0,0340
 0,0953 0,0763 0,0898 0,0471 0,0416 0,1003 0,0299 0,0699 0,0509 0,0516
 0,1243 0,0522 0,0974 0,0420 0,0262 0,0731 0,0339 0,0497 0,0441 0,0529

OMEGA se_OMEGA

0,1706 0,0710
 0,7979 0,2722
 0,3386 0,0890
 0,4858 0,1950
 0,2880 0,1516
 0,0587 0,0185
 1,3798 0,5481
 2,0798 0,8940
 0,5592 0,1944
 0,5183 0,3358

A se_A
 0,0511 0,0240
 0,0979 0,0285
 0,0671 0,0182
 0,0866 0,0257
 0,0561 0,0248
 0,0517 0,0137
 0,3018 0,1264
 0,2258 0,0927
 0,1214 0,0335

```

0,2560 0,1019
B      se_B
0,9170 0,0322
0,8090 0,0496
0,8822 0,0251
0,8769 0,0373
0,9152 0,0347
0,9269 0,0159
0,6276 0,1077
0,4406 0,1979
0,8296 0,0407
0,7221 0,1109
S
1,0000 0,6795 0,7719 0,5593 0,5192 0,5969 0,4202 0,4114 0,4769 0,2997
0,6795 1,0000 0,7248 0,5873 0,4810 0,6210 0,4695 0,4562 0,4769 0,3049
0,7719 0,7248 1,0000 0,5909 0,5151 0,6232 0,4526 0,4821 0,5437 0,3316
0,5593 0,5873 0,5909 1,0000 0,4723 0,5249 0,3825 0,3663 0,4939 0,3260
0,5192 0,4810 0,5151 0,4723 1,0000 0,4763 0,2890 0,3804 0,4054 0,2772
0,5969 0,6210 0,6232 0,5249 0,4763 1,0000 0,4343 0,4228 0,4530 0,3095
0,4202 0,4695 0,4526 0,3825 0,2890 0,4343 1,0000 0,3567 0,3640 0,2371
0,4114 0,4562 0,4821 0,3663 0,3804 0,4228 0,3567 1,0000 0,3710 0,2392
0,4769 0,4769 0,5437 0,4939 0,4054 0,4530 0,3640 0,3710 1,0000 0,2758
0,2997 0,3049 0,3316 0,3260 0,2772 0,3095 0,2371 0,2392 0,2758 1,0000
se_S
0,0000 0,0245 0,0186 0,0307 0,0311 0,0280 0,0370 0,0346 0,0326 0,0387
0,0245 0,0000 0,0206 0,0284 0,0343 0,0266 0,0353 0,0334 0,0333 0,0385
0,0186 0,0206 0,0000 0,0298 0,0312 0,0282 0,0366 0,0316 0,0326 0,0408
0,0307 0,0284 0,0298 0,0000 0,0326 0,0305 0,0390 0,0408 0,0333 0,0411
0,0311 0,0343 0,0312 0,0326 0,0000 0,0334 0,0404 0,0325 0,0360 0,0403
0,0280 0,0266 0,0282 0,0305 0,0334 0,0000 0,0387 0,0364 0,0348 0,0391
0,0370 0,0353 0,0366 0,0390 0,0404 0,0387 0,0000 0,0397 0,0376 0,0402
0,0346 0,0334 0,0316 0,0408 0,0325 0,0364 0,0397 0,0000 0,0363 0,0406
0,0326 0,0333 0,0326 0,0333 0,0360 0,0348 0,0376 0,0363 0,0000 0,0418
0,0387 0,0385 0,0408 0,0411 0,0403 0,0391 0,0402 0,0406 0,0418 0,0000
alpha se_alpha
0,0008 0,0003
beta  se_beta
0,8689 0,0397
nu    se_nu
7,5755 0,2568

```

ПОРТФЕЛЬ №10

c	se_c
-0,0229	0,0677
0,0044	0,0818
0,1232	0,0743
0,0603	0,0762
0,0616	0,0916
0,0149	0,0536
0,0038	0,1214
-0,0085	0,1352
0,0124	0,0889
0,0652	0,0811

Q

0,1121	-0,0564	-0,0330	-0,0113	0,0320	-0,1150	-0,0390	0,0127	0,0269	-0,0275
-0,0056	0,0616	-0,0996	0,0027	0,0735	-0,1325	-0,0095	0,0011	-0,0513	0,0174
-0,0583	-0,0010	0,1093	-0,0340	0,0369	-0,0912	-0,0420	-0,0332	-0,0282	0,0378
0,0224	-0,0231	0,0163	0,0047	0,0787	0,0023	-0,0384	-0,0037	-0,0107	-0,0055
-0,0242	-0,0476	0,0513	-0,0163	0,1095	-0,0360	-0,0966	-0,0580	-0,0338	0,0360
0,0555	0,0297	-0,0459	-0,0486	0,0245	-0,0855	-0,0132	-0,0167	0,0021	-0,0028
-0,0683	0,0933	-0,0257	0,0173	0,0237	-0,1727	0,1188	-0,0906	0,0305	-0,0581
-0,0832	0,0277	-0,0147	-0,0126	0,0589	-0,0195	0,0027	0,0480	0,0080	0,0002
0,0156	-0,0408	0,0458	-0,0237	0,0583	-0,0466	-0,0550	0,0459	0,1107	0,0007
-0,0050	0,0867	-0,0331	-0,0441	-0,0088	-0,1205	-0,0358	0,0068	0,1205	0,0443

se_Q

0,0616	0,0525	0,0472	0,1166	0,0396	0,0882	0,0449	0,0667	0,0301	0,0386
0,1028	0,0739	0,0634	0,1310	0,0487	0,1128	0,0625	0,1043	0,0475	0,0472
0,0672	0,0611	0,0589	0,1223	0,0461	0,0829	0,0381	0,0626	0,0362	0,0429
0,0888	0,0643	0,0784	0,1279	0,0423	0,1525	0,0560	0,0714	0,0410	0,0510
0,1038	0,0871	0,0716	0,1525	0,0606	0,1012	0,0578	0,0772	0,0461	0,0529
0,0501	0,0522	0,0336	0,0786	0,0298	0,0654	0,0432	0,0446	0,0240	0,0291
0,1343	0,0743	0,0780	0,1122	0,0646	0,0793	0,0559	0,1176	0,0558	0,0493
0,0475	0,0448	0,0440	0,0552	0,0289	0,0537	0,0242	0,0605	0,0380	0,0364
0,0778	0,0687	0,0645	0,1472	0,0490	0,1053	0,0462	0,0689	0,0466	0,0645
0,0869	0,0529	0,0470	0,0454	0,0268	0,0794	0,0425	0,0526	0,0411	0,0636

OMEGA se_OMEGA

0,1207	0,0566
0,4165	0,3022
0,1619	0,0838
0,2459	0,1605
0,2129	0,1459
0,0451	0,0216
0,5109	2,6058
2,1196	1,2154
0,5171	0,2279
0,4395	0,2605

A se_A

0,0487	0,0163
0,0849	0,0347
0,0509	0,0149
0,0790	0,0313
0,0487	0,0215
0,0445	0,0127
0,1156	0,4635
0,2532	0,1304
0,1234	0,0349

ПОРТФЕЛЬ №11

c	se_c
-0,0497	0,0767
0,0086	0,0820
0,1475	0,0747
0,0602	0,0756
0,0933	0,0898
0,0137	0,0493
-0,0041	0,1006
-0,0181	0,0794
0,0105	0,1009
0,0815	0,0771

Q

0,0121	0,0070	-0,0111	-0,0367	0,0439	-0,0380	-0,0437	-0,0307	0,0190	-0,0395
-0,0846	0,0567	-0,0833	0,0050	0,0805	-0,0874	-0,0229	0,0064	0,0112	0,0135
-0,0608	0,0410	0,1127	-0,0527	0,0319	-0,1119	-0,0395	-0,0244	-0,0271	0,0219
-0,1067	0,0378	0,0340	0,0159	0,0734	-0,0010	-0,0291	0,0000	-0,0013	-0,0213
0,0113	0,0334	0,0400	-0,0635	0,0737	-0,0850	-0,1036	-0,0383	-0,0338	0,0310
-0,0087	-0,0285	-0,0148	-0,0304	0,0239	-0,0450	-0,0066	0,0119	0,0028	-0,0108
-0,0775	-0,0088	-0,0113	0,0604	0,0119	-0,1431	0,1343	-0,0501	0,0287	-0,0683
-0,0735	-0,0624	-0,0089	0,0210	0,0551	0,0207	0,0081	0,0789	0,0142	-0,0126
-0,0896	-0,0165	0,0554	-0,0112	0,0537	-0,0255	-0,0502	0,0640	0,1128	0,0100
0,0434	0,0435	-0,0254	-0,0560	-0,0164	-0,1341	-0,0294	0,0165	0,1244	0,0254

se_Q

0,0638	0,0763	0,0538	0,0550	0,0333	0,0778	0,0308	0,0399	0,0387	0,0388
0,0627	0,0788	0,0536	0,0613	0,0380	0,0918	0,0272	0,0458	0,0367	0,0299
0,0543	0,0657	0,0525	0,0557	0,0341	0,0763	0,0220	0,0422	0,0355	0,0322
0,0623	0,0809	0,0613	0,0665	0,0403	0,0840	0,0374	0,0485	0,0393	0,0382
0,0750	0,0788	0,0612	0,0657	0,0471	0,0925	0,0397	0,0551	0,0471	0,0417
0,0418	0,0470	0,0313	0,0388	0,0235	0,0580	0,0245	0,0314	0,0234	0,0249
0,0802	0,0839	0,0587	0,0719	0,0403	0,0930	0,0496	0,0650	0,0483	0,0364
0,0469	0,0529	0,0454	0,0416	0,0262	0,0584	0,0226	0,0665	0,0297	0,0322
0,0662	0,0871	0,0612	0,0730	0,0414	0,1078	0,0317	0,0506	0,0461	0,0496
0,0528	0,0488	0,0416	0,0410	0,0262	0,0703	0,0322	0,0449	0,0390	0,0541

OMEGA se_OMEGA

0,2506	0,0833
0,5457	0,2117
0,1789	0,0593
0,3040	0,1327
0,2353	0,1089
0,0467	0,0170
1,3537	0,6433
2,6127	4,6128
0,5516	0,1969
0,5008	0,3046

A se_A

0,0511	0,0192
0,0737	0,0238
0,0512	0,0139
0,0957	0,0322
0,0488	0,0164
0,0448	0,0138
0,2825	0,1379
0,3017	0,4021
0,1247	0,0357

ПОРТФЕЛЬ №12

c	se_c
-0,0181	0,3554
-0,0042	0,3701
0,1355	0,3646
0,0688	0,3809
0,0759	0,3988
0,0179	0,2327
-0,0114	0,3787
-0,0183	0,1770
0,0075	0,8546
0,0755	0,2190

Q

0,0939	-0,0234	-0,0361	-0,0201	0,0175	-0,1346	-0,0353	0,0209	0,0263	-0,0439
-0,0431	0,0447	-0,1029	-0,0063	0,0715	-0,0919	-0,0171	0,0058	0,0159	0,0073
-0,0661	0,0319	0,1023	-0,0458	0,0253	-0,1013	-0,0378	-0,0241	-0,0278	0,0179
-0,0005	0,0144	0,0081	-0,0176	0,0723	-0,0144	-0,0274	0,0010	-0,0056	-0,0254
-0,0593	0,0481	0,0363	-0,0473	0,0840	-0,0698	-0,0922	-0,0510	-0,0295	0,0181
0,0667	-0,0408	-0,0328	-0,0418	0,0182	-0,0666	-0,0009	0,0099	0,0044	-0,0153
-0,0681	-0,0106	-0,0126	0,0548	0,0050	-0,1461	0,1481	-0,0489	0,0213	-0,0697
-0,0686	-0,0603	-0,0087	0,0109	0,0494	0,0259	0,0103	0,0699	0,0119	-0,0099
0,0107	-0,0381	0,0382	-0,0325	0,0474	-0,0560	-0,0477	0,0605	0,1145	-0,0034
-0,0007	0,0608	-0,0289	-0,0411	-0,0155	-0,1200	-0,0293	0,0171	0,1248	0,0333

se_Q

0,0805	0,0660	0,0611	0,1339	0,0496	0,0744	0,0429	0,0738	0,0605	0,0550
0,1047	0,0854	0,0766	0,1816	0,0701	0,0928	0,0473	0,1017	0,0833	0,0585
0,0887	0,0664	0,0659	0,1312	0,0696	0,0760	0,0356	0,0504	0,0510	0,0735
0,1709	0,1293	0,0670	0,1685	0,0637	0,0961	0,0606	0,0671	0,0745	0,0677
0,1118	0,0816	0,0639	0,1247	0,0604	0,1108	0,0568	0,0693	0,0501	0,0895
0,0523	0,0398	0,0467	0,0899	0,0419	0,0597	0,0348	0,0617	0,0428	0,0474
0,0846	0,1267	0,1651	0,0879	0,1250	0,0876	0,0528	0,0813	0,0690	0,0398
0,0566	0,0500	0,0607	0,0345	0,0366	0,0550	0,0245	0,0696	0,0434	0,0317
0,0831	0,0735	0,0757	0,2095	0,0727	0,0962	0,0477	0,0610	0,0724	0,0655
0,0963	0,0634	0,0480	0,0725	0,0267	0,0723	0,0455	0,0485	0,0529	0,0829

OMEGA se_OMEGA

0,1432	0,0493
0,5397	0,2561
0,1781	0,0703
0,2897	0,1261
0,2440	0,1285
0,0486	0,0190
1,3278	0,6680
2,3325	1,7824
0,5521	0,1892
0,4889	0,2877

A se_A

0,0494	0,0192
0,0750	0,0269
0,0512	0,0155
0,0900	0,0275
0,0508	0,0198
0,0456	0,0143
0,2855	0,1451
0,2700	0,1702
0,1267	0,0344


```

0,2491 0,0870
B      se_B
0,9232 0,0234
0,8582 0,0498
0,9234 0,0216
0,8784 0,0327
0,9236 0,0276
0,9354 0,0171
0,6384 0,1398
0,3692 0,4018
0,8269 0,0399
0,7349 0,0921
S
1,0000 0,6723 0,6016 0,6095 0,5242 0,5865 0,4213 0,3970 0,4744 0,2959
0,6723 1,0000 0,5874 0,6177 0,4793 0,6124 0,4663 0,4385 0,4660 0,2980
0,6016 0,5874 1,0000 0,5192 0,4685 0,5145 0,3935 0,3942 0,4846 0,2395
0,6095 0,6177 0,5192 1,0000 0,4863 0,5051 0,3595 0,3778 0,4861 0,3233
0,5242 0,4793 0,4685 0,4863 1,0000 0,4745 0,2892 0,3724 0,4084 0,2748
0,5865 0,6124 0,5145 0,5051 0,4745 1,0000 0,4347 0,4102 0,4507 0,3130
0,4213 0,4663 0,3935 0,3595 0,2892 0,4347 1,0000 0,3384 0,3607 0,2311
0,3970 0,4385 0,3942 0,3778 0,3724 0,4102 0,3384 1,0000 0,3548 0,2310
0,4744 0,4660 0,4846 0,4861 0,4084 0,4507 0,3607 0,3548 1,0000 0,2700
0,2959 0,2980 0,2395 0,3233 0,2748 0,3130 0,2311 0,2310 0,2700 1,0000
se_S
0,0000 0,0251 0,0274 0,0274 0,0321 0,0286 0,0372 0,0352 0,0331 0,0411
0,0251 0,0000 0,0282 0,0291 0,0353 0,0286 0,0338 0,0358 0,0338 0,0422
0,0274 0,0282 0,0000 0,0305 0,0334 0,0309 0,0359 0,0332 0,0323 0,0414
0,0274 0,0291 0,0305 0,0000 0,0327 0,0319 0,0377 0,0384 0,0319 0,0420
0,0321 0,0353 0,0334 0,0327 0,0000 0,0337 0,0419 0,0337 0,0356 0,0417
0,0286 0,0286 0,0309 0,0319 0,0337 0,0000 0,0385 0,0376 0,0348 0,0410
0,0372 0,0338 0,0359 0,0377 0,0419 0,0385 0,0000 0,0418 0,0370 0,0413
0,0352 0,0358 0,0332 0,0384 0,0337 0,0376 0,0418 0,0000 0,0367 0,0412
0,0331 0,0338 0,0323 0,0319 0,0356 0,0348 0,0370 0,0367 0,0000 0,0424
0,0411 0,0422 0,0414 0,0420 0,0417 0,0410 0,0413 0,0412 0,0424 0,0000
alpha se_alpha
0,0007 0,0003
beta  se_beta
0,8477 0,0644
nu    se_nu
7,6046 0,2587

```

ПОРТФЕЛЬ №13

c	se_c
-0,0883	0,1148
-0,0094	0,1357
0,1302	0,1025
-0,0396	0,1410
0,0605	0,1327
-0,0020	0,0617
-0,0124	0,1498
-0,0227	0,1086
0,0017	0,2024
0,0442	0,0877

Q

0,0522	-0,0553	-0,0177	0,0094	0,0317	-0,0271	-0,0369	-0,0234	0,0024	-0,0123
-0,0493	0,0906	-0,0768	-0,0689	0,0695	-0,0902	-0,0089	0,0294	-0,0471	0,0255
-0,0550	-0,0210	0,1008	0,0606	0,0124	-0,1174	-0,0430	-0,0191	-0,0477	0,0368
-0,0227	0,0079	-0,0242	0,0761	0,0502	-0,1329	-0,0345	0,0291	-0,0308	-0,0209
0,0278	-0,0672	0,0365	0,0338	0,0763	-0,0618	-0,1029	-0,0284	-0,0611	0,0422
-0,0290	0,0438	-0,0333	-0,0102	0,0169	-0,0703	-0,0175	-0,0060	-0,0063	0,0046
-0,0832	0,1024	-0,0300	0,0185	0,0108	-0,1887	0,1100	-0,0554	0,0254	-0,0442
-0,0834	0,0250	-0,0251	0,0175	0,0548	-0,0272	0,0032	0,0599	0,0060	0,0081
-0,0780	-0,0203	0,0371	0,0269	0,0511	-0,0357	-0,0571	0,0581	0,1065	0,0186
0,0282	0,0799	-0,0383	-0,0533	-0,0110	-0,1458	-0,0275	0,0136	0,1183	0,0467

se_Q

0,0574	0,0594	0,0581	0,0408	0,0334	0,0691	0,0297	0,0441	0,0438	0,0388
0,0605	0,0723	0,0626	0,0477	0,0408	0,0800	0,0326	0,0530	0,0528	0,0363
0,0520	0,0653	0,0549	0,0417	0,0340	0,0676	0,0216	0,0455	0,0373	0,0361
0,0681	0,1003	0,0613	0,0522	0,0456	0,0840	0,0278	0,0630	0,0438	0,0439
0,0721	0,0766	0,0656	0,0511	0,0455	0,0824	0,0381	0,0564	0,0522	0,0382
0,0392	0,0450	0,0358	0,0288	0,0225	0,0526	0,0260	0,0331	0,0255	0,0252
0,0678	0,0719	0,0577	0,0518	0,0374	0,0800	0,0495	0,0760	0,0477	0,0348
0,0409	0,0421	0,0365	0,0304	0,0249	0,0477	0,0216	0,0506	0,0339	0,0340
0,0614	0,0710	0,0617	0,0487	0,0384	0,0875	0,0278	0,0527	0,0486	0,0448
0,0482	0,0496	0,0414	0,0402	0,0258	0,0710	0,0320	0,0471	0,0408	0,0527

OMEGA se_OMEGA

0,1731	0,0703
0,2963	0,1308
0,1617	0,0573
0,3389	0,1193
0,1947	0,1036
0,0437	0,0147
1,2456	0,7713
2,0088	1,0263
0,5055	0,1966
0,4546	0,2774

A	se_A
0,0422	0,0193
0,0632	0,0228
0,0502	0,0148
0,0645	0,0161
0,0430	0,0174
0,0418	0,0117
0,2456	0,1553
0,2451	0,1142
0,1139	0,0357

0,2482	0,0949								
B	se_B								
0,9303	0,0256								
0,9017	0,0339								
0,9257	0,0200								
0,9074	0,0229								
0,9349	0,0251								
0,9411	0,0138								
0,6660	0,1676								
0,4396	0,2354								
0,8401	0,0448								
0,7347	0,0988								
S									
1,0000	0,7263	0,6089	0,5980	0,5312	0,5950	0,4522	0,4297	0,5254	0,3651
0,7263	1,0000	0,6034	0,5882	0,5002	0,6345	0,5110	0,4793	0,5147	0,3178
0,6089	0,6034	1,0000	0,5341	0,4719	0,5112	0,3960	0,3953	0,4738	0,2401
0,5980	0,5882	0,5341	1,0000	0,4750	0,5219	0,3801	0,3590	0,4987	0,3212
0,5312	0,5002	0,4719	0,4750	1,0000	0,4736	0,2967	0,3828	0,4105	0,2844
0,5950	0,6345	0,5112	0,5219	0,4736	1,0000	0,4370	0,4211	0,4482	0,3020
0,4522	0,5110	0,3960	0,3801	0,2967	0,4370	1,0000	0,3520	0,3676	0,2396
0,4297	0,4793	0,3953	0,3590	0,3828	0,4211	0,3520	1,0000	0,3630	0,2341
0,5254	0,5147	0,4738	0,4987	0,4105	0,4482	0,3676	0,3630	1,0000	0,2710
0,3651	0,3178	0,2401	0,3212	0,2844	0,3020	0,2396	0,2341	0,2710	1,0000
se_S									
0,0000	0,0210	0,0261	0,0266	0,0316	0,0257	0,0370	0,0345	0,0314	0,0380
0,0210	0,0000	0,0259	0,0296	0,0300	0,0248	0,0375	0,0341	0,0317	0,0392
0,0261	0,0259	0,0000	0,0298	0,0324	0,0300	0,0351	0,0335	0,0322	0,0394
0,0266	0,0296	0,0298	0,0000	0,0324	0,0302	0,0389	0,0405	0,0326	0,0410
0,0316	0,0300	0,0324	0,0324	0,0000	0,0333	0,0393	0,0329	0,0358	0,0403
0,0257	0,0248	0,0300	0,0302	0,0333	0,0000	0,0393	0,0351	0,0349	0,0392
0,0370	0,0375	0,0351	0,0389	0,0393	0,0393	0,0000	0,0403	0,0385	0,0411
0,0345	0,0341	0,0335	0,0405	0,0329	0,0351	0,0403	0,0000	0,0367	0,0412
0,0314	0,0317	0,0322	0,0326	0,0358	0,0349	0,0385	0,0367	0,0000	0,0413
0,0380	0,0392	0,0394	0,0410	0,0403	0,0392	0,0411	0,0412	0,0413	0,0000
alpha	se_alpha								
0,0005	0,0002								
beta	se_beta								
0,9062	0,0430								
nu	se_nu								
7,7130	0,2666								

ПОРТФЕЛЬ №14

c	se_c
-0,0421	0,0652
-0,0209	0,0814
0,1189	0,0742
-0,0444	0,0982
0,0453	0,0949
0,0033	0,0503
-0,0158	0,1046
-0,0236	0,0824
-0,0034	0,0840
0,0432	0,0758

Q

0,0921	-0,0632	-0,0393	0,0163	0,0193	-0,1208	-0,0375	0,0323	0,0236	-0,0177
-0,0089	0,0810	-0,0894	-0,0736	0,0693	-0,1240	-0,0057	0,0223	-0,0371	0,0241
-0,0897	-0,0207	0,0975	0,0539	0,0149	-0,1034	-0,0442	-0,0238	-0,0390	0,0406
-0,0471	0,0120	-0,0327	0,0754	0,0528	-0,1311	-0,0317	0,0199	-0,0178	-0,0204
-0,0579	-0,0504	0,0441	0,0383	0,0925	-0,0472	-0,0968	-0,0443	-0,0483	0,0403
0,0352	0,0303	-0,0452	-0,0174	0,0119	-0,0920	-0,0164	-0,0079	-0,0026	0,0007
-0,0887	0,0900	-0,0288	0,0183	0,0069	-0,1878	0,1227	-0,0534	0,0213	-0,0404
-0,0960	0,0298	-0,0230	0,0080	0,0518	-0,0226	0,0054	0,0475	0,0110	0,0117
-0,0166	-0,0362	0,0270	0,0156	0,0480	-0,0606	-0,0584	0,0509	0,1110	0,0102
-0,0080	0,0896	-0,0402	-0,0490	-0,0040	-0,1388	-0,0286	0,0132	0,1203	0,0578

se_Q

0,0617	0,0460	0,0432	0,0329	0,0318	0,0685	0,0261	0,0424	0,0281	0,0287
0,0973	0,0673	0,0589	0,0457	0,0435	0,0865	0,0318	0,0553	0,0469	0,0333
0,0646	0,0535	0,0534	0,0416	0,0359	0,0708	0,0206	0,0449	0,0324	0,0344
0,0800	0,0744	0,0598	0,0510	0,0468	0,0873	0,0263	0,0718	0,0375	0,0409
0,0789	0,0675	0,0615	0,0528	0,0472	0,0944	0,0367	0,0584	0,0453	0,0363
0,0460	0,0396	0,0344	0,0275	0,0254	0,0562	0,0254	0,0335	0,0226	0,0247
0,0855	0,0628	0,0573	0,0567	0,0363	0,0836	0,0496	0,0736	0,0441	0,0322
0,0472	0,0402	0,0414	0,0327	0,0266	0,0565	0,0201	0,0501	0,0341	0,0321
0,0677	0,0585	0,0594	0,0492	0,0401	0,0921	0,0274	0,0534	0,0446	0,0417
0,0575	0,0495	0,0433	0,0415	0,0256	0,0752	0,0339	0,0595	0,0410	0,0506

OMEGA se_OMEGA

0,1023	0,0316
0,3739	0,1729
0,1669	0,0670
0,3623	0,1312
0,1986	0,1154
0,0468	0,0154
1,3099	0,6475
1,9027	0,7446
0,4978	0,1836
0,4441	0,2614

A	se_A
0,0462	0,0150
0,0812	0,0306
0,0536	0,0168
0,0709	0,0181
0,0461	0,0211
0,0447	0,0125
0,2716	0,1365
0,2313	0,0890
0,1155	0,0330

```

0,2444 0,0869
B      se_B
0,9333 0,0167
0,8768 0,0442
0,9218 0,0233
0,8997 0,0258
0,9326 0,0293
0,9372 0,0147
0,6406 0,1370
0,4665 0,1667
0,8389 0,0407
0,7400 0,0904
S
1,0000 0,6830 0,6028 0,5581 0,5203 0,5958 0,4267 0,4092 0,4787 0,3001
0,6830 1,0000 0,6029 0,5889 0,5082 0,6381 0,5026 0,4789 0,5194 0,3255
0,6028 0,6029 1,0000 0,5342 0,4717 0,5193 0,3939 0,3983 0,4846 0,2439
0,5581 0,5889 0,5342 1,0000 0,4801 0,5275 0,3812 0,3628 0,4976 0,3240
0,5203 0,5082 0,4717 0,4801 1,0000 0,4807 0,2975 0,3817 0,4130 0,2842
0,5958 0,6381 0,5193 0,5275 0,4807 1,0000 0,4359 0,4242 0,4529 0,3059
0,4267 0,5026 0,3939 0,3812 0,2975 0,4359 1,0000 0,3475 0,3640 0,2328
0,4092 0,4789 0,3983 0,3628 0,3817 0,4242 0,3475 1,0000 0,3672 0,2301
0,4787 0,5194 0,4846 0,4976 0,4130 0,4529 0,3640 0,3672 1,0000 0,2751
0,3001 0,3255 0,2439 0,3240 0,2842 0,3059 0,2328 0,2301 0,2751 1,0000
se_S
0,0000 0,0234 0,0265 0,0300 0,0311 0,0279 0,0365 0,0340 0,0323 0,0382
0,0234 0,0000 0,0260 0,0290 0,0301 0,0244 0,0371 0,0341 0,0309 0,0383
0,0265 0,0260 0,0000 0,0295 0,0324 0,0298 0,0350 0,0328 0,0315 0,0391
0,0300 0,0290 0,0295 0,0000 0,0323 0,0298 0,0383 0,0403 0,0325 0,0406
0,0311 0,0301 0,0324 0,0323 0,0000 0,0331 0,0398 0,0329 0,0357 0,0397
0,0279 0,0244 0,0298 0,0298 0,0331 0,0000 0,0384 0,0354 0,0344 0,0387
0,0365 0,0371 0,0350 0,0383 0,0398 0,0384 0,0000 0,0404 0,0379 0,0405
0,0340 0,0341 0,0328 0,0403 0,0329 0,0354 0,0404 0,0000 0,0361 0,0401
0,0323 0,0309 0,0315 0,0325 0,0357 0,0344 0,0379 0,0361 0,0000 0,0404
0,0382 0,0383 0,0391 0,0406 0,0397 0,0387 0,0405 0,0401 0,0404 0,0000
alpha  se_alpha
0,0006 0,0003
beta   se_beta
0,8794 0,0579
nu     se_nu
7,7409 0,2734

```

ПОРТФЕЛЬ №15

c	se_c
-0,0675	0,0738
-0,0045	0,0783
0,1414	0,0749
-0,0214	0,0926
0,0690	0,0939
0,0035	0,0485
-0,0085	0,0944
-0,0311	0,0701
0,0030	0,1081
0,0564	0,0737

Q

0,0117	0,0116	-0,0175	-0,0014	0,0245	-0,0482	-0,0349	-0,0239	0,0083	-0,0322
-0,0442	0,0657	-0,0889	-0,0505	0,0763	-0,0736	-0,0208	0,0129	0,0185	0,0226
-0,0765	0,0221	0,0972	0,0527	0,0044	-0,1245	-0,0389	-0,0188	-0,0432	0,0233
-0,0105	-0,0279	-0,0173	0,0645	0,0345	-0,1247	-0,0282	0,0454	-0,0143	-0,0437
-0,0057	0,0176	0,0278	0,0236	0,0541	-0,1003	-0,1013	-0,0311	-0,0495	0,0323
-0,0061	-0,0300	-0,0181	-0,0063	0,0126	-0,0504	-0,0088	0,0123	0,0023	-0,0093
-0,0552	0,0139	-0,0087	0,0249	0,0043	-0,1650	0,1237	-0,0350	0,0288	-0,0609
-0,0475	-0,0689	-0,0180	0,0215	0,0459	0,0172	0,0099	0,0759	0,0139	0,0036
-0,0738	-0,0139	0,0362	0,0089	0,0406	-0,0357	-0,0513	0,0625	0,1171	0,0162
0,0375	0,0520	-0,0282	-0,0548	-0,0141	-0,1449	-0,0220	0,0221	0,1246	0,0379

se_Q

0,0671	0,0501	0,0479	0,0391	0,0321	0,0661	0,0267	0,0433	0,0367	0,0371
0,0607	0,0584	0,0525	0,0388	0,0359	0,0813	0,0243	0,0478	0,0373	0,0305
0,0544	0,0467	0,0476	0,0400	0,0328	0,0643	0,0193	0,0432	0,0340	0,0311
0,0733	0,0625	0,0597	0,0511	0,0436	0,0778	0,0257	0,0626	0,0387	0,0426
0,0754	0,0588	0,0595	0,0518	0,0447	0,0842	0,0359	0,0543	0,0448	0,0393
0,0396	0,0357	0,0316	0,0273	0,0219	0,0525	0,0233	0,0299	0,0228	0,0241
0,0748	0,0692	0,0574	0,0538	0,0372	0,0816	0,0466	0,0638	0,0486	0,0343
0,0399	0,0461	0,0360	0,0303	0,0235	0,0510	0,0203	0,0497	0,0320	0,0298
0,0618	0,0589	0,0597	0,0484	0,0373	0,0875	0,0287	0,0497	0,0454	0,0464
0,0489	0,0469	0,0415	0,0421	0,0256	0,0691	0,0321	0,0460	0,0405	0,0528

OMEGA se_OMEGA

0,2223	0,0826
0,4878	0,2294
0,1757	0,0630
0,3887	0,1397
0,2172	0,1077
0,0473	0,0167
1,4033	0,5508
2,0927	1,0446
0,5285	0,1999
0,5027	0,3370

A se_A

0,0483	0,0194
0,0692	0,0245
0,0536	0,0152
0,0690	0,0176
0,0463	0,0170
0,0449	0,0132
0,2866	0,1208
0,2518	0,1133
0,1189	0,0356

```

0,2640 0,1111
B      se_B
0,9196 0,0261
0,8699 0,0469
0,9223 0,0205
0,9007 0,0255
0,9307 0,0244
0,9374 0,0155
0,6353 0,1077
0,4268 0,2349
0,8363 0,0434
0,7209 0,1156
S
1,0000 0,7036 0,6142 0,6010 0,5320 0,5913 0,4505 0,4231 0,5255 0,3577
0,7036 1,0000 0,5909 0,5775 0,4804 0,6162 0,4809 0,4503 0,4686 0,3015
0,6142 0,5909 1,0000 0,5376 0,4717 0,5112 0,3977 0,3946 0,4762 0,2448
0,6010 0,5775 0,5376 1,0000 0,4742 0,5233 0,3860 0,3565 0,4986 0,3231
0,5320 0,4804 0,4717 0,4742 1,0000 0,4715 0,2951 0,3781 0,4107 0,2813
0,5913 0,6162 0,5112 0,5233 0,4715 1,0000 0,4435 0,4156 0,4495 0,3097
0,4505 0,4809 0,3977 0,3860 0,2951 0,4435 1,0000 0,3504 0,3690 0,2470
0,4231 0,4503 0,3946 0,3565 0,3781 0,4156 0,3504 1,0000 0,3634 0,2393
0,5255 0,4686 0,4762 0,4986 0,4107 0,4495 0,3690 0,3634 1,0000 0,2731
0,3577 0,3015 0,2448 0,3231 0,2813 0,3097 0,2470 0,2393 0,2731 1,0000
se_S
0,0000 0,0226 0,0260 0,0266 0,0316 0,0260 0,0360 0,0347 0,0315 0,0384
0,0226 0,0000 0,0274 0,0287 0,0337 0,0271 0,0347 0,0335 0,0334 0,0392
0,0260 0,0274 0,0000 0,0299 0,0329 0,0303 0,0358 0,0335 0,0321 0,0400
0,0266 0,0287 0,0299 0,0000 0,0326 0,0301 0,0385 0,0407 0,0330 0,0412
0,0316 0,0337 0,0329 0,0326 0,0000 0,0338 0,0393 0,0327 0,0359 0,0406
0,0260 0,0271 0,0303 0,0301 0,0338 0,0000 0,0383 0,0360 0,0351 0,0391
0,0360 0,0347 0,0358 0,0385 0,0393 0,0383 0,0000 0,0403 0,0374 0,0412
0,0347 0,0335 0,0335 0,0407 0,0327 0,0360 0,0403 0,0000 0,0363 0,0407
0,0315 0,0334 0,0321 0,0330 0,0359 0,0351 0,0374 0,0363 0,0000 0,0416
0,0384 0,0392 0,0400 0,0412 0,0406 0,0391 0,0412 0,0407 0,0416 0,0000
alpha se_alpha
0,0005 0,0002
beta  se_beta
0,8970 0,0422
nu    se_nu
7,5672 0,2548

```

ПОРТФЕЛЬ №16

c	se_c
-0,0364	0,0919
-0,0235	0,1183
0,1258	0,1005
-0,0316	0,1459
0,0548	0,1173
0,0052	0,0608
-0,0199	0,1370
-0,0304	0,1086
-0,0051	0,1619
0,0508	0,0824

Q

0,0695	-0,0286	-0,0336	0,0077	0,0035	-0,1243	-0,0366	0,0355	0,0242	-0,0346
-0,0591	0,0647	-0,0951	-0,0540	0,0687	-0,0623	-0,0193	0,0123	0,0307	0,0146
-0,1026	0,0160	0,0956	0,0458	-0,0005	-0,0984	-0,0417	-0,0199	-0,0370	0,0179
-0,0469	-0,0093	-0,0273	0,0654	0,0314	-0,1192	-0,0259	0,0407	-0,0030	-0,0498
-0,0927	0,0328	0,0354	0,0255	0,0622	-0,0717	-0,0970	-0,0428	-0,0376	0,0216
0,0502	-0,0424	-0,0292	-0,0115	0,0043	-0,0619	-0,0066	0,0126	0,0050	-0,0140
-0,0720	0,0171	-0,0081	0,0276	-0,0048	-0,1616	0,1355	-0,0325	0,0246	-0,0607
-0,0651	-0,0661	-0,0135	0,0171	0,0412	0,0279	0,0111	0,0703	0,0170	0,0057
-0,0230	-0,0279	0,0317	-0,0008	0,0325	-0,0512	-0,0527	0,0584	0,1212	0,0047
-0,0042	0,0680	-0,0310	-0,0517	-0,0110	-0,1301	-0,0234	0,0249	0,1255	0,0470

se_Q

0,0590	0,0462	0,0483	0,0455	0,0333	0,0706	0,0255	0,0508	0,0281	0,0311
0,0730	0,0647	0,0550	0,0442	0,0368	0,0887	0,0235	0,0657	0,0402	0,0333
0,0641	0,0518	0,0537	0,0443	0,0360	0,0725	0,0185	0,0511	0,0348	0,0344
0,0805	0,0762	0,0612	0,0547	0,0440	0,0814	0,0250	0,0837	0,0432	0,0456
0,0791	0,0617	0,0629	0,0598	0,0474	0,0966	0,0347	0,0626	0,0437	0,0421
0,0439	0,0350	0,0347	0,0300	0,0228	0,0553	0,0229	0,0406	0,0220	0,0243
0,0913	0,0714	0,0595	0,0600	0,0370	0,0879	0,0468	0,0697	0,0484	0,0350
0,0463	0,0485	0,0468	0,0344	0,0256	0,0531	0,0187	0,0537	0,0355	0,0319
0,0846	0,0651	0,0611	0,0489	0,0377	0,0919	0,0286	0,0599	0,0467	0,0538
0,0820	0,0523	0,0421	0,0443	0,0306	0,0726	0,0343	0,0502	0,0438	0,0535

OMEGA se_OMEGA

0,1209	0,0391
0,5055	0,2722
0,1742	0,0697
0,4004	0,1448
0,2237	0,1197
0,0491	0,0170
1,4042	0,5488
2,0659	0,9163
0,5172	0,1886
0,4796	0,2987

A	se_A
0,0484	0,0167
0,0760	0,0304
0,0554	0,0166
0,0736	0,0188
0,0490	0,0208
0,0469	0,0134
0,3016	0,1239
0,2420	0,0997
0,1200	0,0338

0,2591	0,0970																		
B	se_B																		
0,9292	0,0191																		
0,8619	0,0568																		
0,9210	0,0227																		
0,8958	0,0271																		
0,9283	0,0285																		
0,9349	0,0158																		
0,6238	0,1074																		
0,4366	0,2033																		
0,8354	0,0408																		
0,7286	0,1003																		
S																			
1,0000	0,6746	0,6048	0,5572	0,5242	0,5927	0,4233	0,4044	0,4764	0,2964										
0,6746	1,0000	0,5933	0,5813	0,4839	0,6204	0,4739	0,4480	0,4707	0,3043										
0,6048	0,5933	1,0000	0,5391	0,4707	0,5190	0,3936	0,3982	0,4877	0,2456										
0,5572	0,5813	0,5391	1,0000	0,4780	0,5289	0,3864	0,3606	0,4983	0,3265										
0,5242	0,4839	0,4707	0,4780	1,0000	0,4806	0,2952	0,3769	0,4140	0,2800										
0,5927	0,6204	0,5190	0,5289	0,4806	1,0000	0,4401	0,4168	0,4542	0,3134										
0,4233	0,4739	0,3936	0,3864	0,2952	0,4401	1,0000	0,3467	0,3664	0,2399										
0,4044	0,4480	0,3982	0,3606	0,3769	0,4168	0,3467	1,0000	0,3648	0,2343										
0,4764	0,4707	0,4877	0,4983	0,4140	0,4542	0,3664	0,3648	1,0000	0,2772										
0,2964	0,3043	0,2456	0,3265	0,2800	0,3134	0,2399	0,2343	0,2772	1,0000										
se_S																			
0,0000	0,0243	0,0269	0,0300	0,0307	0,0281	0,0374	0,0349	0,0327	0,0381										
0,0243	0,0000	0,0275	0,0281	0,0338	0,0267	0,0353	0,0340	0,0329	0,0384										
0,0269	0,0275	0,0000	0,0295	0,0324	0,0300	0,0365	0,0333	0,0315	0,0395										
0,0300	0,0281	0,0295	0,0000	0,0321	0,0298	0,0385	0,0408	0,0329	0,0408										
0,0307	0,0338	0,0324	0,0321	0,0000	0,0328	0,0411	0,0329	0,0355	0,0400										
0,0281	0,0267	0,0300	0,0298	0,0328	0,0000	0,0382	0,0365	0,0346	0,0382										
0,0374	0,0353	0,0365	0,0385	0,0411	0,0382	0,0000	0,0409	0,0379	0,0404										
0,0349	0,0340	0,0333	0,0408	0,0329	0,0365	0,0409	0,0000	0,0366	0,0402										
0,0327	0,0329	0,0315	0,0329	0,0355	0,0346	0,0379	0,0366	0,0000	0,0416										
0,0381	0,0384	0,0395	0,0408	0,0400	0,0382	0,0404	0,0402	0,0416	0,0000										
alpha	se_alpha																		
0,0007	0,0003																		
beta	se_beta																		
0,8574	0,0593																		
nu	se_nu																		
7,5976	0,2596																		

П 2.3 Оценки параметров моделей доходностей акций на основе многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы

ПОРТФЕЛЬ №1

c	se_c
-0,0566	0,0776
0,0254	0,0874
-0,0169	0,0792
0,0644	0,0759
0,0911	0,0954
-0,0017	0,0531
-0,0712	0,0834
-0,0668	0,0748
-0,0748	0,0896
0,0210	0,0725

Q

0,0426	-0,0589	0,0519	-0,0279	0,0391	-0,0123	-0,0662	-0,0464	-0,0008	-0,0134
-0,0857	0,0821	-0,0482	0,0242	0,0571	-0,1017	-0,0353	0,0020	-0,0640	0,0302
-0,0560	-0,0763	0,1953	-0,0095	0,0199	-0,0521	-0,0610	-0,0375	-0,0310	0,0249
-0,0848	-0,0071	0,0857	0,0421	0,0639	-0,0066	-0,0515	-0,0138	-0,0176	-0,0027
0,0388	-0,0755	0,0666	-0,0370	0,0872	-0,0329	-0,1190	-0,0379	-0,0386	0,0332
-0,0036	0,0315	-0,0452	-0,0256	0,0181	-0,0520	-0,0267	-0,0033	-0,0048	0,0035
-0,0742	0,0861	-0,0570	0,0538	0,0064	-0,1520	0,0930	-0,0498	0,0100	-0,0432
-0,1154	0,0079	0,0487	0,0127	0,0590	-0,0269	-0,0080	0,0371	-0,0002	-0,0035
-0,0892	-0,0034	0,1175	-0,0220	0,0455	-0,0535	-0,0717	0,0164	0,0940	0,0078
0,0562	0,0433	-0,0641	-0,0510	-0,0279	-0,0295	-0,0614	0,0156	0,0885	0,0230

se_Q

0,0634	0,0553	0,0706	0,0490	0,0275	0,0684	0,0344	0,0428	0,0373	0,0386
0,0651	0,0674	0,0757	0,0619	0,0324	0,0742	0,0370	0,0514	0,0452	0,0314
0,0568	0,0540	0,0656	0,0469	0,0255	0,0619	0,0303	0,0445	0,0311	0,0333
0,0646	0,0759	0,0839	0,0608	0,0349	0,0721	0,0407	0,0532	0,0375	0,0384
0,0840	0,0715	0,0956	0,0695	0,0433	0,0922	0,0447	0,0563	0,0454	0,0413
0,0439	0,0414	0,0457	0,0365	0,0192	0,0472	0,0279	0,0320	0,0234	0,0248
0,0722	0,0650	0,0690	0,0633	0,0314	0,0719	0,0472	0,0600	0,0458	0,0302
0,0492	0,0503	0,0562	0,0450	0,0227	0,0473	0,0220	0,0475	0,0293	0,0384
0,0663	0,0650	0,0762	0,0654	0,0378	0,0812	0,0322	0,0567	0,0480	0,0473
0,0524	0,0439	0,0578	0,0385	0,0268	0,0713	0,0311	0,0475	0,0368	0,0457

OMEGA se_OMEGA

0,2624	0,0987
0,4810	0,1679
0,3064	0,0832
0,2304	0,0982
0,2754	0,1252
0,0516	0,0165
1,3486	0,5481
2,2547	0,9923
0,7060	0,2853
1,8881	1,6356

A	se_A
0,0530	0,0227
0,0917	0,0258
0,0664	0,0168
0,0726	0,0273
0,0525	0,0192

0,0479 0,0134
 0,2968 0,1115
 0,2763 0,1133
 0,1522 0,0429
 0,5874 0,3237
 B se_B
 0,9086 0,0306
 0,8534 0,0377
 0,8849 0,0234
 0,8959 0,0336
 0,9163 0,0280
 0,9307 0,0157
 0,6270 0,1046
 0,4064 0,2077
 0,8183 0,0458
 0,5489 0,2390
 S
 1,0000 0,7513 0,8041 0,6987 0,5467 0,6030 0,4446 0,4248 0,4714 0,2562
 0,7513 1,0000 0,7463 0,6438 0,5163 0,6384 0,4926 0,4545 0,4685 0,2230
 0,8041 0,7463 1,0000 0,7005 0,5258 0,6256 0,4492 0,4580 0,4809 0,2349
 0,6987 0,6438 0,7005 1,0000 0,5115 0,5131 0,3687 0,3762 0,4348 0,2292
 0,5467 0,5163 0,5258 0,5115 1,0000 0,4717 0,2949 0,3719 0,3619 0,1886
 0,6030 0,6384 0,6256 0,5131 0,4717 1,0000 0,4164 0,4015 0,4020 0,1937
 0,4446 0,4926 0,4492 0,3687 0,2949 0,4164 1,0000 0,3397 0,3231 0,1608
 0,4248 0,4545 0,4580 0,3762 0,3719 0,4015 0,3397 1,0000 0,3118 0,1729
 0,4714 0,4685 0,4809 0,4348 0,3619 0,4020 0,3231 0,3118 1,0000 0,1756
 0,2562 0,2230 0,2349 0,2292 0,1886 0,1937 0,1608 0,1729 0,1756 1,0000
 se_s
 0,0000 0,0219 0,0167 0,0249 0,0327 0,0272 0,0376 0,0361 0,0400 0,0429
 0,0219 0,0000 0,0210 0,0283 0,0316 0,0261 0,0381 0,0380 0,0373 0,0415
 0,0167 0,0210 0,0000 0,0249 0,0325 0,0289 0,0374 0,0336 0,0399 0,0424
 0,0249 0,0283 0,0249 0,0000 0,0337 0,0317 0,0369 0,0371 0,0378 0,0406
 0,0327 0,0316 0,0325 0,0337 0,0000 0,0342 0,0376 0,0345 0,0369 0,0385
 0,0272 0,0261 0,0289 0,0317 0,0342 0,0000 0,0394 0,0375 0,0396 0,0381
 0,0376 0,0381 0,0374 0,0369 0,0376 0,0394 0,0000 0,0408 0,0411 0,0365
 0,0361 0,0380 0,0336 0,0371 0,0345 0,0375 0,0408 0,0000 0,0383 0,0364
 0,0400 0,0373 0,0399 0,0378 0,0369 0,0396 0,0411 0,0383 0,0000 0,0414
 0,0429 0,0415 0,0424 0,0406 0,0385 0,0381 0,0365 0,0364 0,0414 0,0000
 alpha se_alpha
 0,0005 0,0002
 beta se_beta
 0,9084 0,0332
 nu se_nu
 1,5198 0,1990
 2,5255 0,2933
 3,8038 0,4612
 4,1127 0,3420
 5,8337 0,6110
 7,0509 0,9038
 9,6492 1,4865
 9,4506 1,4853
 9,8521 1,1696
 7,4340 0,3264

ПОРТФЕЛЬ №2

c se_c
 -0,0161 0,0724
 0,0278 0,1001
 -0,0195 0,0758
 0,0706 0,0828
 0,0787 0,1038
 0,0094 0,0586
 -0,0646 0,0893
 -0,0561 0,0744
 -0,0768 0,0893
 0,0157 0,0745

Q

0,1150 -0,0712 -0,0234 0,0011 0,0119 -0,0828 -0,0559 0,0211 0,0233 -0,0221
 0,0142 0,0608 -0,0900 0,0109 0,0463 -0,1256 -0,0288 0,0099 -0,0576 0,0299
 0,0132 -0,0972 0,1627 -0,0179 0,0171 -0,0757 -0,0525 -0,0273 -0,0209 0,0225
 0,0128 -0,0282 0,0436 0,0184 0,0610 -0,0138 -0,0506 -0,0061 -0,0089 -0,0007
 -0,0493 -0,0675 0,1124 -0,0327 0,0972 -0,0323 -0,1060 -0,0516 -0,0337 0,0321
 0,0834 0,0221 -0,0851 -0,0319 0,0106 -0,0710 -0,0225 -0,0009 0,0032 0,0036
 -0,0579 0,0678 -0,0537 0,0507 -0,0004 -0,1441 0,0990 -0,0452 0,0057 -0,0375
 -0,1036 0,0069 0,0453 -0,0039 0,0537 -0,0215 -0,0065 0,0321 0,0007 0,0028
 0,0270 -0,0254 0,0642 -0,0398 0,0424 -0,0741 -0,0700 0,0227 0,0997 0,0012
 0,0288 0,0401 -0,0525 -0,0374 -0,0237 -0,0150 -0,0585 0,0074 0,0820 0,0338

se_Q

0,0635 0,0486 0,0595 0,0680 0,0298 0,0689 0,0312 0,0490 0,0337 0,0275
 0,0779 0,0700 0,0760 0,0928 0,0377 0,0853 0,0359 0,0624 0,0532 0,0271
 0,0723 0,0528 0,0655 0,0742 0,0312 0,0748 0,0299 0,0542 0,0376 0,0302
 0,0705 0,0634 0,0839 0,0826 0,0382 0,0969 0,0383 0,0649 0,0471 0,0343
 0,0947 0,0710 0,0984 0,0859 0,0477 0,0898 0,0440 0,0642 0,0455 0,0362
 0,0481 0,0398 0,0474 0,0496 0,0220 0,0504 0,0273 0,0368 0,0256 0,0232
 0,0737 0,0664 0,0694 0,0761 0,0332 0,0763 0,0483 0,0632 0,0522 0,0296
 0,0530 0,0583 0,0538 0,0644 0,0233 0,0529 0,0209 0,0520 0,0349 0,0343
 0,0802 0,0629 0,0756 0,0775 0,0410 0,0878 0,0309 0,0657 0,0515 0,0420
 0,0637 0,0430 0,0602 0,0436 0,0320 0,0682 0,0306 0,0498 0,0412 0,0455

OMEGA se_OMEGA

0,1463 0,0488
 0,5958 0,2093
 0,3204 0,0837
 0,2423 0,1021
 0,2794 0,1341
 0,0537 0,0164
 1,3711 0,5298
 2,0790 0,8466
 0,6975 0,2880
 1,6298 2,3856

A se_A

0,0442 0,0166
 0,1091 0,0321
 0,0633 0,0153
 0,0720 0,0268
 0,0549 0,0219
 0,0506 0,0135
 0,3005 0,1071
 0,2459 0,0920
 0,1497 0,0417

```

0,5575 0,4697
B      se_B
0,9258 0,0221
0,8228 0,0466
0,8840 0,0223
0,8934 0,0343
0,9129 0,0317
0,9266 0,0157
0,6183 0,0994
0,4481 0,1729
0,8184 0,0452
0,5797 0,3646
S
1,0000 0,6998 0,7873 0,6275 0,5281 0,5971 0,4148 0,3865 0,4254 0,2107
0,6998 1,0000 0,7473 0,6419 0,5141 0,6383 0,4829 0,4478 0,4644 0,2195
0,7873 0,7473 1,0000 0,6939 0,5241 0,6303 0,4435 0,4519 0,4788 0,2299
0,6275 0,6419 0,6939 1,0000 0,5046 0,5136 0,3608 0,3706 0,4323 0,2229
0,5281 0,5141 0,5241 0,5046 1,0000 0,4730 0,2901 0,3584 0,3542 0,1853
0,5971 0,6383 0,6303 0,5136 0,4730 1,0000 0,4136 0,3973 0,4003 0,1922
0,4148 0,4829 0,4435 0,3608 0,2901 0,4136 1,0000 0,3309 0,3185 0,1590
0,3865 0,4478 0,4519 0,3706 0,3584 0,3973 0,3309 1,0000 0,3099 0,1631
0,4254 0,4644 0,4788 0,4323 0,3542 0,4003 0,3185 0,3099 1,0000 0,1742
0,2107 0,2195 0,2299 0,2229 0,1853 0,1922 0,1590 0,1631 0,1742 1,0000
se_s
0,0000 0,0244 0,0172 0,0276 0,0322 0,0290 0,0372 0,0359 0,0381 0,0405
0,0244 0,0000 0,0204 0,0278 0,0316 0,0257 0,0377 0,0383 0,0370 0,0427
0,0172 0,0204 0,0000 0,0247 0,0323 0,0286 0,0369 0,0340 0,0394 0,0438
0,0276 0,0278 0,0247 0,0000 0,0327 0,0311 0,0363 0,0375 0,0379 0,0414
0,0322 0,0316 0,0323 0,0327 0,0000 0,0341 0,0379 0,0351 0,0365 0,0406
0,0290 0,0257 0,0286 0,0311 0,0341 0,0000 0,0390 0,0387 0,0391 0,0383
0,0372 0,0377 0,0369 0,0363 0,0379 0,0390 0,0000 0,0423 0,0407 0,0363
0,0359 0,0383 0,0340 0,0375 0,0351 0,0387 0,0423 0,0000 0,0383 0,0365
0,0381 0,0370 0,0394 0,0379 0,0365 0,0391 0,0407 0,0383 0,0000 0,0423
0,0405 0,0427 0,0438 0,0414 0,0406 0,0383 0,0363 0,0365 0,0423 0,0000
alpha  se_alpha
0,0005 0,0002
beta   se_beta
0,9006 0,0460
nu     se_nu
1,5397 0,2200
2,5202 0,2966
3,8722 0,5098
4,1243 0,3459
5,8946 0,6409
7,1545 0,9153
9,0442 1,2414
8,7168 1,0915
9,6299 1,1779
7,6541 0,3849

```

ПОРТФЕЛЬ №3

c	se_c
-0,0268	0,0736
0,0105	0,0971
0,0025	0,0647
0,0841	0,0768
0,1100	0,0962
0,0041	0,0603
-0,0716	0,0851
-0,0707	0,0722
-0,0615	0,0868
0,0312	0,0808

Q

0,0058	0,0194	0,0195	-0,0406	0,0281	-0,0292	-0,0570	-0,0421	0,0042	-0,0294
-0,0692	0,0701	-0,0584	0,0109	0,0574	-0,0930	-0,0304	-0,0001	-0,0054	0,0141
-0,0845	-0,0502	0,1830	-0,0167	0,0073	-0,0501	-0,0490	-0,0318	-0,0245	0,0085
-0,1016	0,0365	0,0568	0,0250	0,0560	-0,0085	-0,0390	-0,0131	-0,0069	-0,0157
0,0038	0,0301	0,0345	-0,0540	0,0650	-0,0696	-0,1135	-0,0376	-0,0307	0,0217
0,0085	-0,0301	-0,0364	-0,0209	0,0118	-0,0381	-0,0126	0,0127	0,0031	-0,0115
-0,0459	-0,0020	-0,0492	0,0546	0,0038	-0,1327	0,1215	-0,0328	0,0184	-0,0635
-0,1028	-0,0832	0,0689	0,0291	0,0520	0,0048	0,0020	0,0525	0,0049	-0,0136
-0,0880	-0,0190	0,1057	-0,0257	0,0340	-0,0416	-0,0607	0,0324	0,1015	0,0013
0,0532	0,0835	-0,0835	-0,0607	-0,0358	-0,0385	-0,0561	0,0145	0,0947	0,0083

se_Q

0,1414	0,0553	0,0689	0,0762	0,0295	0,1110	0,0342	0,0431	0,0474	0,0434
0,1092	0,0627	0,0667	0,0707	0,0322	0,1015	0,0287	0,0501	0,0410	0,0310
0,1080	0,0510	0,0613	0,0665	0,0281	0,0923	0,0299	0,0431	0,0383	0,0377
0,1093	0,0618	0,0753	0,0672	0,0373	0,1104	0,0395	0,0523	0,0426	0,0404
0,1597	0,0683	0,0909	0,0919	0,0443	0,1096	0,0458	0,0532	0,0484	0,0462
0,0686	0,0381	0,0417	0,0463	0,0214	0,0599	0,0265	0,0311	0,0238	0,0264
0,0851	0,0689	0,0688	0,0656	0,0319	0,0858	0,0453	0,0548	0,0536	0,0330
0,0556	0,0476	0,0496	0,0410	0,0232	0,0550	0,0193	0,0473	0,0293	0,0352
0,0956	0,0599	0,0732	0,0835	0,0382	0,1091	0,0343	0,0512	0,0503	0,0479
0,0629	0,0490	0,0572	0,0455	0,0261	0,0755	0,0337	0,0462	0,0389	0,0606

OMEGA se_OMEGA

0,2833	0,1100
0,6989	0,2480
0,3214	0,0992
0,2682	0,1030
0,2886	0,1330
0,0525	0,0173
1,3839	0,5145
2,4075	1,1331
0,7358	0,2879
2,2954	1,3565

A se_A

0,0551	0,0243
0,0943	0,0305
0,0684	0,0198
0,0816	0,0274
0,0526	0,0190
0,0484	0,0144
0,3076	0,1104
0,3046	0,1299
0,1535	0,0428

0,6479 0,2730
 B se_B
 0,9033 0,0339
 0,8193 0,0504
 0,8803 0,0292
 0,8834 0,0330
 0,9147 0,0286
 0,9299 0,0169
 0,6257 0,0962
 0,3738 0,2335
 0,8181 0,0444
 0,5149 0,1689
 S
 1,0000 0,7270 0,8061 0,7000 0,5446 0,5929 0,4249 0,4060 0,4614 0,2431
 0,7270 1,0000 0,7362 0,6439 0,4927 0,6075 0,4439 0,4183 0,4255 0,2092
 0,8061 0,7362 1,0000 0,7014 0,5249 0,6151 0,4354 0,4399 0,4691 0,2259
 0,7000 0,6439 0,7014 1,0000 0,5043 0,5071 0,3549 0,3607 0,4229 0,2189
 0,5446 0,4927 0,5249 0,5043 1,0000 0,4660 0,2847 0,3589 0,3508 0,1804
 0,5929 0,6075 0,6151 0,5071 0,4660 1,0000 0,4123 0,3836 0,3935 0,1929
 0,4249 0,4439 0,4354 0,3549 0,2847 0,4123 1,0000 0,3265 0,3139 0,1573
 0,4060 0,4183 0,4399 0,3607 0,3589 0,3836 0,3265 1,0000 0,2986 0,1651
 0,4614 0,4255 0,4691 0,4229 0,3508 0,3935 0,3139 0,2986 1,0000 0,1703
 0,2431 0,2092 0,2259 0,2189 0,1804 0,1929 0,1573 0,1651 0,1703 1,0000
 se_s
 0,0000 0,0236 0,0165 0,0241 0,0329 0,0282 0,0381 0,0366 0,0403 0,0432
 0,0236 0,0000 0,0218 0,0272 0,0348 0,0284 0,0377 0,0363 0,0380 0,0395
 0,0165 0,0218 0,0000 0,0247 0,0327 0,0296 0,0383 0,0351 0,0406 0,0435
 0,0241 0,0272 0,0247 0,0000 0,0336 0,0314 0,0370 0,0375 0,0384 0,0403
 0,0329 0,0348 0,0327 0,0336 0,0000 0,0351 0,0382 0,0357 0,0379 0,0383
 0,0282 0,0284 0,0296 0,0314 0,0351 0,0000 0,0399 0,0391 0,0405 0,0389
 0,0381 0,0377 0,0383 0,0370 0,0382 0,0399 0,0000 0,0419 0,0407 0,0373
 0,0366 0,0363 0,0351 0,0375 0,0357 0,0391 0,0419 0,0000 0,0391 0,0369
 0,0403 0,0380 0,0406 0,0384 0,0379 0,0405 0,0407 0,0391 0,0000 0,0405
 0,0432 0,0395 0,0435 0,0403 0,0383 0,0389 0,0373 0,0369 0,0405 0,0000
 alpha se_alpha
 0,0005 0,0002
 beta se_beta
 0,8997 0,0334
 nu se_nu
 1,4782 0,1902
 2,5118 0,2832
 3,6328 0,4119
 3,9588 0,3069
 5,4525 0,5081
 6,6421 0,7349
 9,8607 1,6005
 11,5726 2,6717
 8,8377 0,7591
 7,4907 0,3539

ПОРТФЕЛЬ №4

c	se_c
-0,0055	0,1422
0,0014	0,0749
-0,0053	0,1615
0,0868	0,0954
0,0968	0,1050
0,0094	0,0504
-0,0714	0,0978
-0,0659	0,0799
-0,0699	0,1033
0,0234	0,0781

Q

0,1040	-0,0157	-0,0512	-0,0103	-0,0072	-0,0889	-0,0459	0,0208	0,0197	-0,0392
-0,0268	0,0616	-0,0742	-0,0006	0,0419	-0,0932	-0,0232	0,0015	0,0002	0,0082
0,0048	-0,0583	0,1412	-0,0289	-0,0029	-0,0784	-0,0391	-0,0265	-0,0231	-0,0007
0,0008	0,0228	0,0146	-0,0010	0,0477	-0,0144	-0,0346	-0,0082	-0,0054	-0,0186
-0,0777	0,0458	0,0754	-0,0510	0,0670	-0,0602	-0,0993	-0,0524	-0,0313	0,0113
0,0933	-0,0342	-0,0771	-0,0255	0,0018	-0,0556	-0,0057	0,0136	0,0071	-0,0125
-0,0396	-0,0010	-0,0487	0,0518	-0,0063	-0,1278	0,1305	-0,0338	0,0135	-0,0637
-0,0933	-0,0825	0,0651	0,0144	0,0446	0,0143	0,0045	0,0462	0,0029	-0,0101
0,0229	-0,0305	0,0493	-0,0434	0,0249	-0,0590	-0,0573	0,0359	0,1043	-0,0077
0,0262	0,0860	-0,0738	-0,0476	-0,0340	-0,0244	-0,0526	0,0067	0,0894	0,0122

se_Q

0,0810	0,0500	0,0676	0,0389	0,0313	0,0700	0,0309	0,0404	0,0310	0,0291
0,0982	0,0662	0,0850	0,0455	0,0338	0,0850	0,0294	0,0437	0,0400	0,0271
0,0999	0,0550	0,0790	0,0442	0,0314	0,0744	0,0296	0,0388	0,0359	0,0302
0,1007	0,0679	0,1127	0,0774	0,0419	0,0923	0,0387	0,0494	0,0411	0,0346
0,1012	0,0664	0,0971	0,0619	0,0469	0,1036	0,0427	0,0539	0,0435	0,0462
0,0554	0,0382	0,0500	0,0306	0,0210	0,0521	0,0262	0,0319	0,0234	0,0223
0,0775	0,0698	0,0741	0,0573	0,0379	0,0711	0,0458	0,0539	0,0505	0,0328
0,0610	0,0495	0,0540	0,0374	0,0231	0,0483	0,0188	0,0472	0,0297	0,0327
0,1162	0,0646	0,0804	0,0551	0,0398	0,0958	0,0328	0,0517	0,0489	0,0410
0,0640	0,0523	0,0631	0,0373	0,0263	0,0770	0,0319	0,0439	0,0391	0,0489

OMEGA se_OMEGA

0,1621	0,0628
0,7514	0,3166
0,3399	0,0981
0,2743	0,0997
0,2930	0,1439
0,0555	0,0171
1,3791	0,5279
2,3385	1,1168
0,7349	0,2825
2,2127	1,5914

A se_A

0,0469	0,0197
0,1010	0,0381
0,0662	0,0184
0,0799	0,0256
0,0552	0,0223
0,0510	0,0140
0,3047	0,1116
0,2791	0,1168
0,1505	0,0405

0,6462 0,3041
 B se_B
 0,9201 0,0280
 0,8044 0,0656
 0,8774 0,0280
 0,8830 0,0315
 0,9108 0,0330
 0,9256 0,0163
 0,6244 0,0996
 0,3951 0,2285
 0,8176 0,0426
 0,5216 0,1983

S
 1,0000 0,6880 0,7891 0,6266 0,5284 0,5884 0,4004 0,3709 0,4168 0,2021
 0,6880 1,0000 0,7377 0,6395 0,4893 0,6080 0,4344 0,4081 0,4203 0,2041
 0,7891 0,7377 1,0000 0,6925 0,5240 0,6188 0,4286 0,4335 0,4665 0,2188
 0,6266 0,6395 0,6925 1,0000 0,4980 0,5059 0,3452 0,3540 0,4189 0,2107
 0,5284 0,4893 0,5240 0,4980 1,0000 0,4679 0,2800 0,3446 0,3444 0,1771
 0,5884 0,6080 0,6188 0,5059 0,4679 1,0000 0,4093 0,3791 0,3924 0,1928
 0,4004 0,4344 0,4286 0,3452 0,2800 0,4093 1,0000 0,3174 0,3102 0,1564
 0,3709 0,4081 0,4335 0,3540 0,3446 0,3791 0,3174 1,0000 0,2962 0,1542
 0,4168 0,4203 0,4665 0,4189 0,3444 0,3924 0,3102 0,2962 1,0000 0,1693
 0,2021 0,2041 0,2188 0,2107 0,1771 0,1928 0,1564 0,1542 0,1693 1,0000

se_s
 0,0000 0,0248 0,0171 0,0268 0,0320 0,0297 0,0374 0,0357 0,0380 0,0389
 0,0248 0,0000 0,0208 0,0264 0,0341 0,0278 0,0359 0,0353 0,0369 0,0383
 0,0171 0,0208 0,0000 0,0242 0,0320 0,0292 0,0366 0,0339 0,0397 0,0416
 0,0268 0,0264 0,0242 0,0000 0,0321 0,0303 0,0346 0,0364 0,0376 0,0382
 0,0320 0,0341 0,0320 0,0321 0,0000 0,0338 0,0375 0,0339 0,0366 0,0374
 0,0297 0,0278 0,0292 0,0303 0,0338 0,0000 0,0384 0,0389 0,0394 0,0378
 0,0374 0,0359 0,0366 0,0346 0,0375 0,0384 0,0000 0,0408 0,0390 0,0355
 0,0357 0,0353 0,0339 0,0364 0,0339 0,0389 0,0408 0,0000 0,0381 0,0352
 0,0380 0,0369 0,0397 0,0376 0,0366 0,0394 0,0390 0,0381 0,0000 0,0403
 0,0389 0,0383 0,0416 0,0382 0,0374 0,0378 0,0355 0,0352 0,0403 0,0000

alpha se_alpha
 0,0006 0,0002

beta se_beta
 0,8713 0,0454

nu se_nu
 1,4861 0,1935
 2,5244 0,2893
 3,6521 0,4215
 3,9698 0,3009
 5,3747 0,4728
 6,7912 0,7795
 8,9717 1,2283
 10,0996 1,6280
 8,8296 0,7393
 7,6572 0,3954

ПОРТФЕЛЬ №5

c	se_c
-0,0775	0,1524
0,0071	0,3939
-0,0282	0,1145
-0,0368	0,1868
0,0740	0,1200
-0,0135	0,0837
-0,0756	0,1164
-0,0740	0,0919
-0,0850	0,1383
0,0090	0,0989

Q

0,0436	-0,0559	0,0214	0,0187	0,0246	-0,0292	-0,0532	-0,0379	-0,0095	-0,0092
-0,0383	0,1029	-0,0487	-0,0731	0,0580	-0,0977	-0,0233	0,0106	-0,0510	0,0327
-0,0327	-0,0682	0,1825	-0,0306	0,0169	-0,0606	-0,0510	-0,0288	-0,0311	0,0314
-0,0290	-0,0037	0,0004	0,1034	0,0366	-0,1320	-0,0450	0,0009	-0,0358	-0,0101
0,0225	-0,0787	0,0402	0,0468	0,0674	-0,0521	-0,1136	-0,0295	-0,0521	0,0336
-0,0018	0,0378	-0,0628	-0,0049	0,0094	-0,0562	-0,0259	-0,0017	-0,0053	0,0071
-0,0464	0,1044	-0,0649	0,0174	0,0062	-0,1729	0,0937	-0,0485	0,0107	-0,0375
-0,0993	0,0198	0,0345	0,0113	0,0519	-0,0367	-0,0049	0,0336	-0,0009	0,0078
-0,0894	-0,0095	0,0947	0,0214	0,0394	-0,0595	-0,0684	0,0258	0,0947	0,0075
0,0240	0,0336	-0,0647	0,0131	-0,0278	-0,0426	-0,0602	0,0311	0,0838	0,0149

se_Q

0,3349	0,0744	0,5347	0,0338	0,0893	0,2258	0,0312	0,0435	0,1307	0,0661
0,3214	0,0991	0,4217	0,0409	0,0813	0,1829	0,0343	0,0675	0,1098	0,0514
0,3320	0,0873	0,4377	0,0349	0,0851	0,1627	0,0263	0,0503	0,0847	0,0447
0,6235	0,1986	0,9124	0,0589	0,0923	0,3130	0,0308	0,0937	0,1106	0,1984
0,2521	0,0928	0,4357	0,0559	0,0994	0,2084	0,0402	0,0809	0,1046	0,0692
0,2258	0,0719	0,2358	0,0273	0,0642	0,1044	0,0259	0,0345	0,0320	0,0320
0,2570	0,1047	0,2039	0,0491	0,0634	0,1285	0,0461	0,0649	0,0477	0,0526
0,1630	0,0429	0,1955	0,0284	0,0320	0,0597	0,0213	0,0512	0,0338	0,0357
0,2806	0,1806	0,3707	0,0727	0,0589	0,1590	0,0294	0,1216	0,0712	0,0645
0,1728	0,0625	0,2479	0,0553	0,0374	0,0886	0,0290	0,0584	0,0469	0,0454

OMEGA se_OMEGA

0,2322	0,0905
0,4029	0,1627
0,2615	0,0660
0,3673	0,1407
0,2464	0,1240
0,0492	0,0158
1,1765	0,5831
1,9829	0,7830
0,6197	0,2599
1,9889	1,7596

A se_A

0,0519	0,0230
0,0857	0,0273
0,0612	0,0143
0,0756	0,0216
0,0498	0,0205
0,0473	0,0131
0,2676	0,1261
0,2456	0,0959
0,1432	0,0410

ПОРТФЕЛЬ №6

c se_c
 -0,0307 0,1249
 0,0030 0,2284
 -0,0260 0,1515
 -0,0354 0,1756
 0,0674 0,1520
 -0,0052 0,1111
 -0,0710 0,1436
 -0,0632 0,1149
 -0,0882 0,1419
 0,0064 0,0842

Q
 0,0945 -0,0647 -0,0274 0,0170 0,0052 -0,0865 -0,0531 0,0323 0,0229 -0,0186
 0,0046 0,0908 -0,0676 -0,0810 0,0539 -0,1161 -0,0195 0,0171 -0,0349 0,0254
 -0,0083 -0,0799 0,1725 -0,0415 0,0199 -0,0806 -0,0449 -0,0194 -0,0157 0,0246
 -0,0573 -0,0061 0,0225 0,0931 0,0383 -0,1267 -0,0422 -0,0015 -0,0217 -0,0166
 -0,0883 -0,0704 0,1046 0,0401 0,0797 -0,0439 -0,1066 -0,0425 -0,0426 0,0292
 0,0661 0,0305 -0,0916 -0,0129 0,0034 -0,0710 -0,0236 0,0015 0,0047 0,0047
 -0,0579 0,0929 -0,0480 0,0115 0,0036 -0,1641 0,1007 -0,0441 0,0096 -0,0354
 -0,1207 0,0170 0,0504 0,0028 0,0488 -0,0268 -0,0030 0,0264 0,0027 0,0088
 -0,0148 -0,0304 0,0624 0,0138 0,0393 -0,0726 -0,0696 0,0310 0,1022 -0,0060
 0,0034 0,0311 -0,0489 0,0104 -0,0229 -0,0296 -0,0562 0,0236 0,0791 0,0153

se_Q
 0,1429 0,0465 0,0883 0,0394 0,0308 0,0702 0,0284 0,0421 0,0304 0,0291
 0,1807 0,0610 0,1117 0,0511 0,0361 0,0890 0,0315 0,0469 0,0541 0,0316
 0,1843 0,0511 0,1093 0,0424 0,0317 0,0753 0,0253 0,0475 0,0343 0,0319
 0,1647 0,0728 0,1277 0,0558 0,0459 0,0831 0,0270 0,0970 0,0376 0,0443
 0,1419 0,0635 0,1213 0,0608 0,0463 0,0908 0,0383 0,0565 0,0442 0,0385
 0,0876 0,0358 0,0643 0,0282 0,0211 0,0548 0,0252 0,0355 0,0231 0,0249
 0,1201 0,0584 0,0880 0,0581 0,0358 0,0762 0,0470 0,0586 0,0469 0,0294
 0,0822 0,0389 0,0686 0,0363 0,0221 0,0522 0,0195 0,0518 0,0317 0,0322
 0,1346 0,0621 0,0954 0,0641 0,0402 0,0893 0,0279 0,0621 0,0476 0,0457
 0,0912 0,0449 0,0731 0,0393 0,0267 0,0678 0,0295 0,0474 0,0391 0,0464

OMEGA se_OMEGA
 0,1312 0,0419
 0,5051 0,2034
 0,2692 0,0657
 0,4021 0,1627
 0,2548 0,1378
 0,0514 0,0159
 1,2147 0,5510
 1,8691 0,6744
 0,6033 0,2430
 1,9372 1,7954

A se_A
 0,0469 0,0166
 0,1041 0,0331
 0,0586 0,0127
 0,0838 0,0249
 0,0536 0,0244
 0,0502 0,0133
 0,2747 0,1167
 0,2227 0,0791
 0,1376 0,0374

0,6049	0,3398								
B	se_B								
0,9251	0,0210								
0,8353	0,0490								
0,8955	0,0173								
0,8801	0,0358								
0,9163	0,0355								
0,9275	0,0158								
0,6462	0,1157								
0,4865	0,1425								
0,8285	0,0424								
0,5364	0,2402								
S									
1,0000	0,6982	0,7882	0,5759	0,5221	0,5974	0,4120	0,3905	0,4307	0,1984
0,6982	1,0000	0,7437	0,6064	0,5138	0,6363	0,4833	0,4496	0,4697	0,2086
0,7882	0,7437	1,0000	0,6085	0,5230	0,6289	0,4438	0,4550	0,4872	0,2139
0,5759	0,6064	0,6085	1,0000	0,4860	0,5267	0,3652	0,3550	0,4467	0,2169
0,5221	0,5138	0,5230	0,4860	1,0000	0,4761	0,2906	0,3584	0,3586	0,1749
0,5974	0,6363	0,6289	0,5267	0,4761	1,0000	0,4145	0,4017	0,4079	0,1858
0,4120	0,4833	0,4438	0,3652	0,2906	0,4145	1,0000	0,3315	0,3212	0,1463
0,3905	0,4496	0,4550	0,3550	0,3584	0,4017	0,3315	1,0000	0,3174	0,1512
0,4307	0,4697	0,4872	0,4467	0,3586	0,4079	0,3212	0,3174	1,0000	0,1697
0,1984	0,2086	0,2139	0,2169	0,1749	0,1858	0,1463	0,1512	0,1697	1,0000
se_s									
0,0000	0,0246	0,0170	0,0300	0,0325	0,0287	0,0380	0,0363	0,0378	0,0409
0,0246	0,0000	0,0215	0,0293	0,0318	0,0257	0,0388	0,0392	0,0372	0,0423
0,0170	0,0215	0,0000	0,0289	0,0326	0,0280	0,0375	0,0344	0,0395	0,0438
0,0300	0,0293	0,0289	0,0000	0,0328	0,0307	0,0390	0,0391	0,0367	0,0411
0,0325	0,0318	0,0326	0,0328	0,0000	0,0343	0,0386	0,0349	0,0375	0,0420
0,0287	0,0257	0,0280	0,0307	0,0343	0,0000	0,0399	0,0395	0,0391	0,0393
0,0380	0,0388	0,0375	0,0390	0,0386	0,0399	0,0000	0,0419	0,0413	0,0368
0,0363	0,0392	0,0344	0,0391	0,0349	0,0395	0,0419	0,0000	0,0386	0,0366
0,0378	0,0372	0,0395	0,0367	0,0375	0,0391	0,0413	0,0386	0,0000	0,0402
0,0409	0,0423	0,0438	0,0411	0,0420	0,0393	0,0368	0,0366	0,0402	0,0000
alpha	se_alpha								
0,0006	0,0003								
beta	se_beta								
0,8768	0,0418								
nu	se_nu								
1,4770	0,2014								
2,6039	0,3076								
4,0581	0,5852								
4,1958	0,3644								
5,8916	0,6384								
6,9593	0,8194								
8,6930	1,3164								
11,3623	2,4146								
9,1323	1,0535								
8,0009	0,4417								

ПОРТФЕЛЬ №7

c se_c
 -0,0462 0,1424
 -0,0024 0,2030
 -0,0043 0,1323
 -0,0104 0,1298
 0,0927 0,1258
 -0,0066 0,0859
 -0,0740 0,1211
 -0,0785 0,0895
 -0,0707 0,1093
 0,0210 0,1110

Q

0,0164 0,0208 -0,0211 0,0115 0,0138 -0,0440 -0,0447 -0,0345 -0,0081 -0,0261
 -0,0186 0,0851 -0,0780 -0,0499 0,0588 -0,0892 -0,0266 0,0073 0,0023 0,0183
 -0,0561 -0,0399 0,1606 -0,0343 0,0037 -0,0583 -0,0405 -0,0237 -0,0262 0,0147
 -0,0181 -0,0332 -0,0164 0,0972 0,0205 -0,1163 -0,0341 0,0229 -0,0242 -0,0330
 0,0005 0,0126 0,0009 0,0362 0,0459 -0,0857 -0,1075 -0,0268 -0,0469 0,0237
 0,0177 -0,0329 -0,0550 0,0019 0,0034 -0,0396 -0,0123 0,0152 0,0019 -0,0096
 -0,0133 0,0124 -0,0627 0,0259 0,0005 -0,1499 0,1173 -0,0278 0,0172 -0,0571
 -0,0724 -0,0817 0,0601 0,0135 0,0445 -0,0001 0,0039 0,0515 0,0036 -0,0004
 -0,0794 -0,0180 0,0747 0,0120 0,0265 -0,0459 -0,0587 0,0391 0,1020 0,0026
 0,0202 0,0692 -0,0837 0,0108 -0,0350 -0,0551 -0,0560 0,0290 0,0887 0,0006

se_Q

0,0905 0,0670 0,0932 0,0473 0,0476 0,0784 0,0304 0,0932 0,0434 0,0431
 0,0845 0,0791 0,0822 0,0494 0,0429 0,0813 0,0273 0,0872 0,0400 0,0308
 0,0702 0,0643 0,0882 0,0440 0,0393 0,0696 0,0273 0,0898 0,0345 0,0383
 0,0845 0,0809 0,1193 0,0563 0,0706 0,0829 0,0294 0,1069 0,0398 0,0457
 0,1044 0,0658 0,1896 0,0702 0,0528 0,1027 0,0395 0,1097 0,0502 0,0463
 0,0456 0,0412 0,0507 0,0301 0,0254 0,0519 0,0246 0,0496 0,0232 0,0221
 0,0879 0,0879 0,0734 0,0589 0,0458 0,0734 0,0456 0,0821 0,0470 0,0320
 0,0501 0,0492 0,0568 0,0396 0,0238 0,0542 0,0195 0,0584 0,0305 0,0355
 0,0731 0,0689 0,0874 0,0581 0,0493 0,0908 0,0312 0,0883 0,0479 0,0480
 0,0488 0,0504 0,0731 0,0448 0,0288 0,0696 0,0289 0,0598 0,0383 0,0494

OMEGA se_OMEGA

0,2550 0,0963
 0,6212 0,2092
 0,2766 0,0775
 0,3871 0,1448
 0,2560 0,1279
 0,0500 0,0167
 1,2683 0,5073
 2,1653 0,8829
 0,6391 0,2529
 2,3257 1,3679

A se_A

0,0536 0,0235
 0,0896 0,0253
 0,0626 0,0163
 0,0753 0,0214
 0,0505 0,0198
 0,0479 0,0140
 0,2886 0,1146
 0,2683 0,1060
 0,1428 0,0396

0,6527 0,2729
 B se_B
 0,9081 0,0319
 0,8306 0,0423
 0,8922 0,0230
 0,8905 0,0309
 0,9192 0,0300
 0,9306 0,0169
 0,6445 0,1029
 0,4220 0,1872
 0,8285 0,0424
 0,5145 0,1583
 S
 1,0000 0,7250 0,8065 0,6211 0,5462 0,5932 0,4247 0,4067 0,4698 0,2350
 0,7250 1,0000 0,7374 0,6055 0,4962 0,6129 0,4511 0,4254 0,4319 0,2009
 0,8065 0,7374 1,0000 0,6113 0,5270 0,6170 0,4396 0,4443 0,4779 0,2137
 0,6211 0,6055 0,6113 1,0000 0,4894 0,5230 0,3644 0,3488 0,4460 0,2124
 0,5462 0,4962 0,5270 0,4894 1,0000 0,4702 0,2892 0,3583 0,3577 0,1725
 0,5932 0,6129 0,6170 0,5230 0,4702 1,0000 0,4161 0,3891 0,4007 0,1869
 0,4247 0,4511 0,4396 0,3644 0,2892 0,4161 1,0000 0,3317 0,3190 0,1459
 0,4067 0,4254 0,4443 0,3488 0,3583 0,3891 0,3317 1,0000 0,3065 0,1513
 0,4698 0,4319 0,4779 0,4460 0,3577 0,4007 0,3190 0,3065 1,0000 0,1647
 0,2350 0,2009 0,2137 0,2124 0,1725 0,1869 0,1459 0,1513 0,1647 1,0000
 se_s
 0,0000 0,0236 0,0167 0,0275 0,0325 0,0281 0,0372 0,0358 0,0389 0,0422
 0,0236 0,0000 0,0217 0,0285 0,0341 0,0282 0,0364 0,0352 0,0371 0,0378
 0,0167 0,0217 0,0000 0,0291 0,0324 0,0292 0,0374 0,0338 0,0404 0,0420
 0,0275 0,0285 0,0291 0,0000 0,0339 0,0317 0,0386 0,0383 0,0374 0,0398
 0,0325 0,0341 0,0324 0,0339 0,0000 0,0343 0,0368 0,0335 0,0375 0,0378
 0,0281 0,0282 0,0292 0,0317 0,0343 0,0000 0,0393 0,0387 0,0404 0,0377
 0,0372 0,0364 0,0374 0,0386 0,0368 0,0393 0,0000 0,0405 0,0402 0,0365
 0,0358 0,0352 0,0338 0,0383 0,0335 0,0387 0,0405 0,0000 0,0382 0,0357
 0,0389 0,0371 0,0404 0,0374 0,0375 0,0404 0,0402 0,0382 0,0000 0,0389
 0,0422 0,0378 0,0420 0,0398 0,0378 0,0377 0,0365 0,0357 0,0389 0,0000
 alpha se_alpha
 0,0006 0,0002
 beta se_beta
 0,8851 0,0296
 nu se_nu
 1,4341 0,1871
 2,5374 0,2777
 3,7237 0,4640
 4,0283 0,3273
 5,5352 0,5356
 7,0613 0,9409
 8,7489 1,4305
 15,0228 5,7781
 8,9320 0,7882
 7,7527 0,3842

ПОРТФЕЛЬ №8

c se_c
 -0,0665 0,0848
 0,0163 0,1103
 0,1296 0,0790
 0,0487 0,0889
 0,0769 0,1024
 -0,0062 0,0497
 -0,0755 0,0881
 -0,0739 0,0757
 -0,0932 0,0923
 0,0274 0,0767

Q
 0,0565 -0,0441 -0,0145 -0,0277 0,0326 0,0025 -0,0593 -0,0319 0,0161 -0,0238
 -0,0900 0,0832 -0,0862 0,0113 0,0575 -0,0816 -0,0258 0,0183 -0,0499 0,0215
 -0,0324 0,0034 0,1050 -0,0345 0,0276 -0,0712 -0,0507 -0,0329 -0,0275 0,0319
 -0,0576 -0,0026 0,0280 0,0358 0,0599 0,0162 -0,0479 0,0035 -0,0077 -0,0046
 0,0572 -0,0700 0,0411 -0,0414 0,0762 -0,0189 -0,1160 -0,0306 -0,0311 0,0379
 -0,0213 0,0354 -0,0315 -0,0305 0,0202 -0,0521 -0,0227 -0,0023 -0,0014 -0,0019
 -0,0804 0,0930 -0,0239 0,0338 0,0065 -0,1489 0,0925 -0,0505 0,0106 -0,0522
 -0,0885 0,0241 -0,0167 0,0128 0,0591 -0,0210 -0,0056 0,0492 0,0122 -0,0069
 -0,0624 0,0177 0,0205 -0,0089 0,0434 -0,0381 -0,0656 0,0381 0,1039 0,0070
 0,0355 0,0568 -0,0507 -0,0550 -0,0199 -0,0515 -0,0596 0,0142 0,0909 0,0171

se_Q
 0,0721 0,0846 0,0568 0,0540 0,0336 0,0796 0,0341 0,0410 0,0453 0,0431
 0,0875 0,1047 0,0638 0,0755 0,0395 0,0922 0,0378 0,0486 0,0527 0,0409
 0,0860 0,1093 0,0579 0,0581 0,0344 0,0828 0,0264 0,0483 0,0387 0,0382
 0,0819 0,0969 0,0638 0,0691 0,0402 0,0810 0,0411 0,0459 0,0420 0,0465
 0,0887 0,0999 0,0664 0,0715 0,0489 0,1043 0,0448 0,0545 0,0492 0,0440
 0,0475 0,0624 0,0346 0,0399 0,0236 0,0561 0,0285 0,0327 0,0245 0,0279
 0,0788 0,0823 0,0574 0,0673 0,0348 0,0810 0,0479 0,0609 0,0619 0,0354
 0,0506 0,0601 0,0417 0,0457 0,0245 0,0562 0,0222 0,0469 0,0382 0,0417
 0,0832 0,0946 0,0561 0,0654 0,0414 0,0937 0,0326 0,0525 0,0523 0,0498
 0,0429 0,0465 0,0412 0,0399 0,0293 0,0695 0,0298 0,0504 0,0421 0,0464

OMEGA se_OMEGA
 0,2080 0,0716
 0,3321 0,1267
 0,1433 0,0503
 0,1943 0,0894
 0,2159 0,1069
 0,0447 0,0150
 1,2916 0,5928
 2,1188 0,8798
 0,6188 0,2791
 1,4039 1,6267

A se_A
 0,0462 0,0180
 0,0702 0,0217
 0,0461 0,0133
 0,0684 0,0267
 0,0449 0,0164
 0,0447 0,0125
 0,2898 0,1223
 0,2778 0,1071
 0,1490 0,0444

0,5064	0,3425									
B	se_B									
0,9218	0,0229									
0,8894	0,0316									
0,9298	0,0182									
0,9046	0,0324									
0,9290	0,0246									
0,9359	0,0147									
0,6361	0,1199									
0,4271	0,1846									
0,8283	0,0472									
0,6323	0,2592									
S										
1,0000	0,7483	0,6413	0,6993	0,5506	0,5976	0,4421	0,4212	0,4668	0,2472	
0,7483	1,0000	0,6333	0,6418	0,5216	0,6388	0,4914	0,4477	0,4616	0,2175	
0,6413	0,6333	1,0000	0,5497	0,4939	0,5191	0,3868	0,3797	0,4264	0,1616	
0,6993	0,6418	0,5497	1,0000	0,5128	0,5113	0,3657	0,3718	0,4310	0,2189	
0,5506	0,5216	0,4939	0,5128	1,0000	0,4747	0,2971	0,3673	0,3592	0,1889	
0,5976	0,6388	0,5191	0,5113	0,4747	1,0000	0,4175	0,4000	0,3963	0,1908	
0,4421	0,4914	0,3868	0,3657	0,2971	0,4175	1,0000	0,3350	0,3171	0,1555	
0,4212	0,4477	0,3797	0,3718	0,3673	0,4000	0,3350	1,0000	0,3102	0,1648	
0,4668	0,4616	0,4264	0,4310	0,3592	0,3963	0,3171	0,3102	1,0000	0,1723	
0,2472	0,2175	0,1616	0,2189	0,1889	0,1908	0,1555	0,1648	0,1723	1,0000	
se_s										
0,0000	0,0219	0,0262	0,0246	0,0323	0,0277	0,0374	0,0359	0,0395	0,0428	
0,0219	0,0000	0,0262	0,0282	0,0308	0,0262	0,0377	0,0383	0,0372	0,0414	
0,0262	0,0262	0,0000	0,0296	0,0320	0,0302	0,0365	0,0350	0,0366	0,0363	
0,0246	0,0282	0,0296	0,0000	0,0330	0,0321	0,0369	0,0373	0,0377	0,0398	
0,0323	0,0308	0,0320	0,0330	0,0000	0,0341	0,0372	0,0342	0,0374	0,0384	
0,0277	0,0262	0,0302	0,0321	0,0341	0,0000	0,0388	0,0372	0,0402	0,0385	
0,0374	0,0377	0,0365	0,0369	0,0372	0,0388	0,0000	0,0412	0,0411	0,0372	
0,0359	0,0383	0,0350	0,0373	0,0342	0,0372	0,0412	0,0000	0,0387	0,0349	
0,0395	0,0372	0,0366	0,0377	0,0374	0,0402	0,0411	0,0387	0,0000	0,0409	
0,0428	0,0414	0,0363	0,0398	0,0384	0,0385	0,0372	0,0349	0,0409	0,0000	
alpha	se_alpha									
0,0004	0,0002									
beta	se_beta									
0,9053	0,0405									
nu	se_nu									
1,4919	0,1807									
2,4730	0,2792									
3,8323	0,4674									
4,0085	0,3330									
5,9250	0,6525									
7,2631	1,0552									
10,0739	1,7459									
12,2659	2,6076									
9,6979	1,1645									
7,4886	0,3337									

ПОРТФЕЛЬ №9

c se_c
 -0,0216 0,0700
 -0,0197 0,0721
 -0,0098 0,0843
 -0,0157 0,0925
 0,0845 0,0965
 -0,0027 0,0431
 -0,0752 0,0796
 -0,0703 0,0691
 -0,0797 0,0826
 0,0133 0,1439

Q
 0,0866 -0,0165 -0,0659 0,0129 -0,0130 -0,0869 -0,0454 0,0341 0,0195 -0,0335
 -0,0462 0,0862 -0,0644 -0,0579 0,0479 -0,0738 -0,0227 0,0076 0,0157 0,0095
 -0,0131 -0,0424 0,1406 -0,0470 -0,0027 -0,0749 -0,0347 -0,0188 -0,0167 0,0023
 -0,0469 -0,0181 -0,0024 0,0858 0,0144 -0,1095 -0,0304 0,0195 -0,0116 -0,0443
 -0,1052 0,0284 0,0581 0,0260 0,0494 -0,0643 -0,1017 -0,0409 -0,0383 0,0110
 0,0802 -0,0362 -0,0834 -0,0039 -0,0058 -0,0486 -0,0083 0,0167 0,0090 -0,0118
 -0,0397 0,0176 -0,0447 0,0236 -0,0078 -0,1397 0,1252 -0,0285 0,0165 -0,0584
 -0,0996 -0,0816 0,0767 0,0071 0,0385 0,0145 0,0061 0,0451 0,0054 -0,0014
 -0,0142 -0,0250 0,0387 0,0045 0,0189 -0,0512 -0,0590 0,0410 0,1091 -0,0113
 -0,0016 0,0745 -0,0708 0,0057 -0,0326 -0,0405 -0,0528 0,0204 0,0869 -0,0034

se_Q
 0,0628 0,0458 0,0754 0,0452 0,0314 0,0716 0,0271 0,0438 0,0378 0,0319
 0,0791 0,0679 0,0924 0,0435 0,0338 0,0838 0,0237 0,0533 0,0562 0,0301
 0,0672 0,0518 0,0797 0,0454 0,0327 0,0728 0,0240 0,0481 0,0445 0,0330
 0,0791 0,0724 0,1487 0,0586 0,0459 0,0808 0,0253 0,0731 0,0422 0,0432
 0,0942 0,0656 0,1098 0,0612 0,0464 0,0955 0,0365 0,0556 0,0448 0,0439
 0,0464 0,0367 0,0570 0,0267 0,0215 0,0561 0,0222 0,0352 0,0378 0,0239
 0,1042 0,0929 0,0855 0,0513 0,0396 0,0783 0,0433 0,0566 0,0705 0,0314
 0,0573 0,0493 0,0563 0,0360 0,0226 0,0523 0,0177 0,0511 0,0401 0,0303
 0,1370 0,0638 0,0712 0,0650 0,0387 0,0910 0,0293 0,0583 0,0539 0,0470
 0,0627 0,0535 0,0655 0,0578 0,0285 0,0756 0,0304 0,0552 0,0441 0,0651

OMEGA se_OMEGA
 0,1463 0,0528
 0,6752 0,2628
 0,2894 0,0766
 0,4210 0,1689
 0,2646 0,1427
 0,0530 0,0170
 1,2749 0,5025
 2,1218 0,8400
 0,6225 0,2368
 2,3568 1,4974

A se_A
 0,0492 0,0191
 0,0981 0,0305
 0,0613 0,0154
 0,0827 0,0247
 0,0540 0,0240
 0,0512 0,0138
 0,2906 0,1127
 0,2486 0,0942
 0,1381 0,0364

0,6649 0,2796
 B se_B
 0,9202 0,0255
 0,8147 0,0520
 0,8898 0,0218
 0,8800 0,0359
 0,9149 0,0352
 0,9260 0,0164
 0,6393 0,1020
 0,4376 0,1756
 0,8301 0,0398
 0,5006 0,1689
 S
 1,0000 0,6863 0,7881 0,5740 0,5262 0,5902 0,4011 0,3783 0,4231 0,1943
 0,6863 1,0000 0,7387 0,6047 0,4920 0,6133 0,4431 0,4169 0,4288 0,1983
 0,7881 0,7387 1,0000 0,6063 0,5249 0,6191 0,4324 0,4404 0,4764 0,2085
 0,5740 0,6047 0,6063 1,0000 0,4838 0,5242 0,3609 0,3432 0,4395 0,2146
 0,5262 0,4920 0,5249 0,4838 1,0000 0,4714 0,2834 0,3470 0,3526 0,1716
 0,5902 0,6133 0,6191 0,5242 0,4714 1,0000 0,4129 0,3872 0,4018 0,1894
 0,4011 0,4431 0,4324 0,3609 0,2834 0,4129 1,0000 0,3248 0,3153 0,1452
 0,3783 0,4169 0,4404 0,3432 0,3470 0,3872 0,3248 1,0000 0,3069 0,1453
 0,4231 0,4288 0,4764 0,4395 0,3526 0,4018 0,3153 0,3069 1,0000 0,1683
 0,1943 0,1983 0,2085 0,2146 0,1716 0,1894 0,1452 0,1453 0,1683 1,0000
 se_s
 0,0000 0,0256 0,0173 0,0307 0,0322 0,0295 0,0380 0,0369 0,0386 0,0394
 0,0256 0,0000 0,0212 0,0286 0,0345 0,0289 0,0372 0,0366 0,0379 0,0388
 0,0173 0,0212 0,0000 0,0290 0,0316 0,0289 0,0376 0,0353 0,0403 0,0415
 0,0307 0,0286 0,0290 0,0000 0,0328 0,0309 0,0385 0,0395 0,0387 0,0401
 0,0322 0,0345 0,0316 0,0328 0,0000 0,0342 0,0372 0,0349 0,0381 0,0384
 0,0295 0,0289 0,0289 0,0309 0,0342 0,0000 0,0397 0,0415 0,0403 0,0391
 0,0380 0,0372 0,0376 0,0385 0,0372 0,0397 0,0000 0,0418 0,0395 0,0358
 0,0369 0,0366 0,0353 0,0395 0,0349 0,0415 0,0418 0,0000 0,0400 0,0356
 0,0386 0,0379 0,0403 0,0387 0,0381 0,0403 0,0395 0,0400 0,0000 0,0402
 0,0394 0,0388 0,0415 0,0401 0,0384 0,0391 0,0358 0,0356 0,0402 0,0000
 alpha se_alpha
 0,0007 0,0002
 beta se_beta
 0,8657 0,0365
 nu se_nu
 1,4498 0,1846
 2,5863 0,2893
 3,7718 0,4784
 4,0634 0,3391
 5,4665 0,5013
 6,9742 0,8484
 8,8050 1,4651
 13,6450 3,6295
 8,5080 0,6784
 7,9221 0,4382

ПОРТФЕЛЬ №10

c	se_c
-0,0256	0,0732
0,0202	0,0920
0,1304	0,0790
0,0614	0,0804
0,0652	0,0964
0,0066	0,0513
-0,0678	0,0875
-0,0594	0,0736
-0,0860	0,0896
0,0257	0,0710

Q

0,1127	-0,0625	-0,0408	-0,0127	0,0178	-0,0983	-0,0472	0,0249	0,0322	-0,0292
-0,0013	0,0634	-0,1042	-0,0101	0,0572	-0,1265	-0,0184	0,0115	-0,0479	0,0254
-0,0515	0,0008	0,0994	-0,0332	0,0297	-0,0740	-0,0467	-0,0338	-0,0263	0,0424
0,0311	-0,0175	0,0092	0,0035	0,0642	-0,0054	-0,0459	0,0019	-0,0066	0,0002
-0,0137	-0,0510	0,0447	-0,0287	0,0949	-0,0267	-0,1025	-0,0477	-0,0255	0,0401
0,0554	0,0217	-0,0471	-0,0456	0,0174	-0,0796	-0,0183	-0,0058	0,0020	-0,0018
-0,0723	0,0811	-0,0198	0,0264	0,0053	-0,1480	0,0993	-0,0507	0,0048	-0,0462
-0,0812	0,0256	-0,0153	-0,0021	0,0557	-0,0212	-0,0038	0,0382	0,0119	0,0012
0,0345	-0,0055	0,0072	-0,0335	0,0452	-0,0686	-0,0615	0,0342	0,1030	0,0038
0,0187	0,0552	-0,0532	-0,0445	-0,0149	-0,0417	-0,0581	0,0074	0,0860	0,0291

se_Q

0,0603	0,0409	0,0427	0,0454	0,0341	0,0714	0,0284	0,0453	0,0290	0,0309
0,0919	0,0567	0,0569	0,0649	0,0451	0,0919	0,0345	0,0602	0,0465	0,0334
0,0666	0,0484	0,0530	0,0528	0,0387	0,0737	0,0235	0,0496	0,0348	0,0340
0,0729	0,0567	0,0659	0,0712	0,0465	0,0894	0,0389	0,0609	0,0393	0,0391
0,0763	0,0638	0,0603	0,0625	0,0518	0,1100	0,0411	0,0600	0,0456	0,0388
0,0447	0,0334	0,0326	0,0348	0,0255	0,0569	0,0254	0,0332	0,0238	0,0237
0,0786	0,0566	0,0517	0,0636	0,0397	0,0757	0,0477	0,0608	0,0451	0,0310
0,0438	0,0394	0,0393	0,0421	0,0253	0,0505	0,0195	0,0492	0,0316	0,0354
0,0754	0,0679	0,0566	0,0619	0,0455	0,0910	0,0306	0,0570	0,0476	0,0467
0,0550	0,0403	0,0400	0,0383	0,0289	0,0698	0,0295	0,0503	0,0399	0,0443

OMEGA se_OMEGA

0,1112	0,0314
0,4112	0,1551
0,1440	0,0551
0,2022	0,0849
0,2192	0,1175
0,0463	0,0151
1,2844	0,5490
1,9819	0,7225
0,5842	0,2520
1,2674	1,2736

A	se_A
0,0458	0,0138
0,0864	0,0270
0,0492	0,0144
0,0677	0,0246
0,0483	0,0199
0,0466	0,0130
0,2934	0,1157
0,2569	0,0897
0,1449	0,0414

0,4994	0,2841								
B	se_B								
0,9308	0,0160								
0,8640	0,0386								
0,9259	0,0204								
0,9027	0,0304								
0,9255	0,0291								
0,9326	0,0155								
0,6292	0,1113								
0,4521	0,1519								
0,8293	0,0445								
0,6445	0,2026								
S									
1,0000	0,6950	0,6309	0,6245	0,5336	0,5934	0,4130	0,3846	0,4255	0,2050
0,6950	1,0000	0,6316	0,6386	0,5204	0,6404	0,4845	0,4461	0,4654	0,2140
0,6309	0,6316	1,0000	0,5455	0,4897	0,5272	0,3865	0,3780	0,4341	0,1592
0,6245	0,6386	0,5455	1,0000	0,5068	0,5119	0,3585	0,3706	0,4347	0,2146
0,5336	0,5204	0,4897	0,5068	1,0000	0,4783	0,2940	0,3580	0,3589	0,1857
0,5934	0,6404	0,5272	0,5119	0,4783	1,0000	0,4173	0,4007	0,4016	0,1906
0,4130	0,4845	0,3865	0,3585	0,2940	0,4173	1,0000	0,3277	0,3179	0,1547
0,3846	0,4461	0,3780	0,3706	0,3580	0,4007	0,3277	1,0000	0,3120	0,1607
0,4255	0,4654	0,4341	0,4347	0,3589	0,4016	0,3179	0,3120	1,0000	0,1751
0,2050	0,2140	0,1592	0,2146	0,1857	0,1906	0,1547	0,1607	0,1751	1,0000
se_s									
0,0000	0,0241	0,0265	0,0268	0,0316	0,0294	0,0375	0,0351	0,0390	0,0388
0,0241	0,0000	0,0253	0,0270	0,0304	0,0252	0,0371	0,0377	0,0367	0,0412
0,0265	0,0253	0,0000	0,0284	0,0312	0,0296	0,0360	0,0343	0,0367	0,0365
0,0268	0,0270	0,0284	0,0000	0,0311	0,0305	0,0357	0,0362	0,0369	0,0393
0,0316	0,0304	0,0312	0,0311	0,0000	0,0335	0,0374	0,0339	0,0365	0,0384
0,0294	0,0252	0,0296	0,0305	0,0335	0,0000	0,0382	0,0372	0,0393	0,0379
0,0375	0,0371	0,0360	0,0357	0,0374	0,0382	0,0000	0,0412	0,0403	0,0361
0,0351	0,0377	0,0343	0,0362	0,0339	0,0372	0,0412	0,0000	0,0379	0,0344
0,0390	0,0367	0,0367	0,0369	0,0365	0,0393	0,0403	0,0379	0,0000	0,0405
0,0388	0,0412	0,0365	0,0393	0,0384	0,0379	0,0361	0,0344	0,0405	0,0000
alpha	se_alpha								
0,0005	0,0002								
beta	se_beta								
0,8800	0,0619								
nu	se_nu								
1,4827	0,1811								
2,5334	0,3035								
4,0330	0,5270								
4,0664	0,3365								
6,1450	0,7209								
7,2656	0,9966								
8,9825	1,2816								
13,1172	3,0737								
9,2746	1,0186								
7,7476	0,3988								

ПОРТФЕЛЬ №11

c	se_c
-0,0375	0,0854
0,0077	0,1347
0,1523	0,0866
0,0742	0,0909
0,0947	0,0952
0,0002	0,0663
-0,0769	0,0966
-0,0787	0,0766
-0,0828	0,0923
0,0362	0,0743

Q

0,0187	0,0092	-0,0148	-0,0397	0,0265	-0,0104	-0,0521	-0,0266	0,0184	-0,0413
-0,0684	0,0555	-0,0888	0,0022	0,0633	-0,0664	-0,0255	0,0081	0,0088	0,0129
-0,0604	0,0398	0,1020	-0,0409	0,0190	-0,0724	-0,0431	-0,0287	-0,0249	0,0218
-0,0783	0,0255	0,0258	0,0201	0,0544	0,0177	-0,0365	0,0043	-0,0009	-0,0202
0,0173	0,0194	0,0317	-0,0588	0,0580	-0,0529	-0,1112	-0,0309	-0,0257	0,0251
-0,0017	-0,0366	-0,0172	-0,0240	0,0146	-0,0327	-0,0098	0,0146	0,0048	-0,0153
-0,0481	-0,0150	-0,0046	0,0414	0,0047	-0,1226	0,1199	-0,0304	0,0167	-0,0697
-0,0640	-0,0722	-0,0050	0,0301	0,0520	0,0193	0,0041	0,0673	0,0141	-0,0154
-0,0578	-0,0182	0,0246	-0,0098	0,0344	-0,0181	-0,0561	0,0540	0,1110	0,0025
0,0293	0,0778	-0,0455	-0,0608	-0,0295	-0,0584	-0,0541	0,0167	0,0976	0,0021

se_Q

0,0875	0,1017	0,1249	0,0768	0,0418	0,1425	0,0303	0,0428	0,0875	0,0358
0,0697	0,1067	0,1098	0,0760	0,0424	0,1246	0,0269	0,0427	0,0776	0,0287
0,0644	0,0809	0,1027	0,0735	0,0430	0,0926	0,0234	0,0447	0,0657	0,0303
0,0719	0,0938	0,1113	0,0923	0,0463	0,0887	0,0382	0,0554	0,0932	0,0368
0,0876	0,0784	0,1106	0,0791	0,0539	0,0882	0,0415	0,0537	0,0809	0,0407
0,0445	0,0618	0,0653	0,0484	0,0293	0,0649	0,0243	0,0298	0,0440	0,0230
0,0749	0,0965	0,0986	0,0781	0,0478	0,0886	0,0450	0,0609	0,0707	0,0328
0,0461	0,0600	0,0692	0,0437	0,0243	0,0549	0,0192	0,0491	0,0502	0,0348
0,0741	0,0885	0,0941	0,0813	0,0457	0,1150	0,0319	0,0527	0,0752	0,0468
0,0417	0,0566	0,0483	0,0434	0,0305	0,0643	0,0320	0,0472	0,0472	0,0458

OMEGA se_OMEGA

0,2306	0,0785
0,4685	0,2143
0,1470	0,0522
0,2323	0,0993
0,2261	0,1113
0,0455	0,0161
1,3254	0,5469
2,2639	0,9955
0,6503	0,2702
1,9160	2,1455

A se_A

0,0484	0,0177
0,0737	0,0274
0,0474	0,0138
0,0796	0,0275
0,0462	0,0162
0,0460	0,0134
0,3022	0,1194
0,3031	0,1195
0,1533	0,0427

0,6039 0,4263
 B se_B
 0,9168 0,0235
 0,8642 0,0479
 0,9285 0,0188
 0,8905 0,0331
 0,9268 0,0246
 0,9341 0,0159
 0,6329 0,1078
 0,3990 0,2037
 0,8257 0,0433
 0,5718 0,3079
 S
 1,0000 0,7196 0,6383 0,7021 0,5474 0,5883 0,4249 0,4013 0,4571 0,2351
 0,7196 1,0000 0,6151 0,6400 0,4953 0,6070 0,4455 0,4109 0,4175 0,2023
 0,6383 0,6151 1,0000 0,5492 0,4889 0,5141 0,3733 0,3648 0,4176 0,1553
 0,7021 0,6400 0,5492 1,0000 0,5079 0,5072 0,3550 0,3555 0,4222 0,2100
 0,5474 0,4953 0,4889 0,5079 1,0000 0,4682 0,2871 0,3529 0,3479 0,1807
 0,5883 0,6070 0,5141 0,5072 0,4682 1,0000 0,4148 0,3816 0,3894 0,1910
 0,4249 0,4455 0,3733 0,3550 0,2871 0,4148 1,0000 0,3214 0,3088 0,1550
 0,4013 0,4109 0,3648 0,3555 0,3529 0,3816 0,3214 1,0000 0,2962 0,1586
 0,4571 0,4175 0,4176 0,4222 0,3479 0,3894 0,3088 0,2962 1,0000 0,1700
 0,2351 0,2023 0,1553 0,2100 0,1807 0,1910 0,1550 0,1586 0,1700 1,0000
 se_s
 0,0000 0,0245 0,0265 0,0242 0,0327 0,0286 0,0379 0,0357 0,0399 0,0423
 0,0245 0,0000 0,0282 0,0274 0,0340 0,0289 0,0366 0,0357 0,0375 0,0394
 0,0265 0,0282 0,0000 0,0296 0,0330 0,0313 0,0378 0,0349 0,0371 0,0366
 0,0242 0,0274 0,0296 0,0000 0,0333 0,0313 0,0371 0,0367 0,0379 0,0393
 0,0327 0,0340 0,0330 0,0333 0,0000 0,0351 0,0376 0,0339 0,0382 0,0372
 0,0286 0,0289 0,0313 0,0313 0,0351 0,0000 0,0395 0,0378 0,0407 0,0391
 0,0379 0,0366 0,0378 0,0371 0,0376 0,0395 0,0000 0,0419 0,0413 0,0382
 0,0357 0,0357 0,0349 0,0367 0,0339 0,0378 0,0419 0,0000 0,0391 0,0346
 0,0399 0,0375 0,0371 0,0379 0,0382 0,0407 0,0413 0,0391 0,0000 0,0408
 0,0423 0,0394 0,0366 0,0393 0,0372 0,0391 0,0382 0,0346 0,0408 0,0000
 alpha se_alpha
 0,0004 0,0002
 beta se_beta
 0,9091 0,0520
 nu se_nu
 1,4543 0,1755
 2,4717 0,2755
 3,6213 0,4104
 3,9036 0,3120
 5,6813 0,5890
 7,0046 0,9377
 11,0873 2,2848
 11,5285 2,2565
 8,7169 0,7212
 7,5231 0,3686

ПОРТФЕЛЬ №12

c se_c
 -0,0136 0,1204
 0,0051 0,2058
 0,1529 0,1167
 0,0823 0,1258
 0,0840 0,1343
 0,0080 0,0795
 -0,0753 0,1121
 -0,0686 0,0952
 -0,0819 0,1193
 0,0298 0,0896

Q
 0,0960 -0,0258 -0,0415 -0,0181 0,0028 -0,1070 -0,0424 0,0281 0,0267 -0,0485
 -0,0338 0,0501 -0,1078 -0,0070 0,0588 -0,0804 -0,0216 0,0041 0,0133 0,0093
 -0,0598 0,0366 0,0928 -0,0372 0,0145 -0,0730 -0,0419 -0,0284 -0,0302 0,0207
 0,0136 0,0138 0,0058 -0,0106 0,0547 -0,0054 -0,0350 0,0035 -0,0045 -0,0214
 -0,0484 0,0461 0,0268 -0,0457 0,0691 -0,0554 -0,1010 -0,0458 -0,0229 0,0165
 0,0682 -0,0447 -0,0348 -0,0334 0,0099 -0,0583 -0,0052 0,0126 0,0049 -0,0180
 -0,0526 -0,0099 -0,0022 0,0393 -0,0005 -0,1242 0,1273 -0,0324 0,0100 -0,0699
 -0,0578 -0,0726 -0,0033 0,0207 0,0477 0,0211 0,0056 0,0594 0,0117 -0,0117
 0,0337 -0,0362 0,0137 -0,0328 0,0308 -0,0470 -0,0517 0,0511 0,1071 -0,0042
 0,0079 0,0800 -0,0498 -0,0495 -0,0246 -0,0466 -0,0539 0,0126 0,0934 0,0082

se_Q
 0,0616 0,0583 0,0537 0,0477 0,0387 0,0659 0,0260 0,0463 0,0281 0,0341
 0,0779 0,0703 0,0626 0,0652 0,0405 0,0795 0,0240 0,0512 0,0371 0,0315
 0,0713 0,0600 0,0624 0,0590 0,0383 0,0696 0,0205 0,0470 0,0355 0,0345
 0,0756 0,0822 0,0849 0,0625 0,0482 0,0699 0,0353 0,0548 0,0434 0,0411
 0,0883 0,0701 0,0668 0,0650 0,0511 0,0912 0,0384 0,0637 0,0434 0,0466
 0,0443 0,0416 0,0366 0,0376 0,0270 0,0517 0,0222 0,0344 0,0213 0,0249
 0,0855 0,0853 0,0562 0,0610 0,0385 0,0714 0,0457 0,0522 0,0576 0,0348
 0,0460 0,0545 0,0427 0,0362 0,0238 0,0507 0,0175 0,0491 0,0319 0,0332
 0,0758 0,0750 0,0964 0,0723 0,0457 0,0873 0,0294 0,0571 0,0485 0,0590
 0,0620 0,0568 0,0425 0,0377 0,0357 0,0662 0,0310 0,0562 0,0402 0,0487

OMEGA se_OMEGA
 0,1228 0,0391
 0,4487 0,2320
 0,1439 0,0556
 0,2274 0,0898
 0,2317 0,1225
 0,0472 0,0161
 1,2845 0,5452
 2,1710 0,9185
 0,6179 0,2721
 1,7694 2,7544

A se_A
 0,0478 0,0153
 0,0745 0,0314
 0,0494 0,0140
 0,0771 0,0244
 0,0494 0,0195
 0,0479 0,0135
 0,2977 0,1191
 0,2825 0,1070
 0,1505 0,0414

0,5946	0,5353								
B	se_B								
0,9268	0,0185								
0,8646	0,0542								
0,9265	0,0196								
0,8923	0,0292								
0,9229	0,0287								
0,9310	0,0161								
0,6343	0,1102								
0,4155	0,1882								
0,8251	0,0442								
0,5834	0,3956								
S									
1,0000	0,6793	0,6282	0,6247	0,5344	0,5862	0,4012	0,3684	0,4164	0,1978
0,6793	1,0000	0,6171	0,6350	0,4945	0,6092	0,4400	0,4072	0,4189	0,1975
0,6282	0,6171	1,0000	0,5470	0,4856	0,5216	0,3729	0,3640	0,4259	0,1527
0,6247	0,6350	0,5470	1,0000	0,5025	0,5076	0,3470	0,3546	0,4250	0,2047
0,5344	0,4945	0,4856	0,5025	1,0000	0,4745	0,2856	0,3446	0,3492	0,1781
0,5862	0,6092	0,5216	0,5076	0,4745	1,0000	0,4146	0,3818	0,3950	0,1917
0,4012	0,4400	0,3729	0,3470	0,2856	0,4146	1,0000	0,3143	0,3111	0,1546
0,3684	0,4072	0,3640	0,3546	0,3446	0,3818	0,3143	1,0000	0,2981	0,1537
0,4164	0,4189	0,4259	0,4250	0,3492	0,3950	0,3111	0,2981	1,0000	0,1741
0,1978	0,1975	0,1527	0,2047	0,1781	0,1917	0,1546	0,1537	0,1741	1,0000
se_s									
0,0000	0,0256	0,0271	0,0271	0,0317	0,0303	0,0376	0,0358	0,0397	0,0401
0,0256	0,0000	0,0272	0,0264	0,0336	0,0281	0,0354	0,0349	0,0370	0,0396
0,0271	0,0272	0,0000	0,0289	0,0323	0,0305	0,0363	0,0344	0,0373	0,0382
0,0271	0,0264	0,0289	0,0000	0,0314	0,0307	0,0350	0,0367	0,0375	0,0393
0,0317	0,0336	0,0323	0,0314	0,0000	0,0339	0,0374	0,0335	0,0374	0,0379
0,0303	0,0281	0,0305	0,0307	0,0339	0,0000	0,0381	0,0380	0,0400	0,0397
0,0376	0,0354	0,0363	0,0350	0,0374	0,0381	0,0000	0,0407	0,0396	0,0371
0,0358	0,0349	0,0344	0,0367	0,0335	0,0380	0,0407	0,0000	0,0388	0,0345
0,0397	0,0370	0,0373	0,0375	0,0374	0,0400	0,0396	0,0388	0,0000	0,0410
0,0401	0,0396	0,0382	0,0393	0,0379	0,0397	0,0371	0,0345	0,0410	0,0000
alpha	se_alpha								
0,0005	0,0003								
beta	se_beta								
0,8497	0,0754								
nu	se_nu								
1,4456	0,1778								
2,5375	0,2974								
3,7469	0,4352								
3,9616	0,3095								
5,7212	0,5606								
7,0365	0,9122								
9,5075	1,5397								
12,1826	2,7220								
8,5821	0,6696								
7,7814	0,4464								

ПОРТФЕЛЬ №13

c se_c
 -0,0864 0,2349
 -0,0051 0,3988
 0,1254 0,1976
 -0,0473 0,2528
 0,0591 0,1788
 -0,0178 0,1297
 -0,0744 0,2000
 -0,0757 0,1297
 -0,0915 0,1788
 0,0205 0,0902

Q
 0,0510 -0,0480 -0,0202 0,0087 0,0152 -0,0136 -0,0466 -0,0207 0,0082 -0,0197
 -0,0509 0,0959 -0,0757 -0,0678 0,0502 -0,0776 -0,0155 0,0330 -0,0435 0,0238
 -0,0515 -0,0126 0,0885 0,0654 0,0019 -0,0855 -0,0466 -0,0288 -0,0408 0,0349
 -0,0246 0,0075 -0,0411 0,0986 0,0287 -0,1156 -0,0407 0,0223 -0,0256 -0,0214
 0,0358 -0,0710 0,0272 0,0352 0,0547 -0,0389 -0,1095 -0,0231 -0,0452 0,0369
 -0,0247 0,0362 -0,0345 -0,0088 0,0101 -0,0576 -0,0216 -0,0001 -0,0024 0,0008
 -0,0597 0,1017 -0,0270 0,0109 0,0024 -0,1673 0,0948 -0,0434 0,0113 -0,0484
 -0,0786 0,0314 -0,0236 0,0124 0,0510 -0,0290 -0,0024 0,0476 0,0122 0,0034
 -0,0614 0,0124 -0,0004 0,0191 0,0351 -0,0385 -0,0614 0,0456 0,1085 0,0085
 0,0090 0,0434 -0,0642 0,0073 -0,0195 -0,0589 -0,0589 0,0321 0,0868 0,0107

se_Q
 0,0654 0,0716 0,0550 0,0395 0,0475 0,1415 0,0307 0,0687 0,0462 0,0592
 0,0633 0,0877 0,0739 0,0530 0,0495 0,1373 0,0351 0,0784 0,0529 0,0493
 0,0625 0,0759 0,0674 0,0461 0,0352 0,0917 0,0235 0,0630 0,0350 0,0422
 0,0780 0,1431 0,0632 0,0574 0,0520 0,1300 0,0292 0,0914 0,0402 0,0661
 0,0864 0,0782 0,0912 0,0625 0,0491 0,1183 0,0405 0,0801 0,0488 0,0555
 0,0394 0,0582 0,0377 0,0273 0,0267 0,0733 0,0264 0,0555 0,0232 0,0362
 0,0645 0,0709 0,0665 0,0508 0,0322 0,0944 0,0465 0,0727 0,0638 0,0371
 0,0419 0,0465 0,0457 0,0339 0,0236 0,0539 0,0205 0,0591 0,0339 0,0439
 0,0641 0,0707 0,0756 0,0554 0,0396 0,0895 0,0295 0,0632 0,0504 0,0752
 0,0455 0,0467 0,0381 0,0413 0,0272 0,0705 0,0276 0,0509 0,0395 0,0497

OMEGA se_OMEGA
 0,1682 0,0654
 0,2464 0,1145
 0,1339 0,0500
 0,2961 0,1118
 0,1881 0,1002
 0,0417 0,0140
 1,1354 0,6670
 1,8943 0,7568
 0,5258 0,2500
 1,3477 1,6478

A se_A
 0,0426 0,0180
 0,0592 0,0227
 0,0465 0,0141
 0,0647 0,0162
 0,0419 0,0167
 0,0431 0,0119
 0,2617 0,1452
 0,2468 0,0933
 0,1368 0,0423

0,4907 0,3474
 B se_B
 0,9304 0,0234
 0,9085 0,0335
 0,9305 0,0193
 0,9083 0,0235
 0,9342 0,0252
 0,9386 0,0142
 0,6666 0,1486
 0,4744 0,1637
 0,8401 0,0462
 0,6490 0,2485
 S
 1,0000 0,7500 0,6443 0,6222 0,5502 0,6008 0,4405 0,4170 0,4717 0,2401
 0,7500 1,0000 0,6405 0,6142 0,5229 0,6416 0,4919 0,4488 0,4648 0,2091
 0,6443 0,6405 1,0000 0,5642 0,4930 0,5264 0,3861 0,3793 0,4327 0,1590
 0,6222 0,6142 0,5642 1,0000 0,4973 0,5301 0,3695 0,3549 0,4500 0,2155
 0,5502 0,5229 0,4930 0,4973 1,0000 0,4786 0,2988 0,3642 0,3631 0,1814
 0,6008 0,6416 0,5264 0,5301 0,4786 1,0000 0,4207 0,4005 0,4009 0,1858
 0,4405 0,4919 0,3861 0,3695 0,2988 0,4207 1,0000 0,3339 0,3183 0,1442
 0,4170 0,4488 0,3793 0,3549 0,3642 0,4005 0,3339 1,0000 0,3122 0,1513
 0,4717 0,4648 0,4327 0,4500 0,3631 0,4009 0,3183 0,3122 1,0000 0,1651
 0,2401 0,2091 0,1590 0,2155 0,1814 0,1858 0,1442 0,1513 0,1651 1,0000
 se_s
 0,0000 0,0215 0,0262 0,0273 0,0327 0,0278 0,0374 0,0365 0,0395 0,0431
 0,0215 0,0000 0,0256 0,0290 0,0315 0,0263 0,0378 0,0394 0,0376 0,0400
 0,0262 0,0256 0,0000 0,0290 0,0325 0,0302 0,0364 0,0357 0,0369 0,0363
 0,0273 0,0290 0,0290 0,0000 0,0331 0,0315 0,0374 0,0387 0,0377 0,0412
 0,0327 0,0315 0,0325 0,0331 0,0000 0,0345 0,0369 0,0343 0,0376 0,0396
 0,0278 0,0263 0,0302 0,0315 0,0345 0,0000 0,0385 0,0379 0,0406 0,0378
 0,0374 0,0378 0,0364 0,0374 0,0369 0,0385 0,0000 0,0400 0,0412 0,0364
 0,0365 0,0394 0,0357 0,0387 0,0343 0,0379 0,0400 0,0000 0,0380 0,0343
 0,0395 0,0376 0,0369 0,0377 0,0376 0,0406 0,0412 0,0380 0,0000 0,0390
 0,0431 0,0400 0,0363 0,0412 0,0396 0,0378 0,0364 0,0343 0,0390 0,0000
 alpha se_alpha
 0,0005 0,0002
 beta se_beta
 0,8808 0,0510
 nu se_nu
 1,4317 0,1803
 2,5134 0,2915
 3,9989 0,5602
 4,0729 0,3552
 5,9255 0,6705
 7,3267 1,1055
 8,8906 1,4414
 13,3914 3,4482
 10,5160 1,6313
 7,7347 0,3752

ПОРТФЕЛЬ №14

c	se_c
-0,0447	0,0754
-0,0102	0,1132
0,1211	0,0825
-0,0482	0,1203
0,0502	0,0984
-0,0098	0,0612
-0,0732	0,0945
-0,0639	0,0740
-0,0913	0,0939
0,0179	0,0781

Q

0,0900	-0,0628	-0,0417	0,0095	0,0097	-0,1017	-0,0467	0,0389	0,0325	-0,0222
-0,0088	0,0879	-0,0912	-0,0779	0,0591	-0,1154	-0,0158	0,0262	-0,0298	0,0248
-0,0835	-0,0123	0,0849	0,0574	0,0100	-0,0810	-0,0492	-0,0292	-0,0336	0,0452
-0,0388	0,0082	-0,0500	0,0926	0,0400	-0,1198	-0,0401	0,0168	-0,0130	-0,0182
-0,0474	-0,0502	0,0366	0,0347	0,0771	-0,0391	-0,1060	-0,0387	-0,0323	0,0408
0,0366	0,0236	-0,0474	-0,0177	0,0091	-0,0797	-0,0214	-0,0022	0,0026	0,0000
-0,0682	0,0957	-0,0234	0,0065	0,0057	-0,1639	0,0984	-0,0445	0,0095	-0,0427
-0,0917	0,0349	-0,0221	0,0041	0,0516	-0,0241	-0,0019	0,0374	0,0161	0,0077
0,0044	-0,0085	-0,0106	0,0085	0,0407	-0,0561	-0,0619	0,0402	0,1111	0,0039
-0,0011	0,0408	-0,0682	0,0100	-0,0123	-0,0504	-0,0577	0,0252	0,0833	0,0160

se_Q

0,0515	0,0430	0,0457	0,0326	0,0294	0,0654	0,0266	0,0412	0,0265	0,0302
0,0588	0,0591	0,0633	0,0444	0,0362	0,0815	0,0329	0,0530	0,0462	0,0355
0,0570	0,0554	0,0574	0,0390	0,0313	0,0705	0,0217	0,0466	0,0313	0,0342
0,0712	0,0681	0,0643	0,0478	0,0436	0,0803	0,0259	0,0647	0,0354	0,0430
0,0742	0,0625	0,0653	0,0512	0,0449	0,0874	0,0370	0,0573	0,0438	0,0382
0,0384	0,0353	0,0358	0,0265	0,0218	0,0519	0,0245	0,0322	0,0225	0,0257
0,0674	0,0535	0,0542	0,0474	0,0334	0,0735	0,0470	0,0596	0,0410	0,0301
0,0434	0,0370	0,0379	0,0306	0,0228	0,0475	0,0184	0,0476	0,0313	0,0345
0,0625	0,0564	0,0670	0,0457	0,0382	0,0883	0,0284	0,0542	0,0446	0,0468
0,0479	0,0416	0,0359	0,0383	0,0240	0,0653	0,0277	0,0478	0,0395	0,0441

OMEGA se_OMEGA

0,0900	0,0264
0,3195	0,1448
0,1336	0,0550
0,3101	0,1179
0,1937	0,1151
0,0434	0,0143
1,1367	0,6017
1,7974	0,6345
0,4829	0,2233
1,2748	1,6385

A	se_A
0,0463	0,0132
0,0790	0,0289
0,0507	0,0154
0,0711	0,0180
0,0463	0,0214
0,0461	0,0127
0,2688	0,1352
0,2340	0,0804
0,1317	0,0385

0,4889 0,3558
 B se_B
 0,9341 0,0144
 0,8810 0,0413
 0,9262 0,0215
 0,8999 0,0260
 0,9300 0,0310
 0,9344 0,0152
 0,6577 0,1365
 0,4917 0,1365
 0,8436 0,0434
 0,6531 0,2486
 S
 1,0000 0,6958 0,6332 0,5766 0,5288 0,5962 0,4118 0,3877 0,4262 0,1948
 0,6958 1,0000 0,6374 0,6108 0,5222 0,6409 0,4840 0,4481 0,4666 0,2036
 0,6332 0,6374 1,0000 0,5628 0,4897 0,5324 0,3851 0,3822 0,4398 0,1535
 0,5766 0,6108 0,5628 1,0000 0,4949 0,5338 0,3676 0,3554 0,4492 0,2151
 0,5288 0,5222 0,4897 0,4949 1,0000 0,4819 0,2951 0,3597 0,3625 0,1766
 0,5962 0,6409 0,5324 0,5338 0,4819 1,0000 0,4191 0,4036 0,4052 0,1848
 0,4118 0,4840 0,3851 0,3676 0,2951 0,4191 1,0000 0,3280 0,3178 0,1411
 0,3877 0,4481 0,3822 0,3554 0,3597 0,4036 0,3280 1,0000 0,3161 0,1483
 0,4262 0,4666 0,4398 0,4492 0,3625 0,4052 0,3178 0,3161 1,0000 0,1691
 0,1948 0,2036 0,1535 0,2151 0,1766 0,1848 0,1411 0,1483 0,1691 1,0000
 se_s
 0,0000 0,0236 0,0261 0,0293 0,0315 0,0285 0,0363 0,0348 0,0383 0,0391
 0,0236 0,0000 0,0246 0,0279 0,0297 0,0247 0,0365 0,0372 0,0363 0,0410
 0,0261 0,0246 0,0000 0,0276 0,0310 0,0289 0,0351 0,0337 0,0361 0,0373
 0,0293 0,0279 0,0276 0,0000 0,0319 0,0295 0,0366 0,0371 0,0362 0,0427
 0,0315 0,0297 0,0310 0,0319 0,0000 0,0329 0,0362 0,0327 0,0366 0,0410
 0,0285 0,0247 0,0289 0,0295 0,0329 0,0000 0,0376 0,0368 0,0384 0,0381
 0,0363 0,0365 0,0351 0,0366 0,0362 0,0376 0,0000 0,0398 0,0401 0,0357
 0,0348 0,0372 0,0337 0,0371 0,0327 0,0368 0,0398 0,0000 0,0373 0,0348
 0,0383 0,0363 0,0361 0,0362 0,0366 0,0384 0,0401 0,0373 0,0000 0,0392
 0,0391 0,0410 0,0373 0,0427 0,0410 0,0381 0,0357 0,0348 0,0392 0,0000
 alpha se_alpha
 0,0005 0,0003
 beta se_beta
 0,8594 0,0726
 nu se_nu
 1,4254 0,1836
 2,5906 0,3102
 4,2348 0,6130
 4,1168 0,3539
 6,0519 0,6729
 7,1173 0,9212
 9,2504 1,6270
 15,0228 4,4271
 9,1491 1,0254
 8,0843 0,4483

ПОРТФЕЛЬ №15

c	se_c
-0,0528	0,0774
-0,0038	0,0903
0,1508	0,0745
-0,0172	0,1042
0,0806	0,0956
-0,0088	0,0465
-0,0720	0,0862
-0,0821	0,0712
-0,0788	0,0843
0,0325	0,0696

Q	se_Q
0,0184	0,0082
-0,0228	0,0006
0,0100	-0,0267
-0,0399	-0,0178
0,0053	-0,0362
-0,0291	0,0625
-0,0983	-0,0428
0,0599	-0,0586
-0,0231	0,0189
0,0117	0,0210
-0,0739	0,0219
0,0811	0,0587
-0,0055	-0,0854
-0,0399	-0,0229
-0,0417	0,0255
-0,0168	-0,0353
-0,0368	0,0915
0,0174	-0,0952
-0,0313	0,0430
-0,0158	-0,0390
0,0038	0,0052
0,0170	0,0264
0,0380	-0,0716
-0,1048	-0,0221
-0,0433	0,0285
0,0018	-0,0408
-0,0230	-0,0022
0,0058	-0,0360
-0,0103	0,0167
0,0033	-0,0125
-0,0227	-0,0051
-0,0144	0,0214
0,0001	-0,1370
0,1163	-0,0232
0,0147	-0,0639
-0,0385	-0,0716
-0,0146	0,0173
0,0440	0,0154
0,0046	0,0672
0,0147	-0,0028
-0,0512	-0,0164
0,0031	0,0109
0,0269	-0,0185
-0,0535	0,0579
0,1141	0,0060
0,0014	0,0685
-0,0618	0,0039
-0,0274	-0,0694
-0,0557	0,0319
0,0931	-0,0020

OMEGA	se_OMEGA
0,0627	0,0521
0,0527	0,0416
0,0322	0,0641
0,0262	0,0428
0,0430	0,0398
0,0672	0,0636
0,0534	0,0424
0,0359	0,0780
0,0233	0,0448
0,0418	0,0322
0,0559	0,0473
0,0499	0,0421
0,0326	0,0667
0,0199	0,0439
0,0374	0,0328
0,0735	0,0697
0,0576	0,0501
0,0429	0,0749
0,0263	0,0633
0,0404	0,0466
0,0897	0,0749
0,0603	0,0554
0,0460	0,0840
0,0370	0,0556
0,0449	0,0438
0,0419	0,0368
0,0328	0,0296
0,0219	0,0513
0,0223	0,0306
0,0218	0,0252
0,0733	0,0605
0,0513	0,0505
0,0338	0,0721
0,0446	0,0542
0,0471	0,0339
0,0417	0,0498
0,0354	0,0322
0,0220	0,0483
0,0181	0,0481
0,0314	0,0328
0,0651	0,0589
0,0599	0,0518
0,0390	0,0898
0,0289	0,0524
0,0485	0,0517
0,0435	0,0501
0,0390	0,0463
0,0275	0,0630
0,0281	0,0435
0,0389	0,0543

A	se_A
0,2033	0,0774
0,3973	0,2298
0,1408	0,0535
0,3106	0,1099
0,2053	0,1075
0,0437	0,0154
1,2126	0,5527
2,0656	0,8610
0,5531	0,2454
1,8065	2,7842

0,5724 0,5442
 B se_B
 0,9221 0,0239
 0,8781 0,0540
 0,9280 0,0198
 0,9056 0,0227
 0,9298 0,0256
 0,9354 0,0158
 0,6536 0,1181
 0,4438 0,1789
 0,8388 0,0423
 0,5957 0,3923
 S
 1,0000 0,7183 0,6415 0,6247 0,5493 0,5917 0,4240 0,3986 0,4637 0,2320
 0,7183 1,0000 0,6221 0,6056 0,4981 0,6138 0,4508 0,4146 0,4210 0,1967
 0,6415 0,6221 1,0000 0,5667 0,4894 0,5211 0,3740 0,3642 0,4242 0,1545
 0,6247 0,6056 0,5667 1,0000 0,4957 0,5288 0,3652 0,3427 0,4437 0,2148
 0,5493 0,4981 0,4894 0,4957 1,0000 0,4728 0,2898 0,3492 0,3546 0,1775
 0,5917 0,6138 0,5211 0,5288 0,4728 1,0000 0,4174 0,3846 0,3957 0,1883
 0,4240 0,4508 0,3740 0,3652 0,2898 0,4174 1,0000 0,3214 0,3114 0,1445
 0,3986 0,4146 0,3642 0,3427 0,3492 0,3846 0,3214 1,0000 0,3009 0,1465
 0,4637 0,4210 0,4242 0,4437 0,3546 0,3957 0,3114 0,3009 1,0000 0,1646
 0,2320 0,1967 0,1545 0,2148 0,1775 0,1883 0,1445 0,1465 0,1646 1,0000
 se_s
 0,0000 0,0248 0,0263 0,0270 0,0320 0,0279 0,0374 0,0361 0,0390 0,0420
 0,0248 0,0000 0,0274 0,0281 0,0333 0,0281 0,0360 0,0356 0,0371 0,0374
 0,0263 0,0274 0,0000 0,0285 0,0326 0,0305 0,0373 0,0351 0,0368 0,0368
 0,0270 0,0281 0,0285 0,0000 0,0321 0,0305 0,0381 0,0380 0,0376 0,0408
 0,0320 0,0333 0,0326 0,0321 0,0000 0,0337 0,0366 0,0330 0,0376 0,0379
 0,0279 0,0281 0,0305 0,0305 0,0337 0,0000 0,0386 0,0379 0,0402 0,0371
 0,0374 0,0360 0,0373 0,0381 0,0366 0,0386 0,0000 0,0409 0,0408 0,0368
 0,0361 0,0356 0,0351 0,0380 0,0330 0,0379 0,0409 0,0000 0,0385 0,0345
 0,0390 0,0371 0,0368 0,0376 0,0376 0,0402 0,0408 0,0385 0,0000 0,0387
 0,0420 0,0374 0,0368 0,0408 0,0379 0,0371 0,0368 0,0345 0,0387 0,0000
 alpha se_alpha
 0,0005 0,0002
 beta se_beta
 0,8798 0,0536
 nu se_nu
 1,4107 0,1687
 2,5085 0,2794
 3,7099 0,4599
 3,9598 0,3244
 5,7013 0,5782
 7,2598 1,0403
 10,0920 2,0475
 11,8785 2,5422
 8,7804 0,7535
 7,7280 0,4031

ПОРТФЕЛЬ №16

c	se_c
-0,0325	0,1357
-0,0167	0,2023
0,1448	0,1351
-0,0225	0,1931
0,0691	0,1464
-0,0044	0,1161
-0,0784	0,1327
-0,0714	0,1024
-0,0844	0,1319
0,0238	0,0830

Q

0,0687	-0,0283	-0,0390	0,0067	-0,0056	-0,1000	-0,0439	0,0431	0,0234	-0,0388
-0,0527	0,0687	-0,1044	-0,0495	0,0601	-0,0496	-0,0243	0,0156	0,0239	0,0166
-0,0957	0,0211	0,0802	0,0501	-0,0062	-0,0669	-0,0452	-0,0229	-0,0410	0,0241
-0,0409	-0,0107	-0,0475	0,0845	0,0201	-0,0955	-0,0325	0,0386	-0,0052	-0,0461
-0,0823	0,0324	0,0241	0,0243	0,0508	-0,0564	-0,1047	-0,0360	-0,0312	0,0210
0,0513	-0,0478	-0,0343	-0,0075	0,0011	-0,0485	-0,0096	0,0163	0,0050	-0,0151
-0,0500	0,0063	-0,0089	0,0209	-0,0034	-0,1295	0,1195	-0,0241	0,0126	-0,0629
-0,0559	-0,0691	-0,0097	0,0128	0,0417	0,0264	0,0052	0,0621	0,0170	-0,0027
0,0007	-0,0253	-0,0036	0,0009	0,0247	-0,0268	-0,0539	0,0527	0,1149	-0,0018
-0,0162	0,0713	-0,0661	0,0052	-0,0216	-0,0569	-0,0562	0,0264	0,0919	-0,0018

se_Q

0,0586	0,0503	0,0448	0,0344	0,0315	0,0680	0,0261	0,0406	0,0331	0,0305
0,0690	0,0671	0,0522	0,0385	0,0366	0,0888	0,0237	0,0461	0,0507	0,0307
0,0648	0,0491	0,0512	0,0388	0,0330	0,0711	0,0199	0,0433	0,0407	0,0337
0,0806	0,0875	0,0558	0,0486	0,0468	0,0785	0,0249	0,0664	0,0559	0,0427
0,0791	0,0601	0,0595	0,0492	0,0480	0,0926	0,0357	0,0559	0,0442	0,0415
0,0414	0,0372	0,0322	0,0273	0,0256	0,0555	0,0229	0,0309	0,0273	0,0234
0,0758	0,0711	0,0523	0,0477	0,0383	0,0724	0,0447	0,0561	0,0439	0,0324
0,0470	0,0495	0,0400	0,0308	0,0229	0,0532	0,0182	0,0479	0,0360	0,0326
0,0834	0,0633	0,0599	0,0455	0,0402	0,0892	0,0285	0,0538	0,0532	0,0499
0,0673	0,0561	0,0385	0,0461	0,0299	0,0632	0,0282	0,0422	0,0425	0,0491

OMEGA se_OMEGA

0,1042	0,0342
0,3896	0,2416
0,1344	0,0565
0,3148	0,1152
0,2090	0,1196
0,0447	0,0156
1,1922	0,5480
2,0062	0,7745
0,5083	0,2274
1,8326	3,5323

A se_A

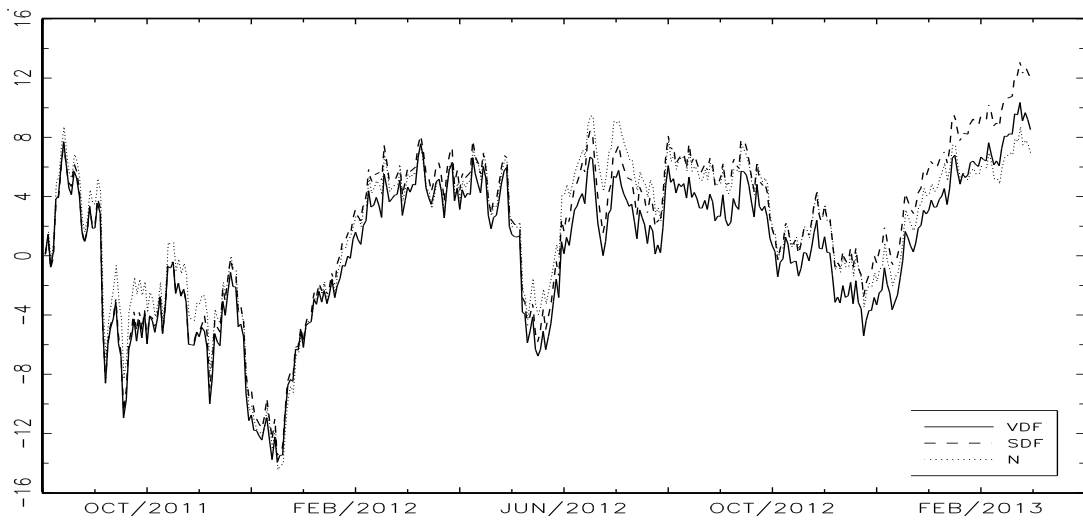
0,0492	0,0146
0,0723	0,0338
0,0515	0,0151
0,0710	0,0172
0,0485	0,0210
0,0481	0,0135
0,2860	0,1291
0,2551	0,0919
0,1365	0,0375

0,5932 0,6912
 B se_B
 0,9289 0,0168
 0,8738 0,0596
 0,9263 0,0210
 0,9005 0,0247
 0,9263 0,0305
 0,9320 0,0163
 0,6493 0,1200
 0,4548 0,1607
 0,8411 0,0408
 0,5864 0,4816
 S
 1,0000 0,6771 0,6284 0,5751 0,5302 0,5883 0,3998 0,3710 0,4162 0,1895
 0,6771 1,0000 0,6221 0,6065 0,4962 0,6148 0,4452 0,4117 0,4205 0,1896
 0,6284 0,6221 1,0000 0,5661 0,4850 0,5263 0,3718 0,3662 0,4310 0,1481
 0,5751 0,6065 0,5661 1,0000 0,4923 0,5332 0,3649 0,3439 0,4423 0,2127
 0,5302 0,4962 0,4850 0,4923 1,0000 0,4776 0,2875 0,3457 0,3546 0,1722
 0,5883 0,6148 0,5263 0,5332 0,4776 1,0000 0,4160 0,3857 0,4003 0,1869
 0,3998 0,4452 0,3718 0,3649 0,2875 0,4160 1,0000 0,3183 0,3121 0,1410
 0,3710 0,4117 0,3662 0,3439 0,3457 0,3857 0,3183 1,0000 0,3040 0,1428
 0,4162 0,4205 0,4310 0,4423 0,3546 0,4003 0,3121 0,3040 1,0000 0,1693
 0,1895 0,1896 0,1481 0,2127 0,1722 0,1869 0,1410 0,1428 0,1693 1,0000
 se_s
 0,0000 0,0261 0,0276 0,0299 0,0316 0,0298 0,0373 0,0360 0,0391 0,0384
 0,0261 0,0000 0,0271 0,0275 0,0335 0,0277 0,0349 0,0353 0,0365 0,0381
 0,0276 0,0271 0,0000 0,0280 0,0320 0,0303 0,0365 0,0347 0,0373 0,0391
 0,0299 0,0275 0,0280 0,0000 0,0317 0,0297 0,0371 0,0382 0,0374 0,0447
 0,0316 0,0335 0,0320 0,0317 0,0000 0,0333 0,0364 0,0331 0,0370 0,0407
 0,0298 0,0277 0,0303 0,0297 0,0333 0,0000 0,0376 0,0385 0,0393 0,0377
 0,0373 0,0349 0,0365 0,0371 0,0364 0,0376 0,0000 0,0406 0,0396 0,0358
 0,0360 0,0353 0,0347 0,0382 0,0331 0,0385 0,0406 0,0000 0,0378 0,0361
 0,0391 0,0365 0,0373 0,0374 0,0370 0,0393 0,0396 0,0378 0,0000 0,0389
 0,0384 0,0381 0,0391 0,0447 0,0407 0,0377 0,0358 0,0361 0,0389 0,0000
 alpha se_alpha
 0,0006 0,0003
 beta se_beta
 0,8494 0,0753
 nu se_nu
 1,3951 0,1830
 2,5869 0,2964
 3,8688 0,4961
 4,0163 0,3249
 5,7182 0,5592
 7,0464 0,9011
 10,3960 2,3140
 12,7371 3,2854
 8,3080 0,6087
 8,0520 0,4721

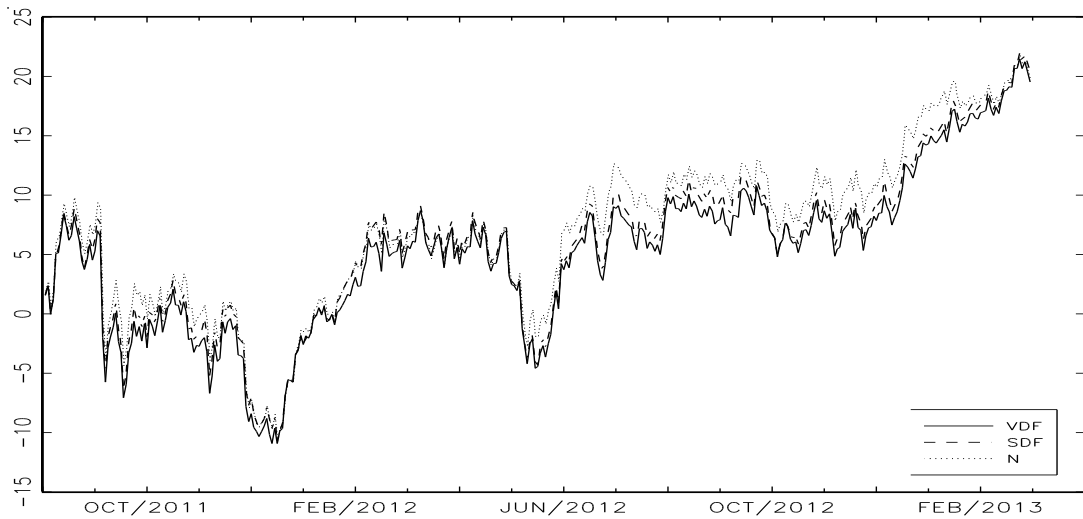
II 2.4 Динамика стоимости AMV, CMV и CME портфелей

AMV портфели

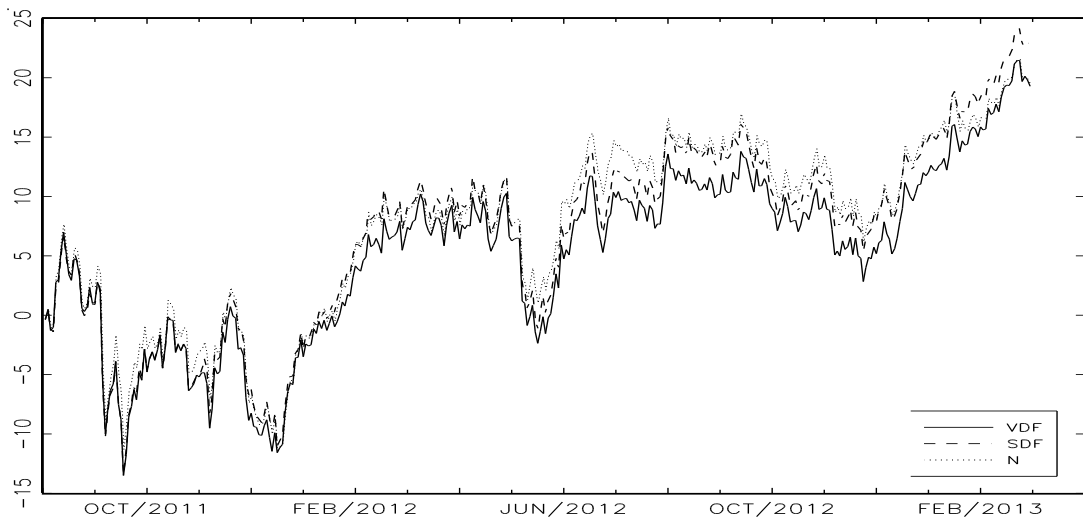
AMV портфель №1



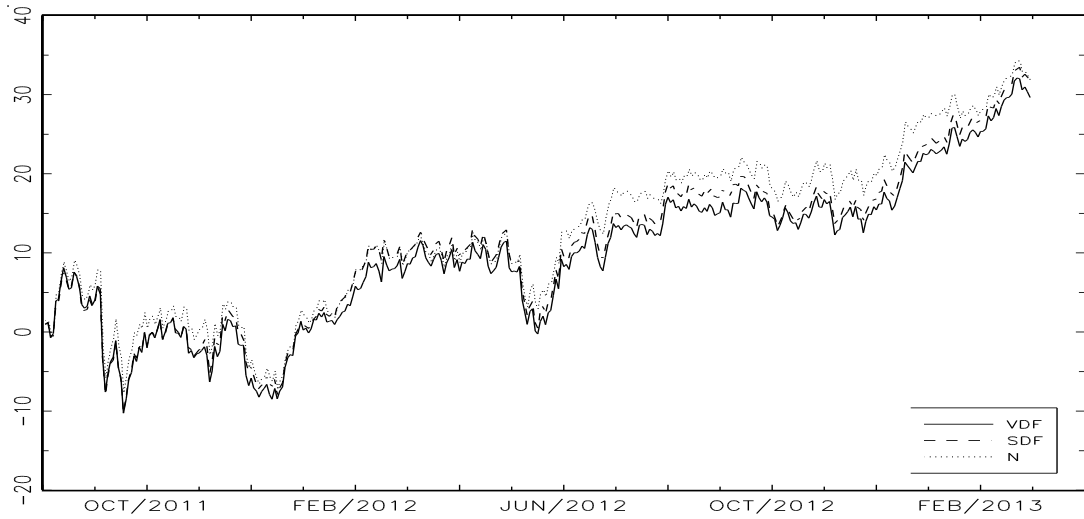
AMV портфель №2



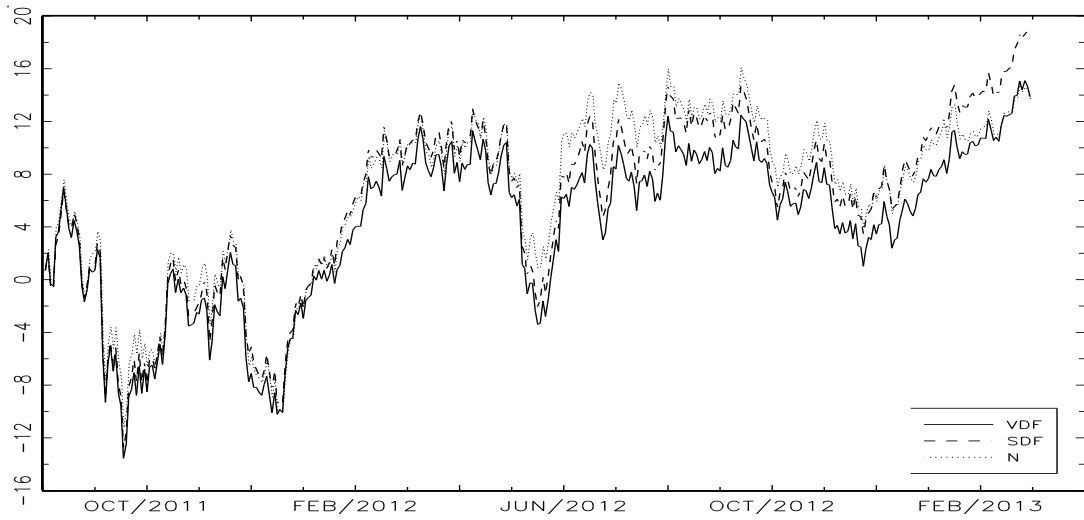
AMV портфель №3



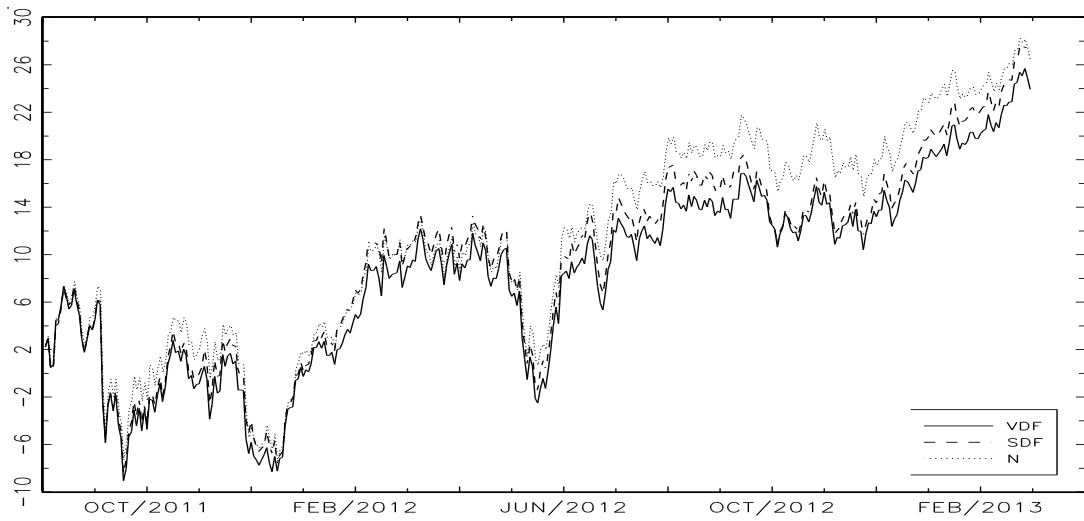
AMV портфель №4



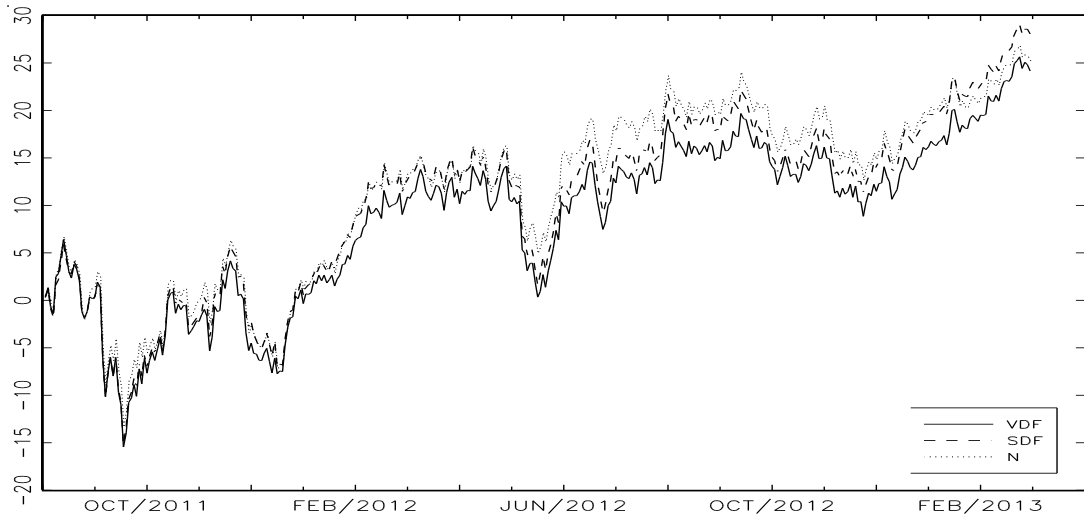
AMV портфель №5



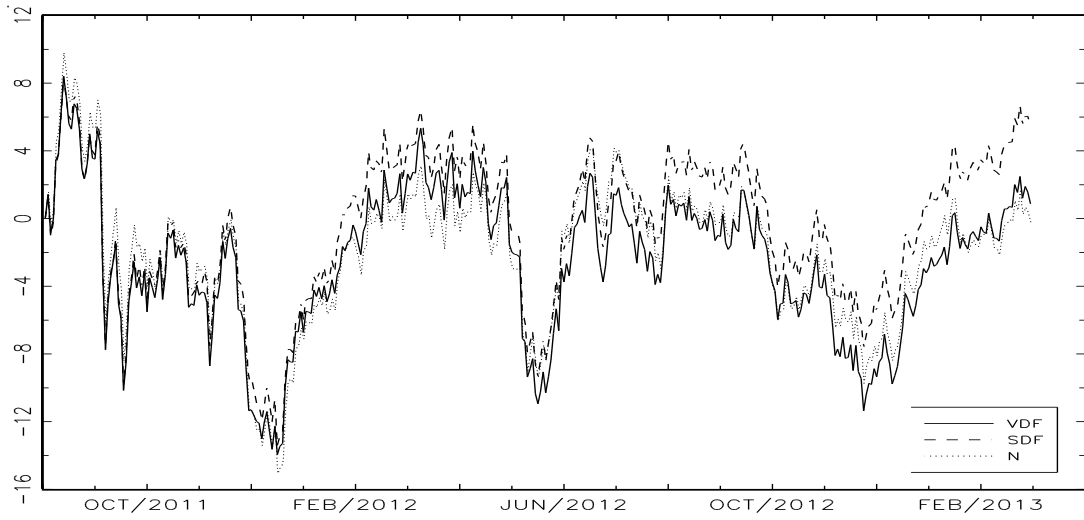
AMV портфель №6



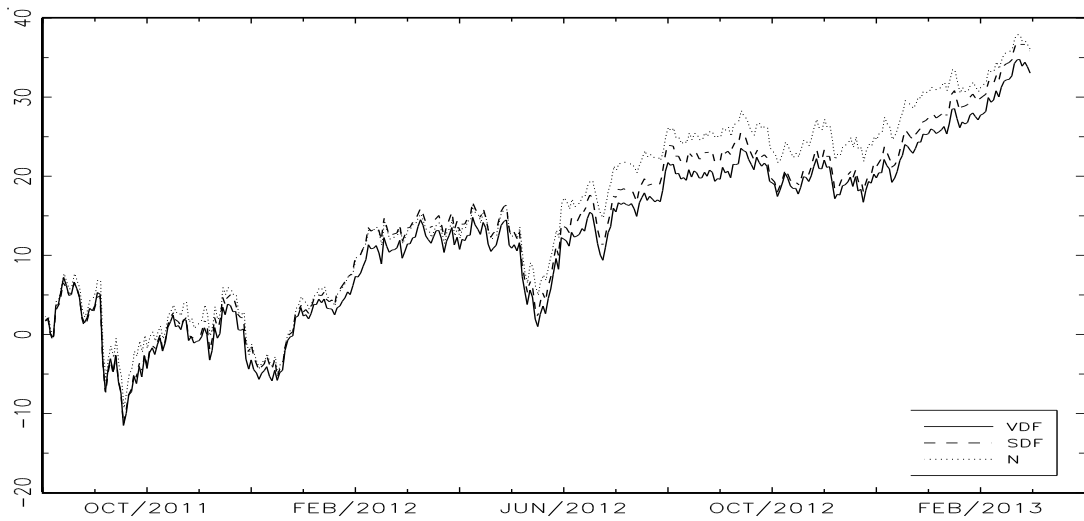
AMV портфель №7



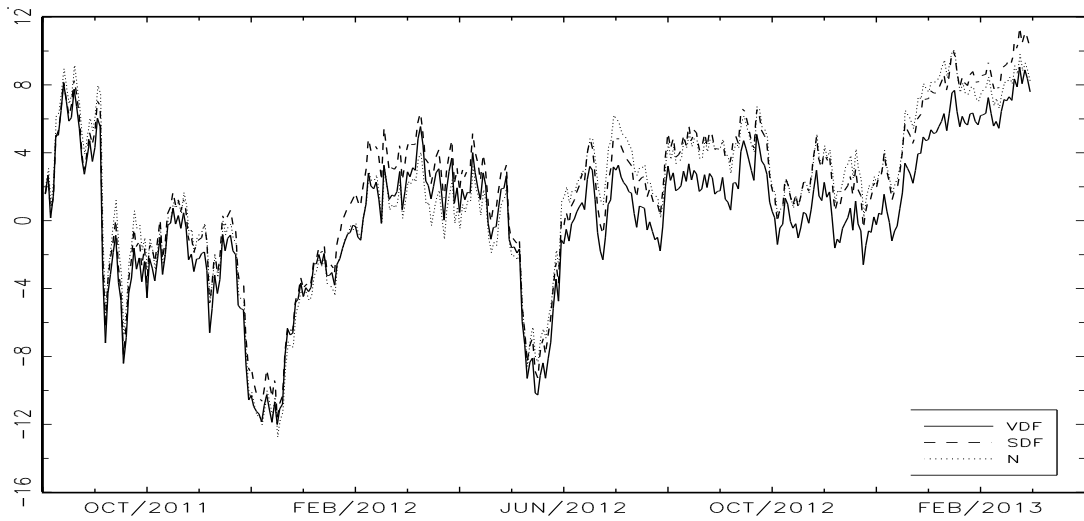
AMV портфель №8



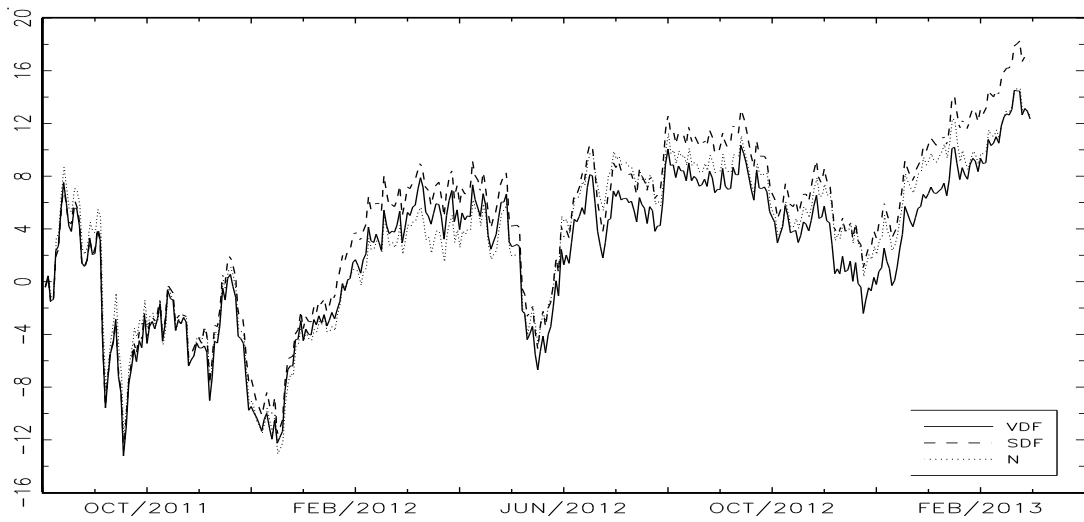
AMV портфель №9



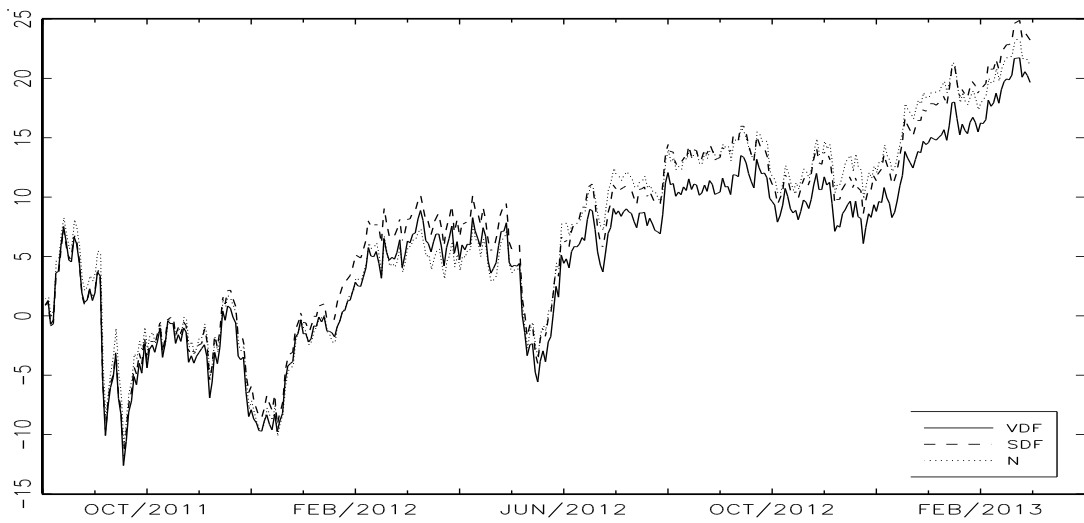
AMV портфель №10



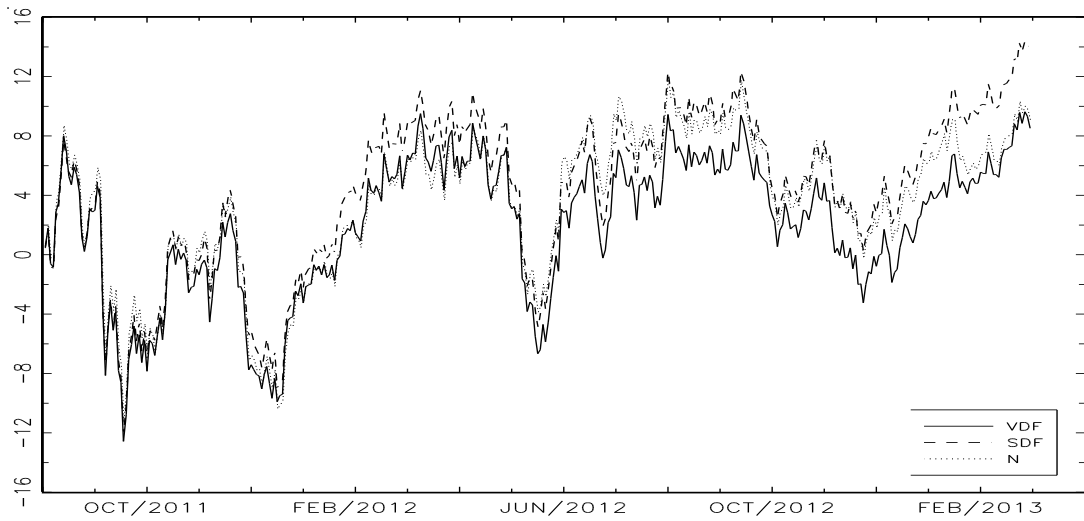
AMV портфель №11



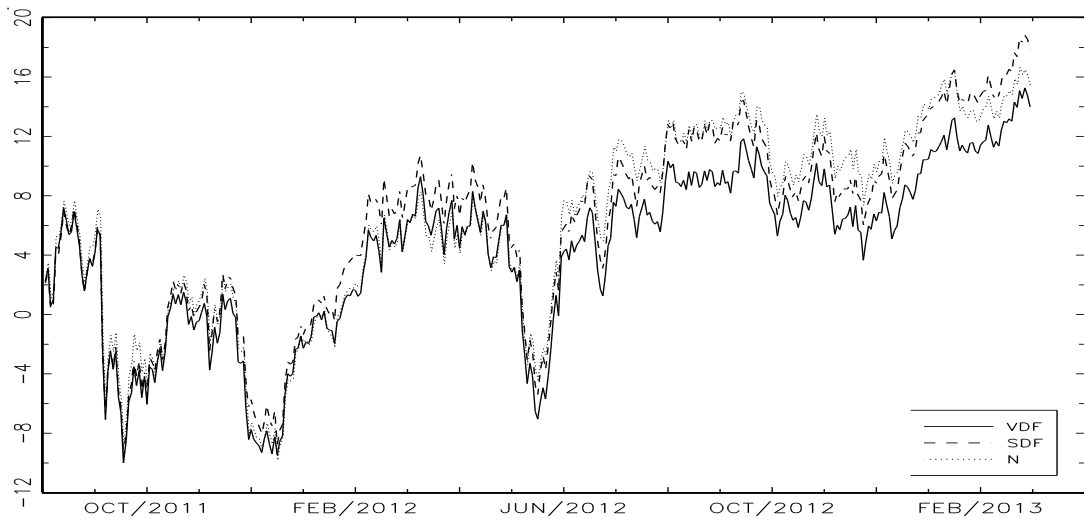
AMV портфель №12



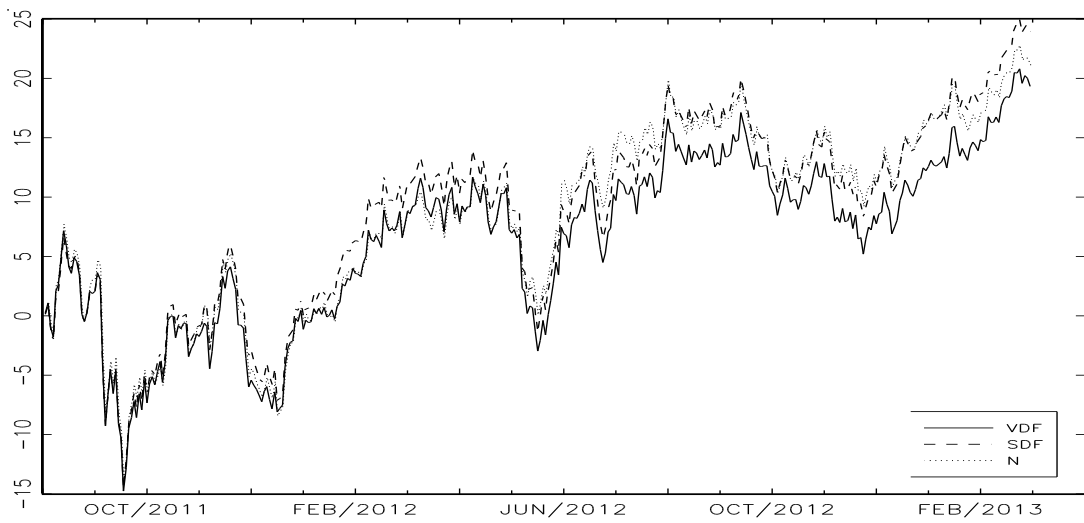
AMV портфель №13



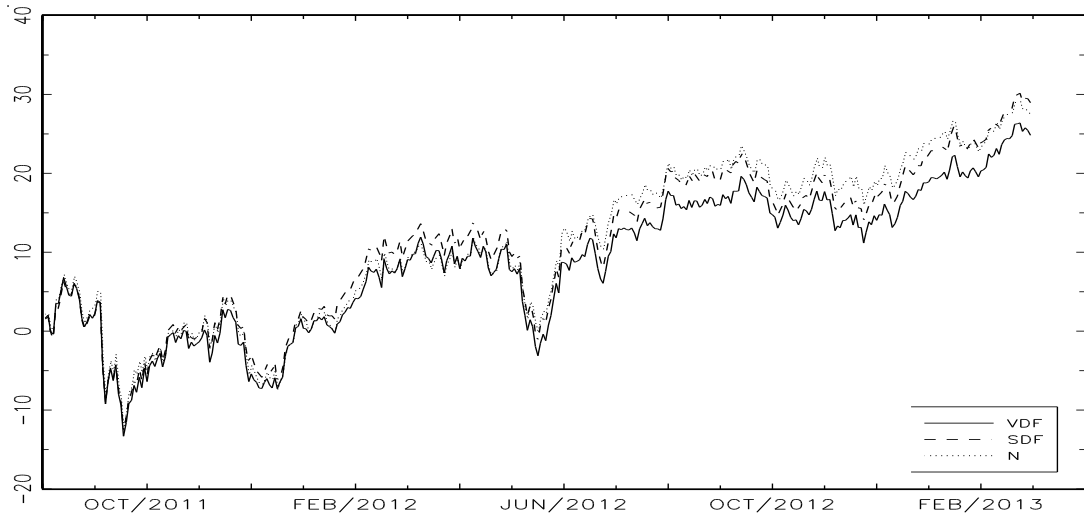
AMV портфель №14



AMV портфель №15

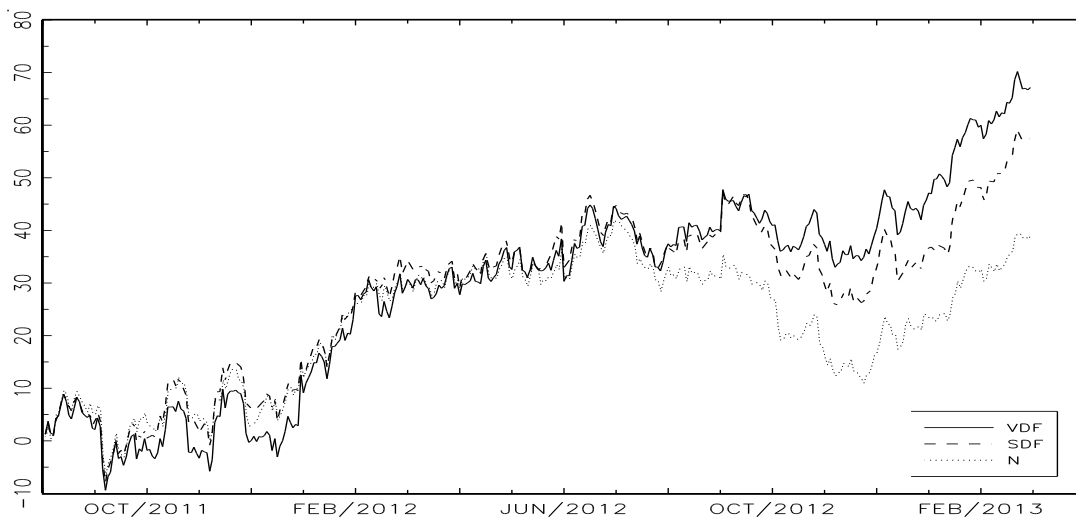


AMV портфель №16

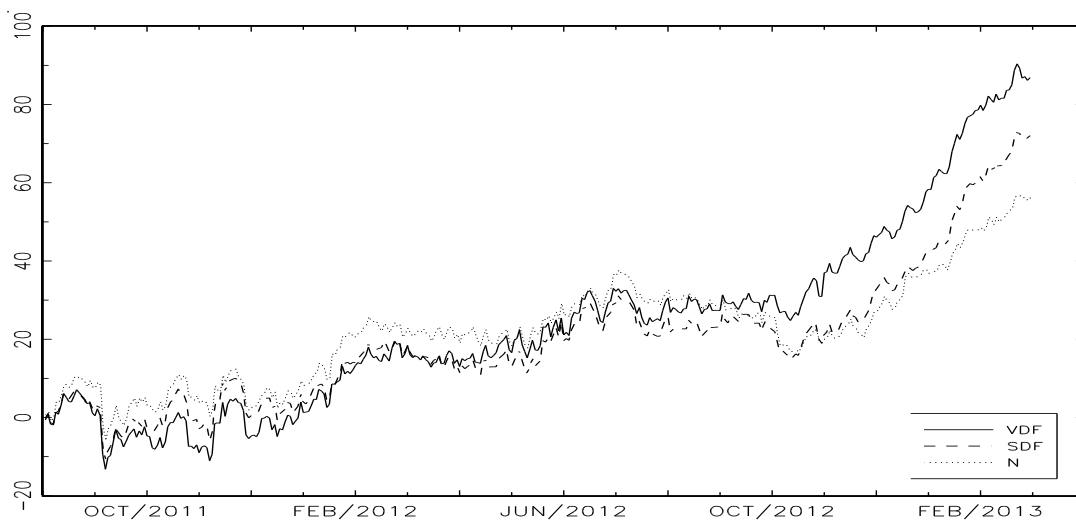


CMV портфели с минимальной ожидаемой доходностью $\bar{r} = 0,5$

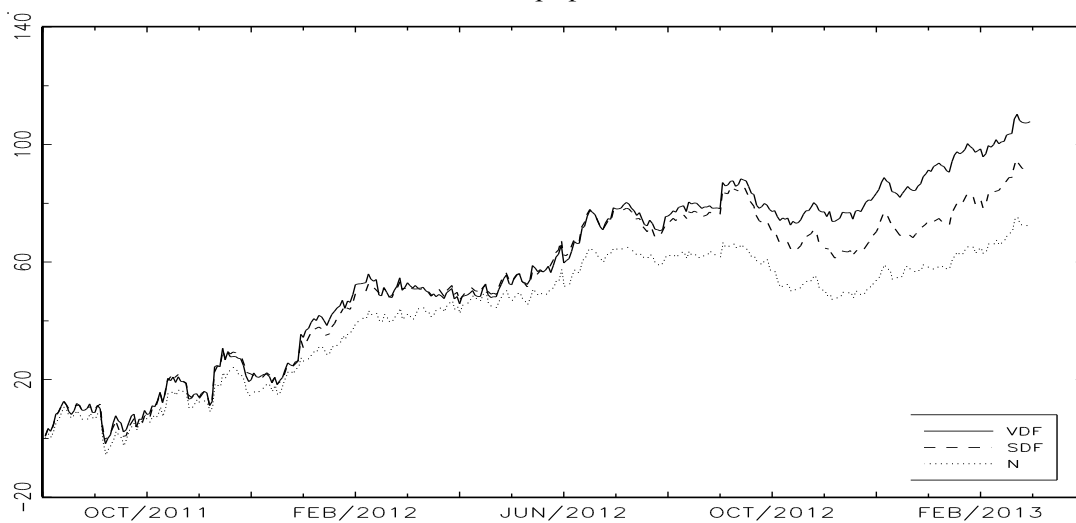
CMV портфель №1



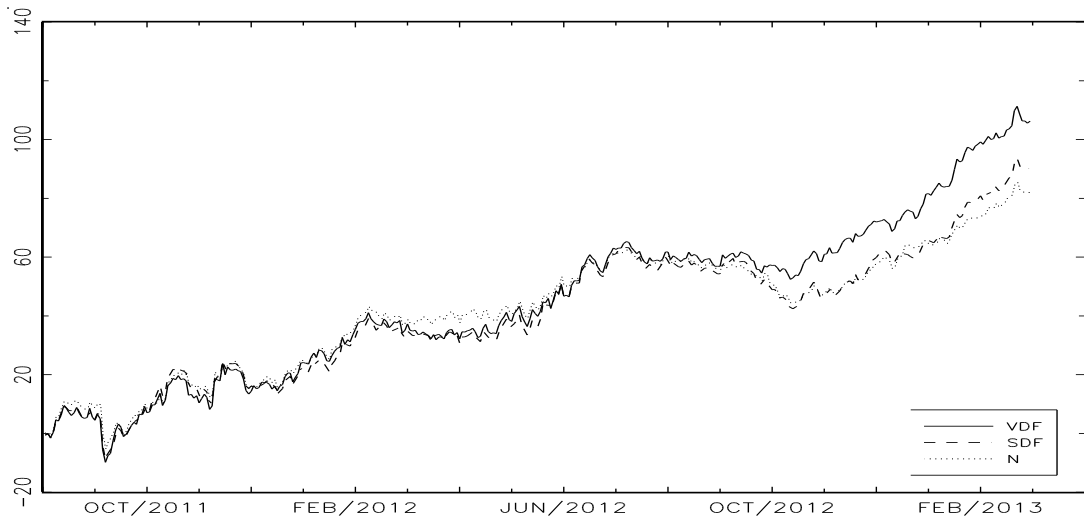
CMV портфель №2



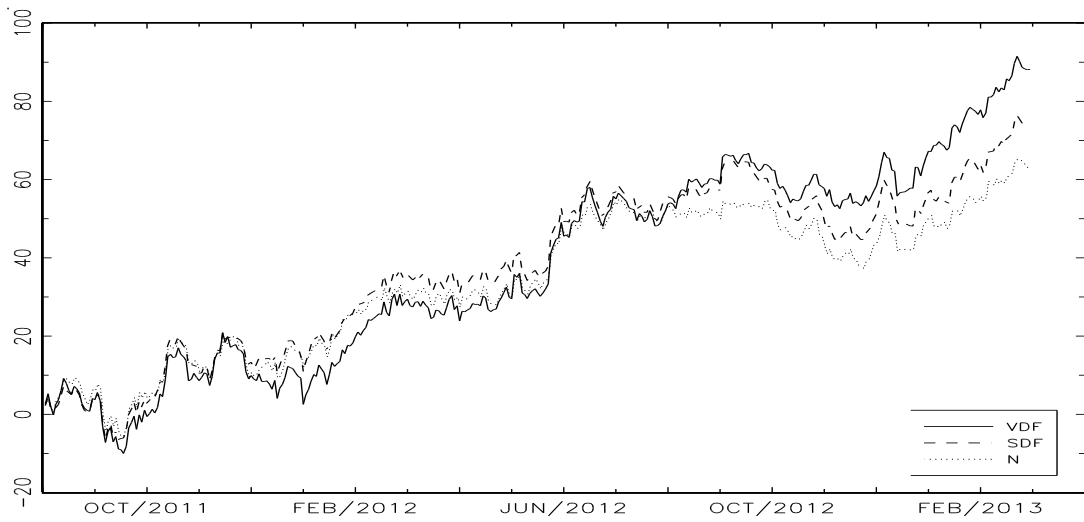
CMV портфель №3



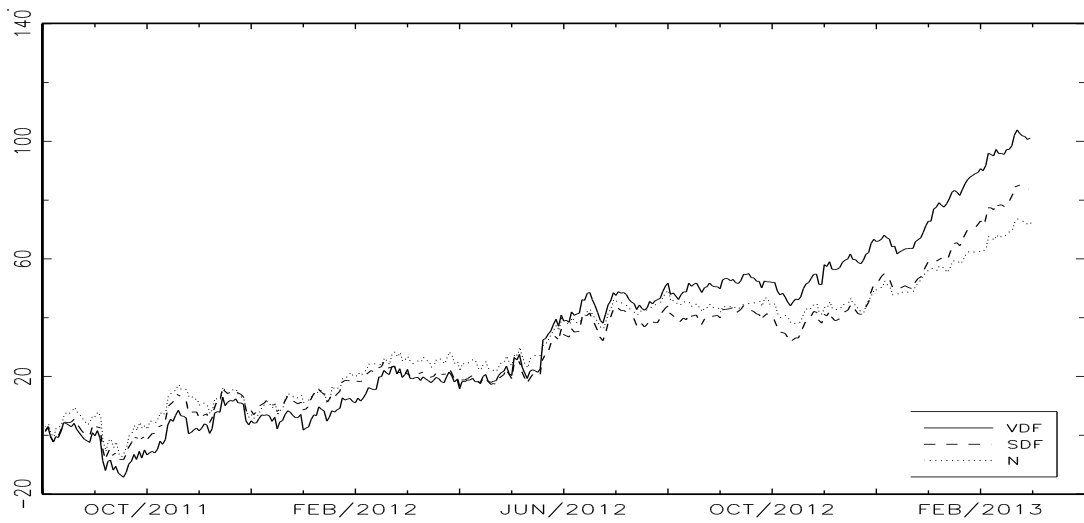
CMV портфель №4



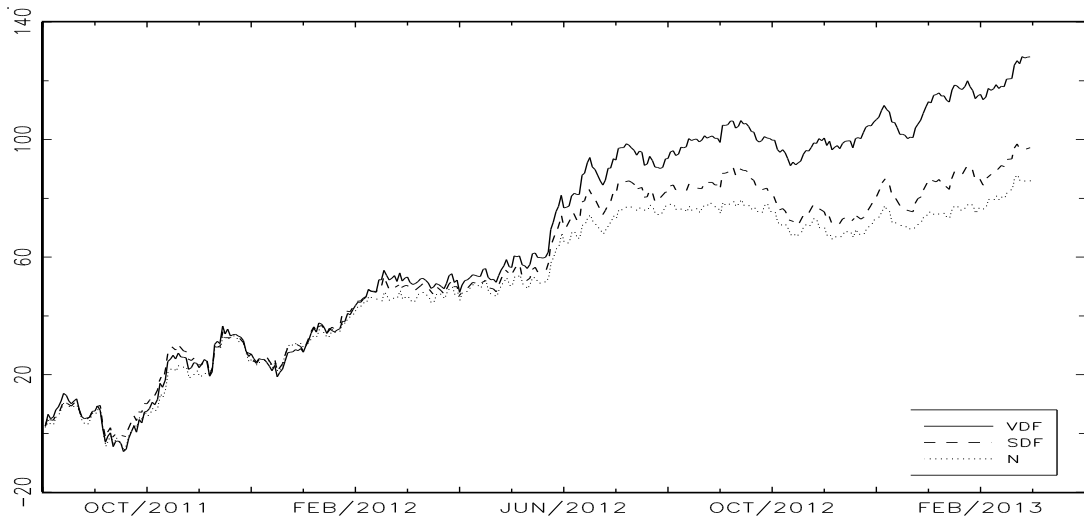
CMV портфель №5



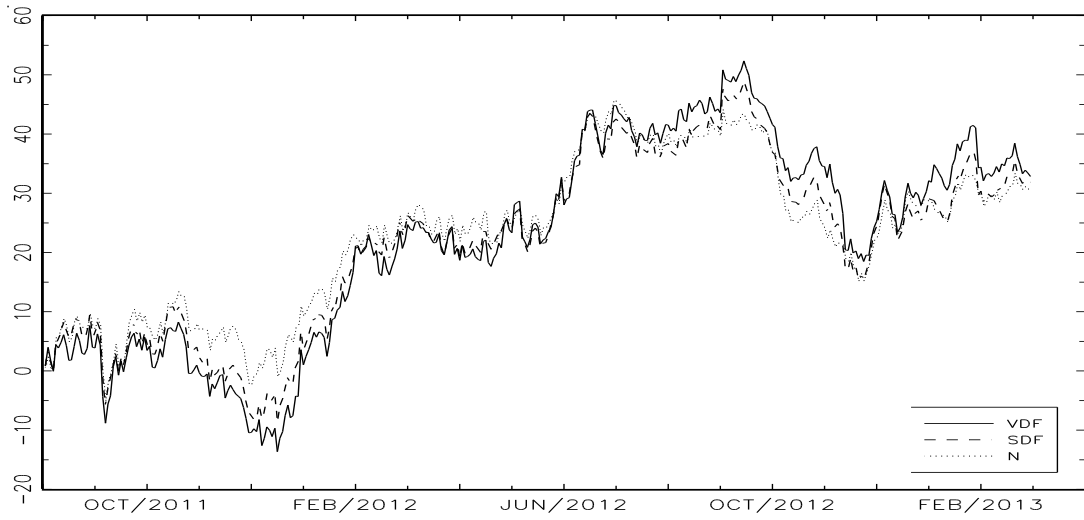
CMV портфель №6



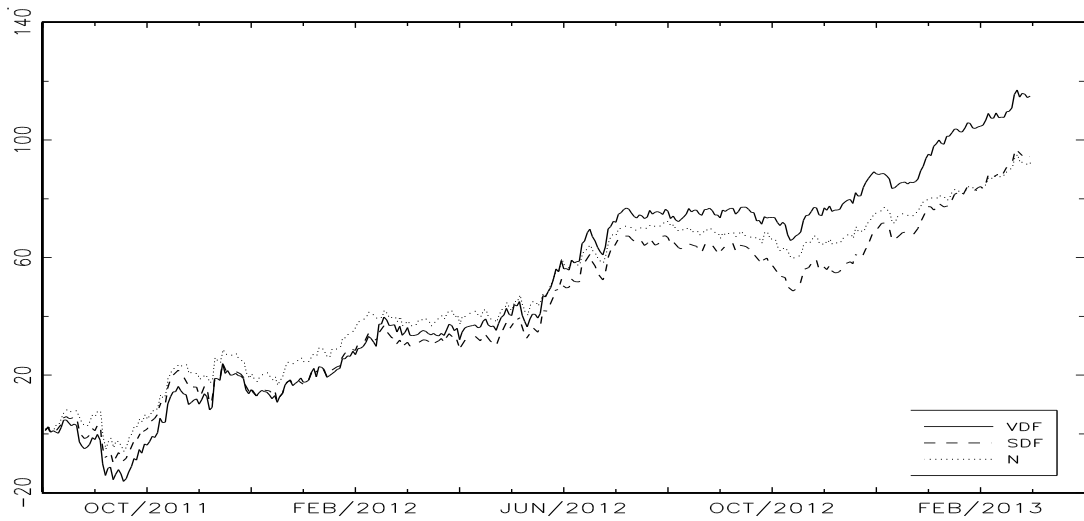
CMV портфель №7



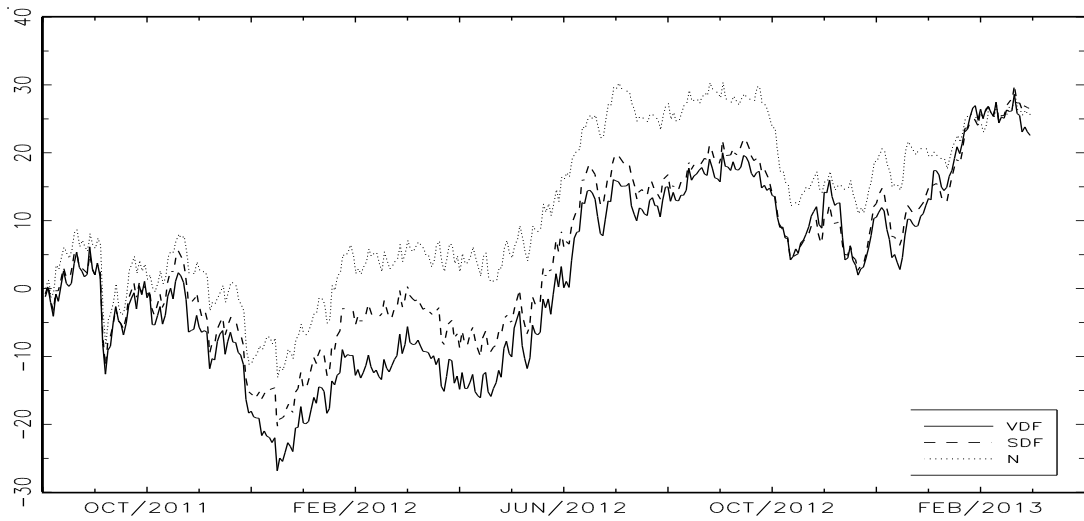
CMV портфель №8



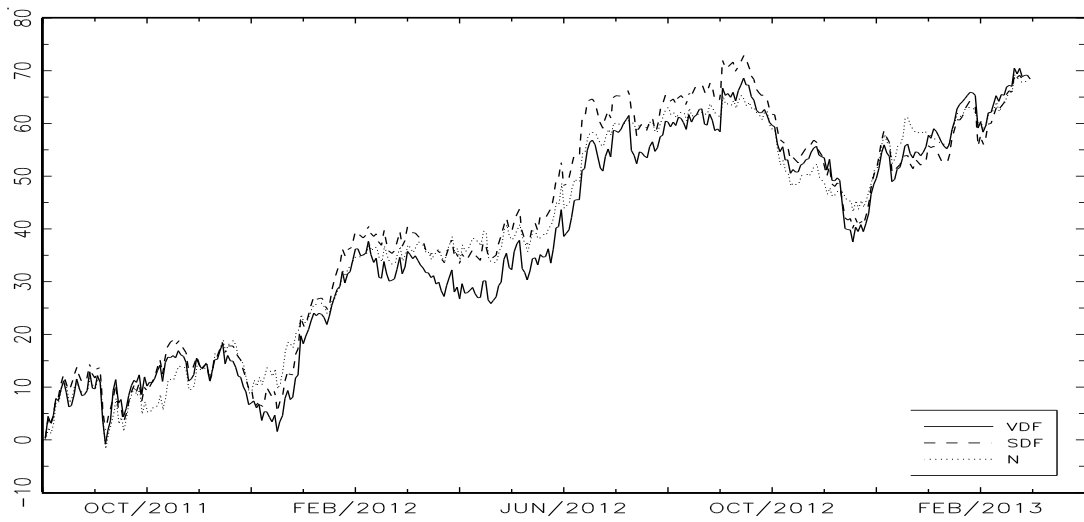
CMV портфель №9



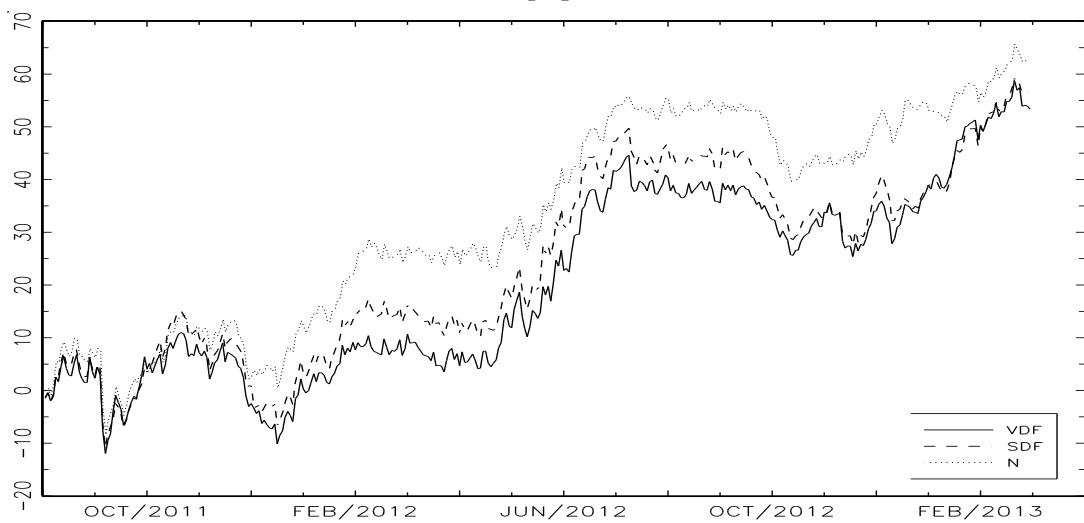
CMV портфель №10



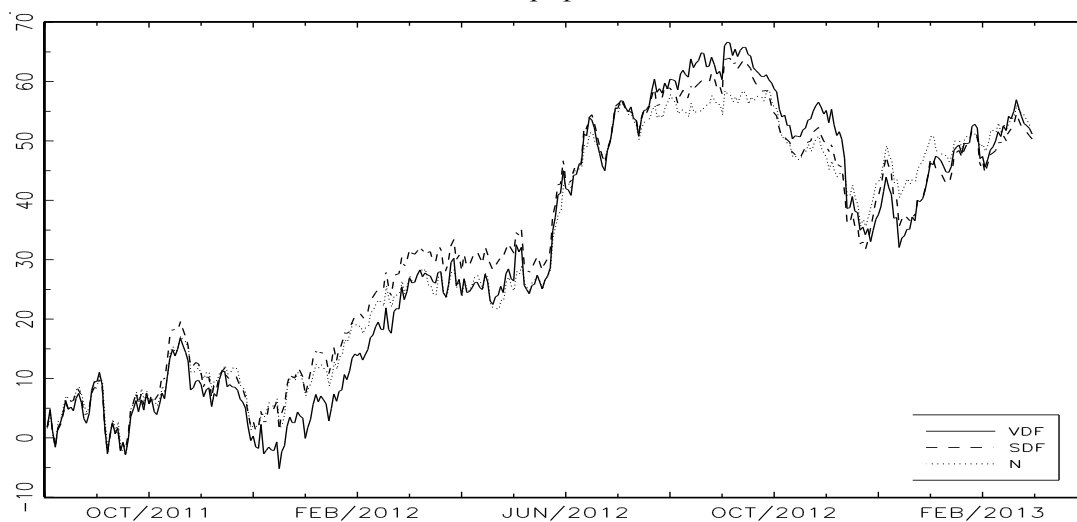
CMV портфель №11



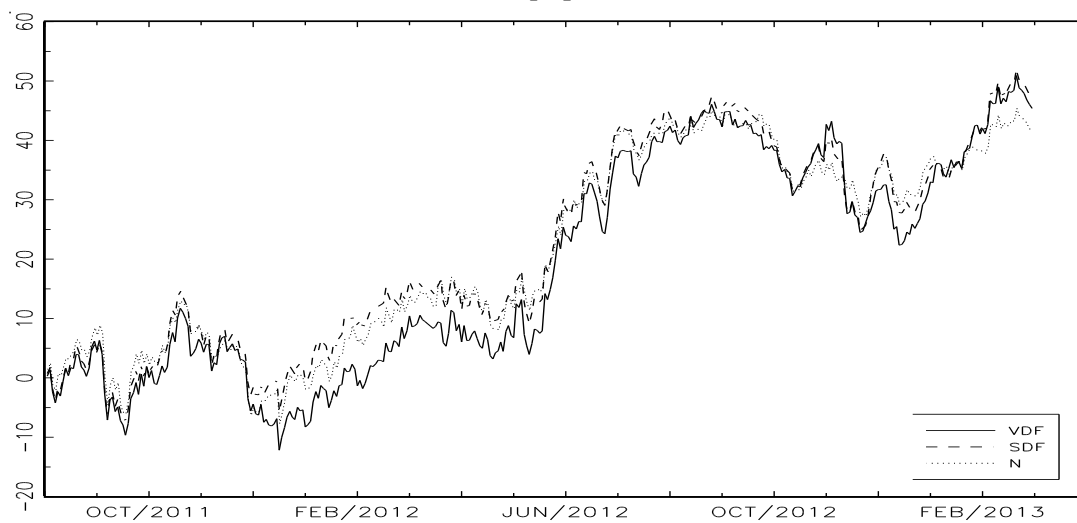
CMV портфель №12



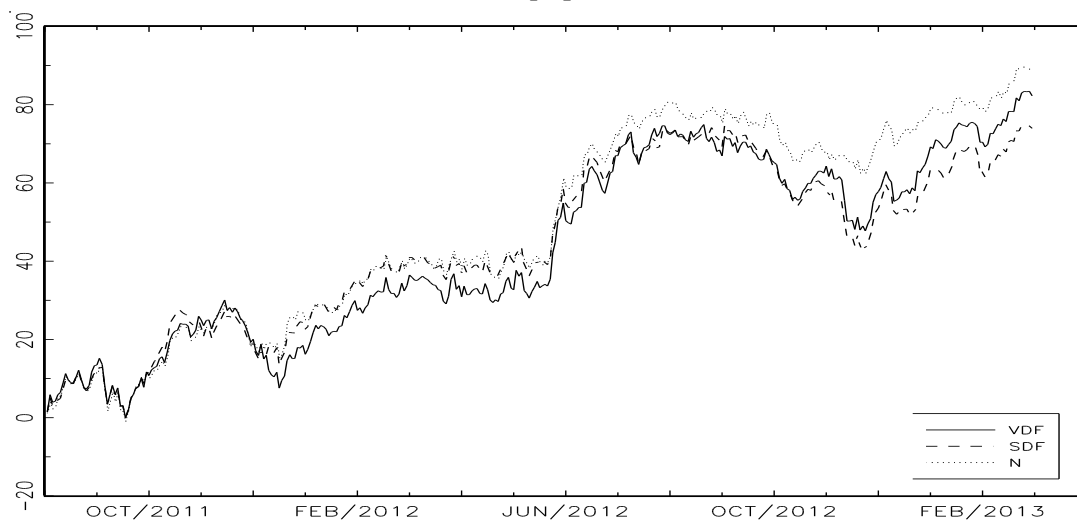
CMV портфель №13



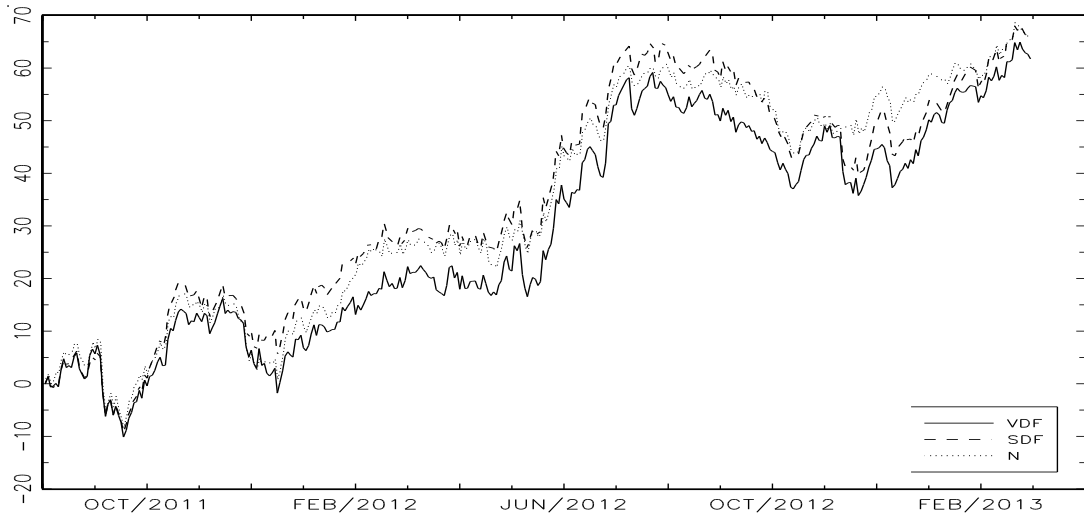
CMV портфель №14



CMV портфель №15

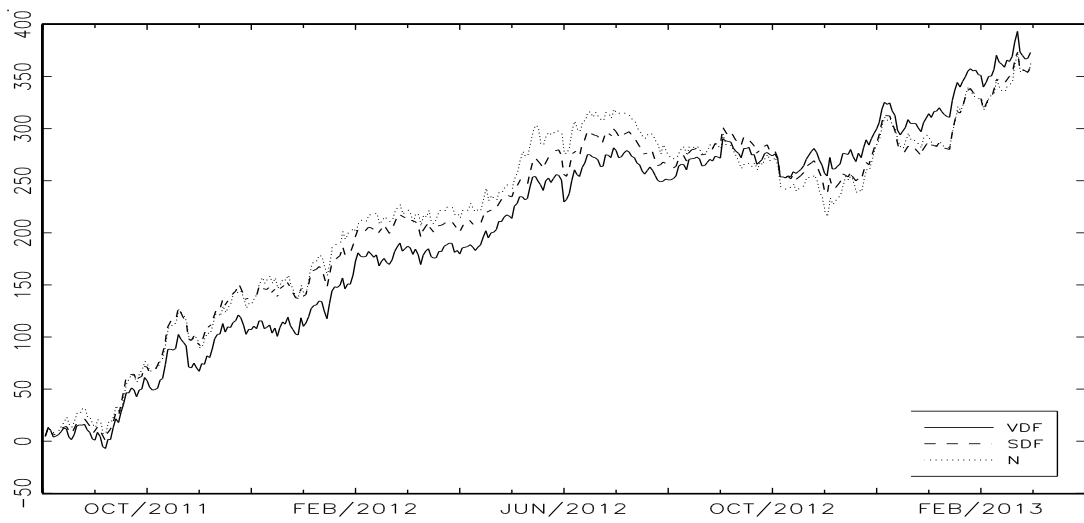


СМV портфель №16

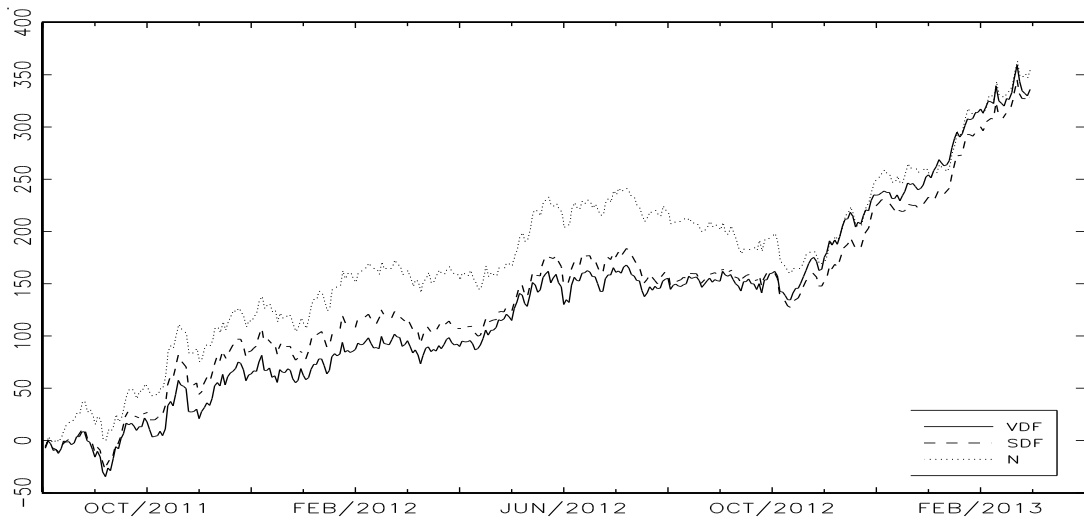


СМЕ портфели с максимальной дисперсией $\bar{v} = 50$

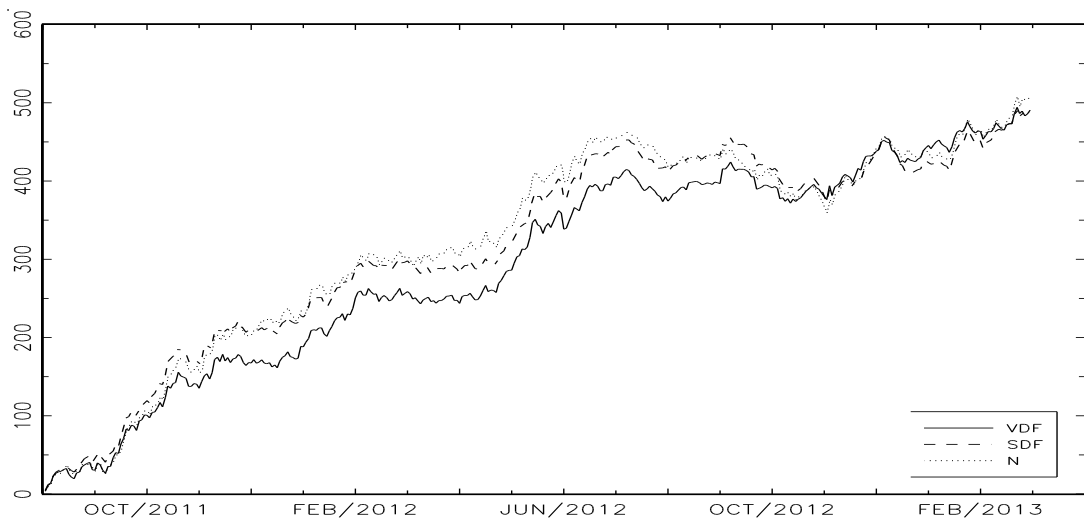
СМЕ портфель №1



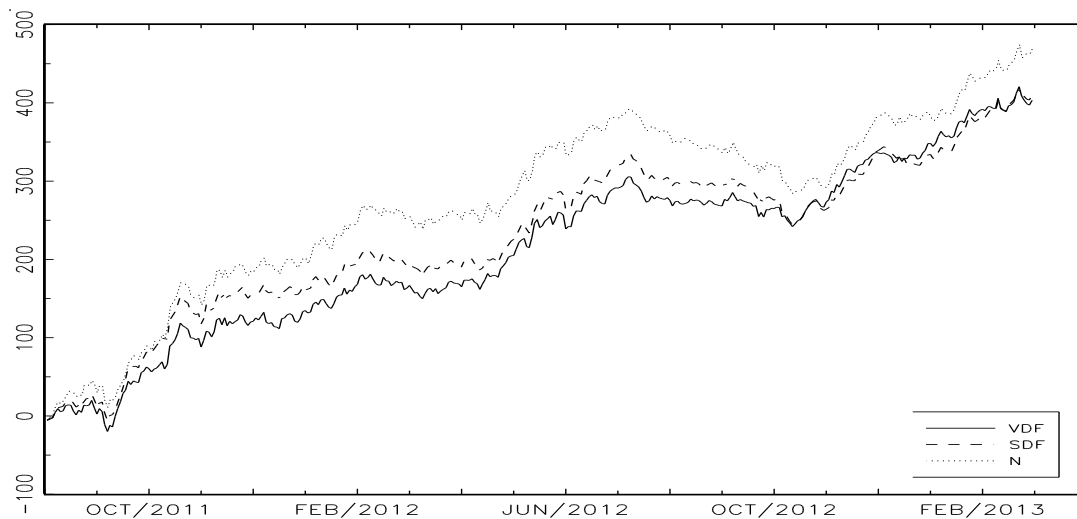
СМЕ портфель №2



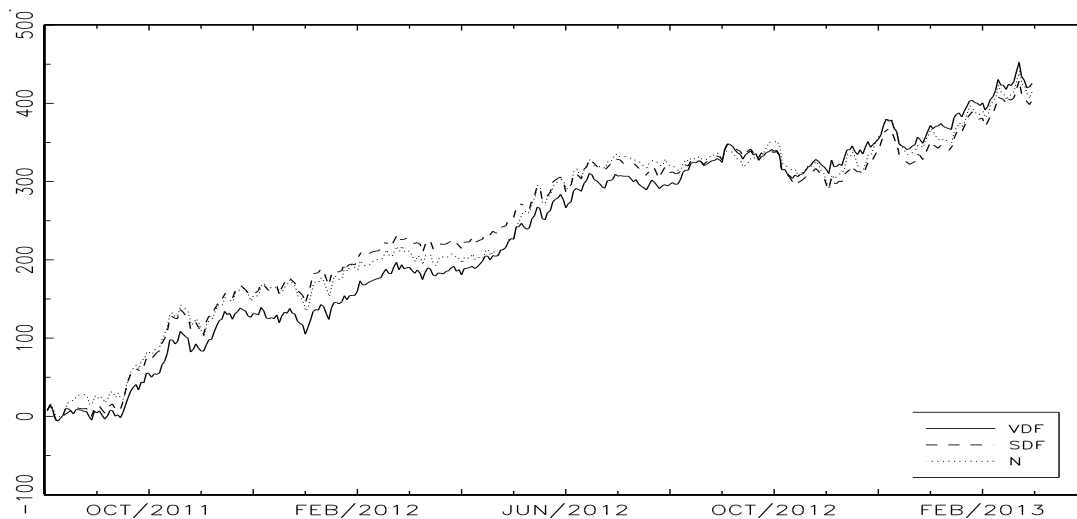
СМЕ портфель №3



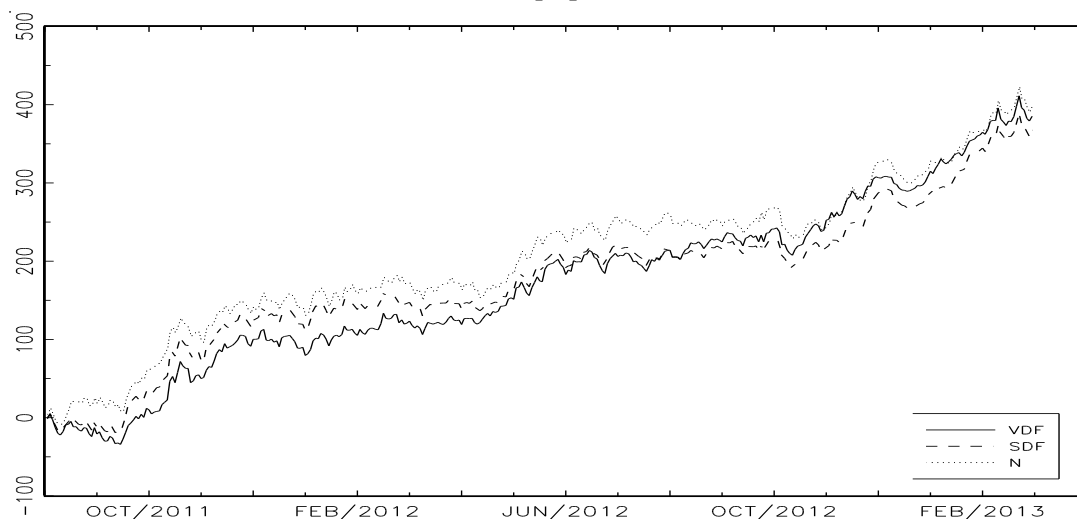
СМЕ портфель №4



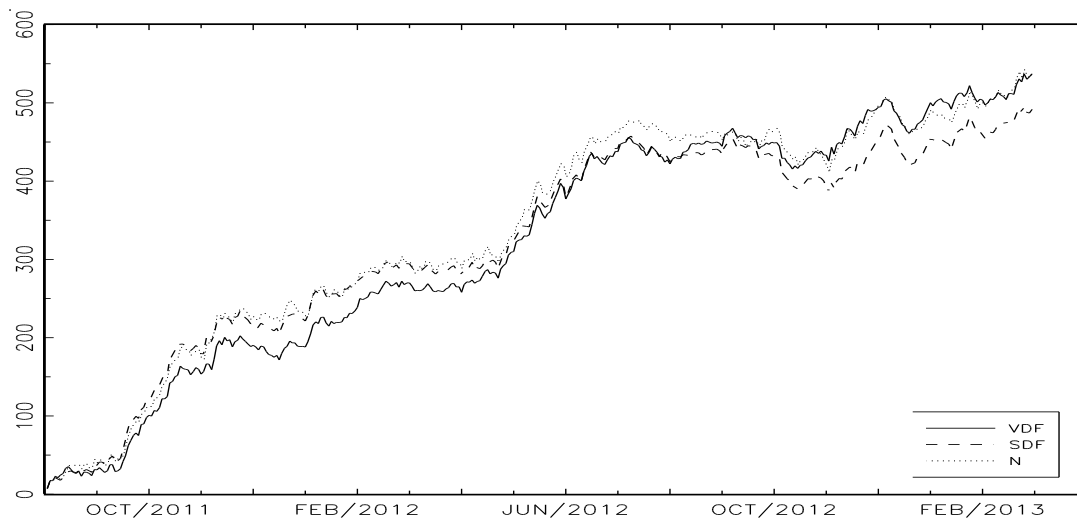
СМЕ портфель №5



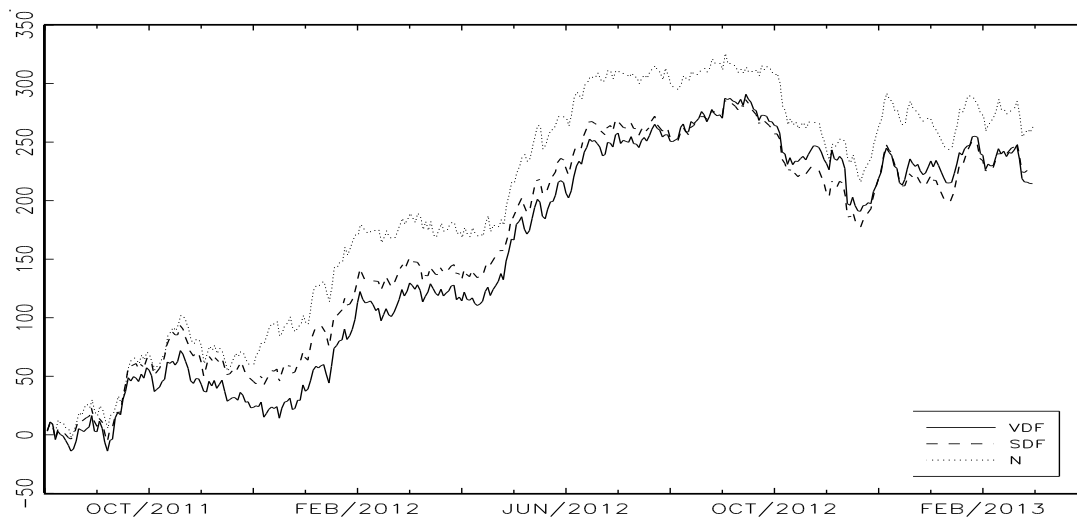
СМЕ портфель №6



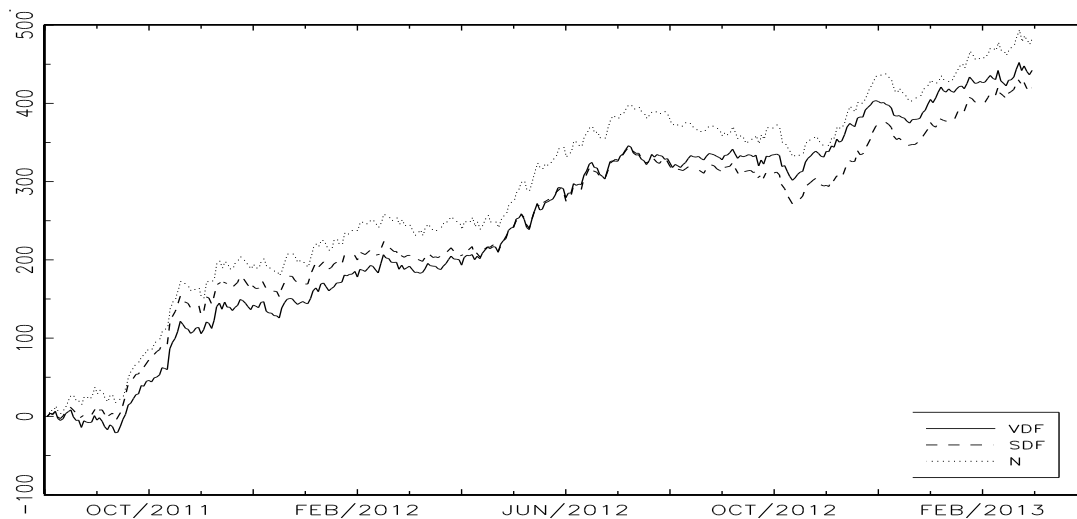
СМЕ портфель №7



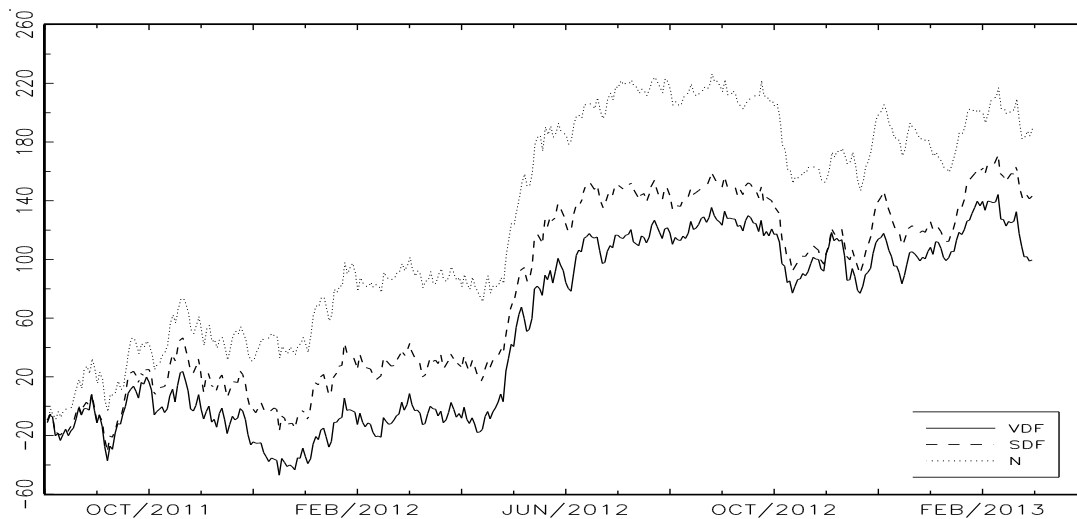
СМЕ портфель №8



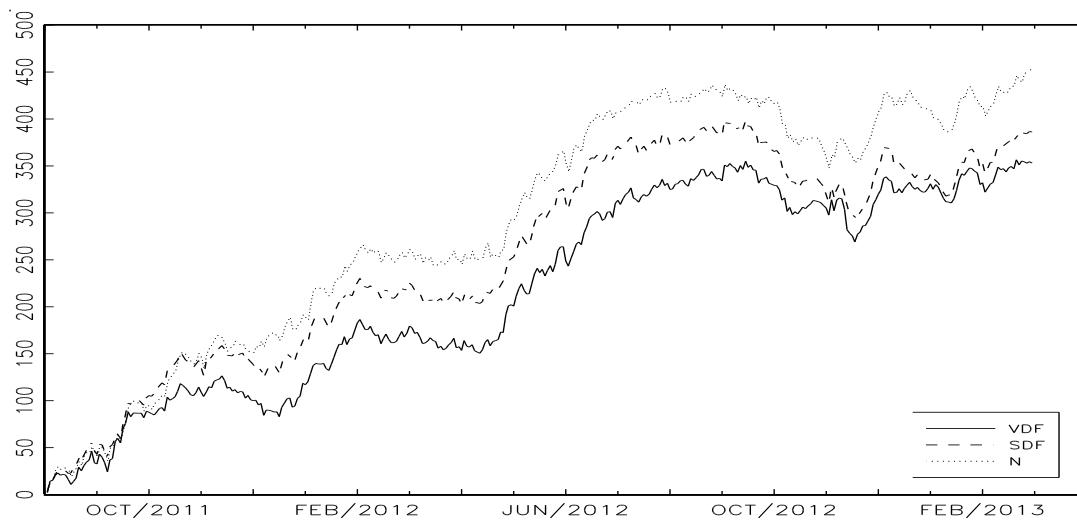
СМЕ портфель №9



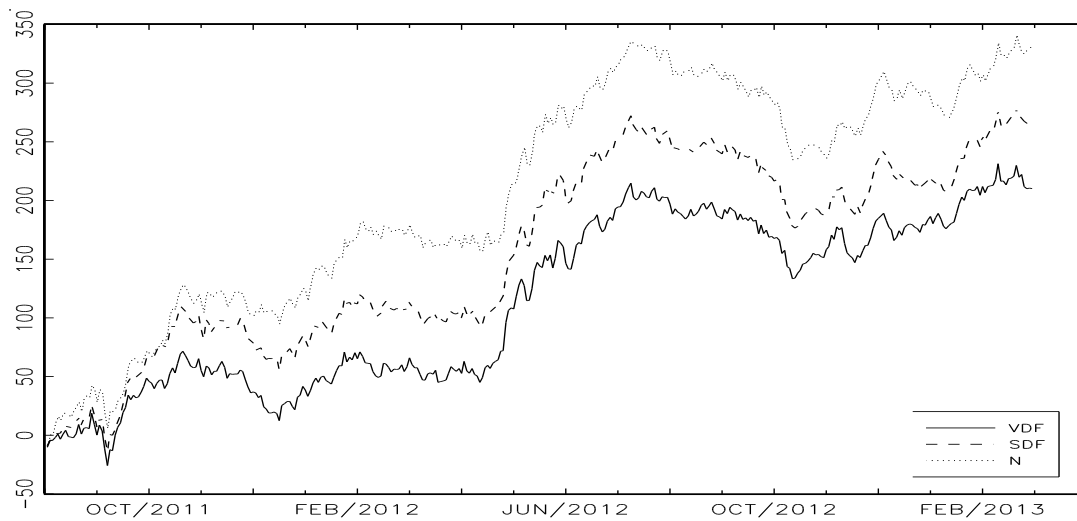
СМЕ портфель №10



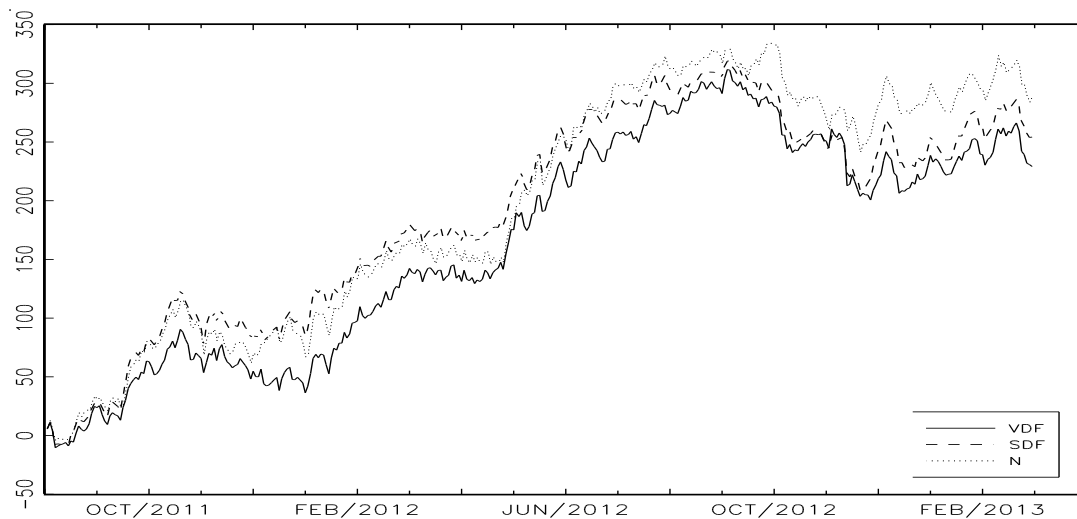
СМЕ портфель №11



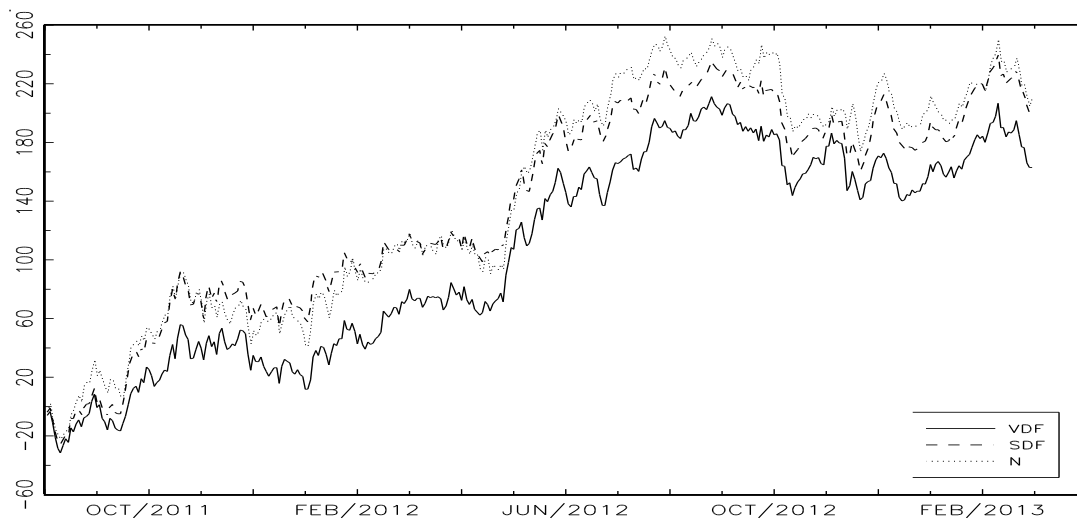
СМЕ портфель №12



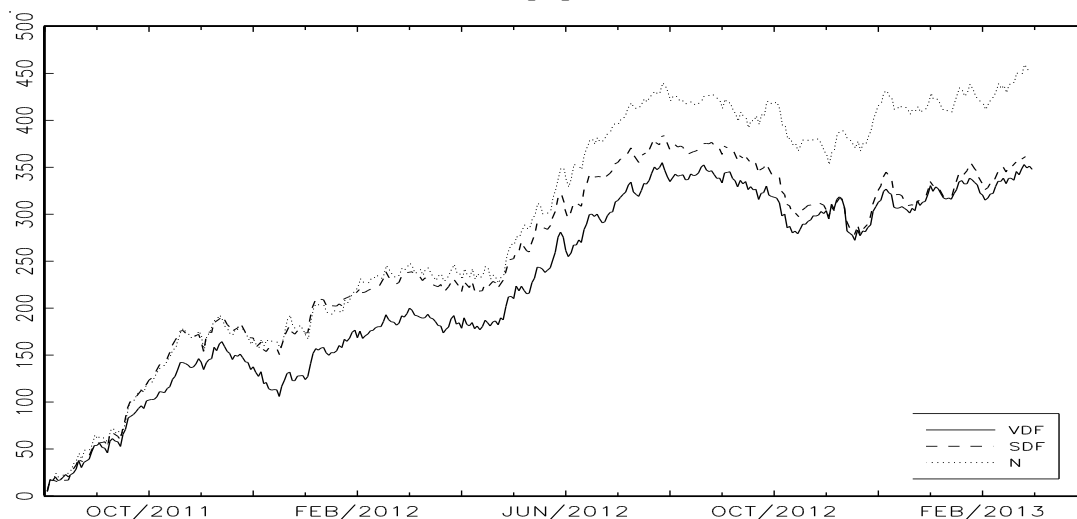
СМЕ портфель №13



СМЕ портфель №14



СМЕ портфель №15



СМЕ портфель №16

